知识点57 等差数列基本量的计算（P3-12）

01

知识点57 等差数列基本量的计算

教材知识萃取

已知等差数列$\{a_n\}$的首项是a_1,公差是d,则

通项公式	$a_n=a_1+(n-1)d$,可推广为$a_n=a_m+(n-m)d(n,m\in \mathbf{N}^*)$.
前n项和公式	$S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$.
等差中项	如果a，A，b成等差数列，那么A叫做a与b的等差中项，且$A=\frac{a+b}{2}$.

说明 由 $a_n = dn + (a_1 - d)$ 可知，当 $d \neq 0$ 时，a_n 可看作关于 n 的一次函数.

（2）由 $S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d = \frac{d}{2}n^2 + \left(a_1 - \frac{d}{2}\right)n$ 可知，当 $d \neq 0$ 时，S_n 可看作关于 n 的二次函数，故可借助二次函数的图象和性质来研究 S_n 的最值问题.

等差数列的单调性:当 $d > 0$ 时，数列 $\{a_n\}$ 为递增数列；当 $d < 0$ 时，数列 $\{a_n\}$ 为递减数列；当 $d = 0$ 时，数列 $\{a_n\}$ 为常数列 .

教材素材变式

1.[人A选必二P21例6变式,2023全国甲卷（文）]记S_n为等差数列$\{a_n\}$的前n项和．若$a_2+a_6=10$，$a_4a_8=45$，则$S_5=$(　C)

A.25　　B.22　　C.20　　D.15

【解析】解法一设等差数列$\{a_n\}$的公差为d，则由$a_2+a_6=10$，可得$a_1+3d=5$①，由$a_4a_8=45$，可得$(a_1+3d)(a_1+7d)=45$②，由①②可得$a_1=2$，$d=1$，所以$S_5=5a_1+\frac{5\times 4}{2}\times d=20$，故选C.

解法二 由$a_2+a_6=10$，可得$2a_4=10$，（等差数列的性质）所以$a_4=5$，又$a_4a_8=45$，所以$a_8=9$.设等差数列$\{a_n\}$的公差为d，则$d=\frac{a_8-a_4}{8-4}=\frac{9-5}{4}=1$，又$a_4=5$，所以$a_1=2$，所以$S_5=5a_1+\frac{5\times 4}{2}\times d=20$，故选C.

2.[人A选必二P21例7变式,2022全国乙（文）]记S_n为等差数列$\{a_n\}$的前n项和.若$2S_3 = 3S_2 + 6$，则公差$d =$ 2 ___.

【解析】 因为$2S_3 = 3S_2 + 6$,所以$2(a_1 + a_2 + a_3) = 3(a_1 + a_2) + 6$，即$2(3a_1 + 3d) = 3(2a_1 + d) + 6$,化简得$3d = 6$，得$d = 2$.

3.［人A选必二P23例9变式］已知等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，$a_1=19,S_{10}=10$，则S_n的最大值为(**D**)

A.$\frac{441}{8}$　　B.52　　C.54　　D.55

【解析】 解法一 设等差数列$\{a_n\}$的公差为d，则$10\times 19+\frac{10\times 9}{2}\times d=10$，解得$d=-4$，故

$S_n=19n+\frac{n(n-1)}{2}\times(-4)=21n-2n^2$．函数$y=-2x^2+21x$的图象的对称轴为直线$x=\frac{21}{4}$，因为$n\in\mathrm{N}^*$，所以当

$n=5$时，S_n取得最大值$S_5=55$，故选D.

解法二 设数列$\{a_n\}$的公差为d，由题意得，$10a_1+\frac{10\times 9}{2}d=10$，得$d=-4$，

所以$a_n=19+(n-1)(-4)=-4n+23$，由$\begin{cases}a_n\geq 0,\\a_{n+1}<0,\end{cases}$即$\begin{cases}-4n+23\geq 0,\\-4(n+1)+23<0,\end{cases}$解得$\frac{19}{4}<n\leq\frac{23}{4}$，$n\in\mathrm{N}^*$，则$n=5$

所以$\begin{cases}a_5>0,\\a_6<0,\end{cases}$所以$S_n$的最大值为$S_5=5\times 19+\frac{5\times 4}{2}\times(-4)=55$，故选D.

4. [人A选必二P25习题4.2第10题变式] 在等差数列$\{a_n\}$中，$a_2=3, a_6=11$，直线l过点$M(m, a_m), N(n, a_n)(m \neq n, m, \in \mathbf{N}^*)$，则直线$l$的斜率为(　A)

A.2　　B.-2　　C.4　　D.-4

【解析】

解法一 由题意，$\{a_n\}$是等差数列，$a_2=3, a_6=11$，设数列$\{a_n\}$的公差为d，则$a_6-a_2=4d=8$，得$d=2$，则$a_n=a_2+(n-2)d=2n-1$，所以$M(m, 2m-1), N(n, 2n-1)$，则直线l的斜率为$\frac{2n-2m}{n-m}=2$.故选A.

5. [多选] [人B选必三P58复习题A组第7题变式] 《周髀算经》是中国古老的天文学和数学著作，其记载有：“阴阳之数，日月之法，十九岁为一章.四章为一蔀，七十六岁.二十蔀为一遂，遂千五百二十岁．” 已知有n个人，他们的年龄之和恰好为十蔀（即760岁），其中年龄最小的25岁，年龄最大的$m(m \leq 120)$岁，且除了年龄最大的以外，其余$n-1$人的年龄依次相差2岁，则n的值可以是(CD)

A.15　　B.16　　C.17　　D.18

【解析】设这n个人的岁数由小到大依次为$a_1,a_2,\cdots,a_n,n \in \mathbf{N}^*$,数列$\{a_n\}$的前$n$项和为$S_n$，由题意，数列$\{a_n\}$的前$n-1$项为等差数列，公差$d=2$，首项$a_1=25$，$S_{n-1}=760-m$，末项$a_n=m \leq 120$,则

$760-m=25(n-1)+\frac{(n-1)(n-2)}{2}\times 2$，得$m=-(n^2+22n-783)\leq 120$，即$n^2+22n-663\geq 0$，即

$(n-17)(n+39)\geq 0$，得$n\geq 17$，$n \in \mathbf{N}^*$,结合选项可知，选CD．

6. [人B选必三P27习题5-2A第3题变式]已知等差数列$\{a_n\}$中，$a_2=4,a_6=16$，若在数列$\{a_n\}$每相邻两项之间插入三个数，使得新数列也是一个等差数列，则新数列的第43项为$\underline{\frac{65}{2}}$.

【解析】 设等差数列$\{a_n\}$的公差为d，则$a_1+d=4,a_1+5d=16$，所以$a_1=1,d=3$.设在数列$\{a_n\}$每相邻两项之间插入三个数所得的新数列为$\{b_n\}$，则等差数列$\{b_n\}$的公差为$\frac{d}{4}=\frac{3}{4}$，首项$b_1=a_1=1$，所以

$b_n=1+\frac{3}{4}(n-1)=\frac{3}{4}n+\frac{1}{4}$，故$b_{43}=\frac{3}{4}\times 43+\frac{1}{4}=\frac{65}{2}$.

7.[人A选必二P24练习第5题变式，2021新高考Ⅱ卷]记S_n是公差不为0的等差数列$\{a_n\}$的前n项和，若$a_3=S_5$，$a_2a_4=S_4$.

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

【答案】设等差数列$\{a_n\}$的公差为$d(d\neq 0)$,

则由题意，得$\begin{cases} a_1+2d=5a_1+10d, \\ (a_1+d)(a_1+3d)=4a_1+6d, \end{cases}$

得$\begin{cases} a_1=-4, \\ d=2, \end{cases}$

所以$a_n=a_1+(n-1)d=2n-6$.

（2）求使$S_n > a_n$成立的n的最小值.

【答案】解法一$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = \frac{n(2n-10)}{2} = n^2 - 5n$,

则由$n^2 - 5n > 2n - 6$,整理得$n^2 - 7n + 6 > 0$,解得$n < 1$或$n > 6$.

因为$n \in \mathrm{N}^*$,所以使$S_n > a_n$成立的n的最小值为7.

解法二 由$S_n > a_n$得$S_{n-1} > 0(n \geq 2)$,即$\frac{(a_1 + a_{n-1})(n-1)}{2} > 0$,

所以$a_1 + a_{n-1} = 2n - 12 > 0$,解得$n > 6$,

所以n的最小值为7.

02

知识点58 等差数列的判定与证明

教材知识萃取

等差数列的判定与证明的方法

定义法	$a_n-a_{n-1}=d$(d为常数,$n\geq 2$)$\Leftrightarrow\{a_n\}$为等差数列
等差中项法	$2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}\Leftrightarrow\{a_n\}$为等差数列
通项公式法	$a_n=pn+q$(p,q为常数)为n的一次函数$\Leftrightarrow\{a_n\}$为等差数列
前n项和公式法	$S_n=An^2+Bn$或$S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}\Leftrightarrow\{a_n\}$为等差数列

提醒　用定义证明等差数列时,常采用的两个式子为$a_{n+1}-a_n=d$和$a_n-a_{n-1}=d$,但它们的意义不同,后者必须加上“$n\geq 2$”,否则$n=1$时,a_0无定义.

说明　证明数列不是等差数列,只需证明存在连续的三项不成等差数列即可.

教材素材变式

1. [多选] [人A选必二P24练习第2题变式] 设数列$\{a_n\}$的前n项和为$S_n(n \in \mathrm{N}^*)$，则下列能判断数列$\{a_n\}$是等差数列的是(**AB**)

A.$S_n = n$　　B.$S_n = n^2 + n$　　C.$S_n = 2^n$　　D.$S_n = n^2 + n + 1$

【解析】通解 对于A，当$n \in \mathbf{N}^*, n \geq 2$时，$a_n = S_n - S_{n-1} = n - (n-1) = 1$，又$a_1 = S_1 = 1$满足上式，所以$a_n = 1$，数列$\{a_n\}$是常数列，则数列$\{a_n\}$是等差数列，A符合题意；

对于B，当$n \in \mathbf{N}^*, n \geq 2$时，$a_n = S_n - S_{n-1} = n^2 + n - (n-1)^2 - (n-1) = 2n$，又$a_1 = S_1 = 2$满足上式，所以$a_n = 2n$，数列$\{a_n\}$的通项公式是$n$的一次函数，则数列$\{a_n\}$是等差数列，B符合题意；

对于C，当$n \in \mathbf{N}^*, n \geq 2$时，$a_n = S_n - S_{n-1} = 2^n - 2^{n-1} = 2^{n-1}$，又$a_1 = S_1 = 2$不满足上式，所以$a_n = \begin{cases} 2, n = 1, \\ 2^{n-1}, n \geq 2, \end{cases}$显然$a_2 - a_1 = 0 \neq 2 = a_3 - a_2$，则数列$\{a_n\}$不是等差数列，C不符合题意；

对于D，当$n \in \mathbf{N}^*, n \geq 2$时，$a_n = S_n - S_{n-1} = n^2 + n + 1 - (n-1)^2 - (n-1) - 1 = 2n$，又$a_1 = S_1 = 3$不满足上式，所以$a_n = \begin{cases} 3, n = 1, \\ 2n, n \geq 2, \end{cases}$显然$a_2 - a_1 = 1 \neq 2 = a_3 - a_2$，则数列$\{a_n\}$不是等差数列，D不符合题意.故选AB.

秒杀解 由于数列$\{a_n\}$的前n项和公式为$S_n = An^2 + Bn$的形式是数列$\{a_n\}$为等差数列的充要条件，所以结合选项可知，选AB.