培优专题 04　尺规作图在压轴题中的应用

01 中考直击

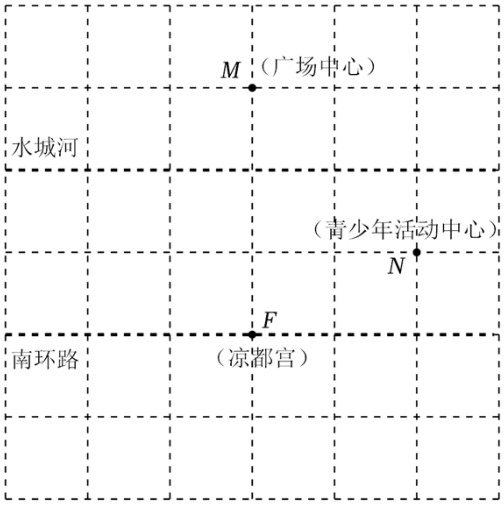
本考点是中考五星高频考点，难度中等偏上，在全国很多地市的中考试卷中多有考查。

（2022 年六盘水市中考试卷第 25 题）“水城河畔，樱花绽放，凉都宫中，书画成风”的风景，引来市民和游客争相“打卡”留念．已知水城河与南环路之间的某路段平行宽度为 200 米，为避免交通拥堵，请在水城河与南环路之间设计一条停车带，使得每个停车位到水城河与到凉都宫点 F 的距离相等．

（1）利用尺规作出凉都宫到水城河的距离（保留作图痕迹，不写作法）；

（2）在图中格点处标出三个符合条件的停车位 P_1，P_2，P_3；

（3）建立平面直角坐标系，设 M（0，2），N（2，0），停车位 P（x，y），请写出 y 与 x 之间的关系式，在图中画出停车带，并判断点 P（4，﹣4）是否在停车带上．

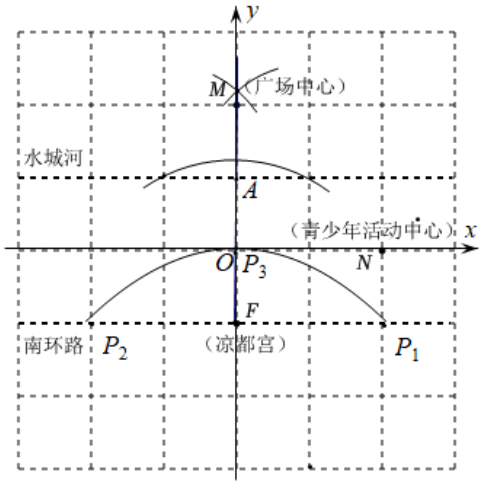


【分析】（1）利用过直线外一点作垂线的方法作图即可；

（2）根据停车位到水城河与到凉都宫点 F 的距离相等，可得点 P_1，P_2，P_3；

（3）根据停车位 P（x，y）到点 F（0，﹣1）和直线 $y=1$ 的距离相等，得 $1-y=\sqrt{x^2+(y+1)^2}$，从而解决问题．

【解答】解：（1）如图，线段 FA 的长即为所求；



（2）如图，点 P_1，P_2，P_3 即为所求；

（3）∵停车位 P（x，y）到点 F（0，﹣1）和直线 $y=1$ 的距离相等，

∴$1-y=\sqrt{x^2+(y+1)^2}$，

化简得 $y=-\frac{1}{4}x^2$，

当 $x=4$ 时，$y=-4$，

∵停车带水城河与南环路之间，

∴点 P（4，﹣4）不用在停车带上.

点评：本题主要考查了作图—应用设计图、尺规作图，坐标与图形的性质，函数关系式等知识，得出 y 与 x 的函数关系式是解题的关键

02 教材方位

尺规作图是中考数学中的一个重要考点，近几年常见的考察方式是已知尺规作图的痕迹，判断是中垂线还是角平分线，然后再根据其对应的性质做题。但是个别题目则会把尺规作图结合其他几何图形出成综合题甚至压轴题，对考生的逻辑思维能力也更强。

本考点是中考五星高频考点，难度较大，个别还会以压轴题出现，在全国多地市的中考试卷中多有考查。

03 技法指引

技法 01：基本尺规作图

①作一条线段等于已知线段，如图 1；

②作一个角等于已知角，如图 2

③作已知角的平分线，如图 3;
④作已知线段的垂直平分线，如图 4 ；
⑤过一点作已知直线的垂线，如图 5;

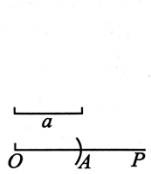


图 1

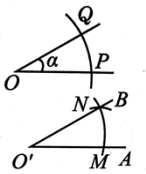


图 2

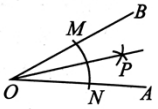


图 3

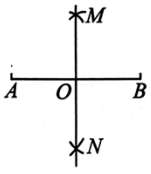


图 4

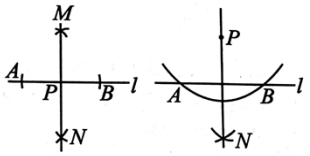


图 5

技法 02：利用尺规作图作三角形

①已知三边作三角形，如图 1

②已知两边及其夹角作三角形，如图 2;

③已知两角及其夹边作三角形，如图 3,

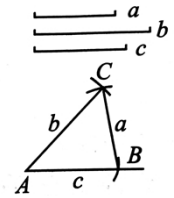


图 1

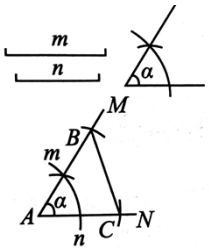


图 2

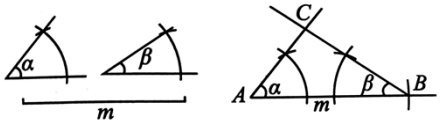
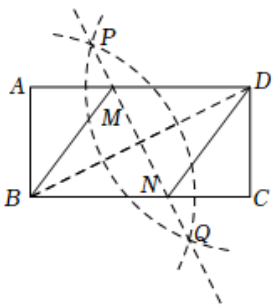


图 3

04 好题演练

【中考真题练】

1.（2022•恩施州）如图，在矩形 $ABCD$ 中，连接 BD，分别以 B、D 为圆心，大于 $\frac{1}{2}BD$ 的长为半径画弧，两弧交于 P、Q 两点，作直线 PQ，分别与 AD、BC 交于点 M、N，连接 BM、DN．若 $AD=4$，$AB=2$．则四边形 $MBND$ 的周长为（　　）



A．$\frac{5}{2}$　　B．5　　C．10　　D．20

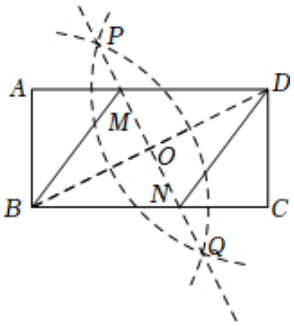
【分析】利用作图过程可得 PQ 为 BD 的垂直平分线，利用垂直平分线的性质和全等三角形的判定与性

质证明四边形 $MBND$ 为菱形，利用勾股定理求得 BM，则结论可得．

【解答】解：由作图过程可得：PQ 为 BD 的垂直平分线，

∴$BM=MD$，$BN=ND$．

设 PQ 与 BD 交于点 O，如图，



则 $BO=DO$．

∵四边形 $ABCD$ 是矩形，

∴$AD/\!/BC$，

∴$\angle MDO=\angle NBO$，$\angle DMO=\angle BNO$，

在△MDO 和△NBO 中，

$$\begin{cases}\angle MDO=\angle NBO\\ \angle DMO=\angle BNO,\\ OD=OB\end{cases}$$

∴△MDO≌△NBO（AAS），

∴$DM=BN$，

∴四边形 $BNDM$ 为平行四边形，

∵$BM=MD$，

∴四边形 $MBND$ 为菱形，

∴四边形 $MBND$ 的周长＝$4BM$．

设 $MB=x$，则 $MD=BM=x$，

∴$AM=AD-DM=4-x$，

在 Rt△ABM 中，

∵$AB^2+AM^2=BM^2$，

∴$2^2+(4-x)^2=x^2$，

解得：$x=\frac{5}{2}$，

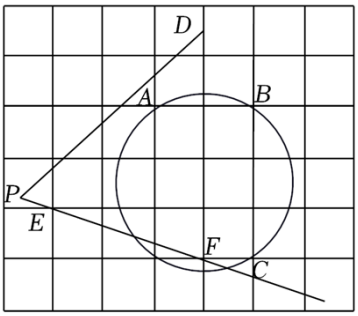
∴四边形 $MBND$ 的周长＝$4BM=10$．

故选：*C*.

2．（2022•天津）如图，在每个小正方形的边长为 1 的网格中，圆上的点 *A*，*B*，*C* 及∠*DPF* 的一边上的点 *E*，*F* 均在格点上．

（Ⅰ）线段 *EF* 的长等于 __$\sqrt{10}$__；

（Ⅱ）若点 *M*，*N* 分别在射线 *PD*，*PF* 上，满足∠*MBN*＝90°且 *BM*＝*BN*．请用无刻度的直尺，在如图所示的网格中，画出点 *M*，*N*，并简要说明点 *M*，*N* 的位置是如何找到的（不要求证明） __连接 *AC*，与网格线交于点 *O*，取格点 *Q*，连接 *EQ* 交 *PD* 于点 *M*，连接 *BM* 交⊙*O* 于点 *G*，连接 *GO*，延长 *GO* 交⊙*O* 于点 *H*，连接 *BH*，延长 *BH* 交 *PF* 于点 *N*，则点 *M*，*N* 即为所求__．



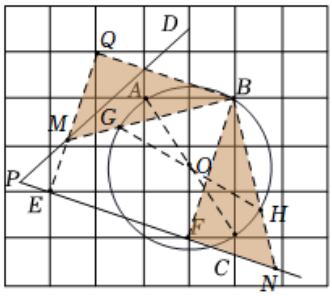
【分析】（Ⅰ）利用勾股定理求解即可；

（Ⅱ）连接 *AC*，与网格线交于点 *O*，取格点 *Q*，连接 *EQ* 交 *PD* 于点 *M*，连接 *BM* 交⊙*O* 于点 *G*，连接 *GO*，延长 *GO* 交⊙*O* 于点 *H*，连接 *BH*，延长 *BH* 交 *PF* 于点 *N*，则点 *M*，*N* 即为所求（证明△*BQM*≌△*BFN*，可得结论）．

【解答】解：（Ⅰ）*EF*＝$\sqrt{1^2+3^2}$＝$\sqrt{10}$．

故答案为：$\sqrt{10}$；

（Ⅱ）如图，点 *M*，*N* 即为所求．



步骤：连接 *AC*，与网格线交于点 *O*，取格点 *Q*，连接 *EQ* 交 *PD* 于点 *M*，连接 *BM* 交⊙*O* 于点 *G*，连接 *GO*，延长 *GO* 交⊙*O* 于点 *H*，连接 *BH*，延长 *BH* 交 *PF* 于点 *N*，则点 *M*，*N* 即为所求．

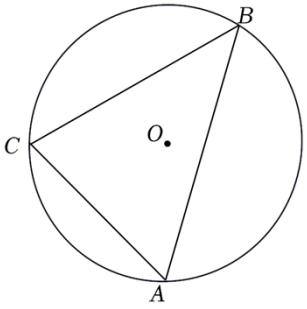
故答案为：连接 *AC*，与网格线交于点 *O*，取格点 *Q*，连接 *EQ* 交 *PD* 于点 *M*，连接 *BM* 交⊙*O* 于点 *G*，

连接 GO，延长 GO 交⊙O 于点 H，连接 BH，延长 BH 交 PF 于点 N，则点 M，N 即为所求

3．（2022•烟台）如图，⊙O 是△ABC 的外接圆，$\angle ABC=45°$．

（1）请用尺规作出⊙O 的切线 AD（保留作图痕迹，不写作法）；

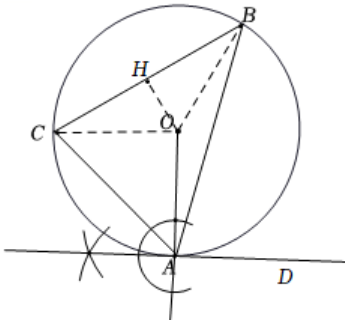
（2）在（1）的条件下，若 AB 与切线 AD 所夹的锐角为 75°，⊙O 的半径为 2，求 BC 的长．



【分析】（1）过点 A 作 $AD\perp AO$ 即可；

（2）连接 OB，OC．证明 $\angle ACB=75°$，利用三角形内角和定理求出 $\angle CAB$，推出 $\angle BOC=120°$，求出 CH 可得结论．

【解答】解：（1）如图，切线 AD 即为所求；



（2）过点 O 作 $OH\perp BC$ 于 H，连接 OB，OC．

∵AD 是切线，

∴$OA\perp AD$，

∴$\angle OAD=90°$，

∵$\angle DAB=75°$，

∴$\angle OAB=15°$，

∵$OA=OB$，

∴$\angle OAB=\angle OBA=15°$，

∴$\angle BOA=150°$，

∴$\angle BCA=\frac{1}{2}\angle AOB=75°$，

∵$\angle ABC=45°$，

∴∠BAC=180°﹣45°﹣75°=60°，

∴∠BOC=2∠BAC=120°，

∵OB=OC=2，

∴∠BCO=∠CBO=30°，

∵OH⊥BC，

∴CH=BH=OC•cos30°=$\sqrt{3}$，

∴BC=2$\sqrt{3}$.

4．（2022•湖北）已知四边形 $ABCD$ 为矩形，点 E 是边 AD 的中点，请仅用无刻度的直尺完成下列作图，不写作法，保留作图痕迹．

（1）在图 1 中作出矩形 $ABCD$ 的对称轴 m，使 m∥AB；

（2）在图 2 中作出矩形 $ABCD$ 的对称轴 n，使 n∥AD.

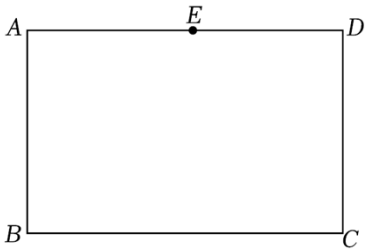


图1

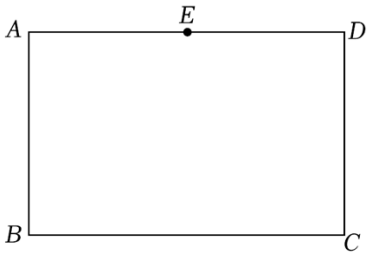


图2

【分析】（1）如图 1 中，连接 AC，BD 交于点 O，作直线 OE 即可；

（2）如图 2 中，同法作出点 O，连接 BE 交 AC 于点 T，连接 DT，延长 TD 交 AB 于点 R，作直线 OR 即可．

【解答】解：（1）如图 1 中，直线 m 即为所求；

（2）如图 2 中，直线 n 即为所求；

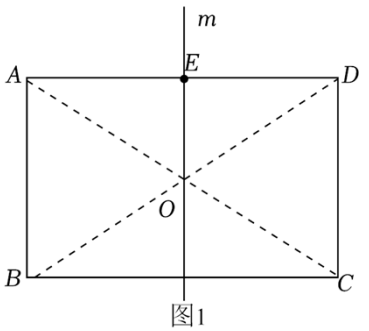


图1

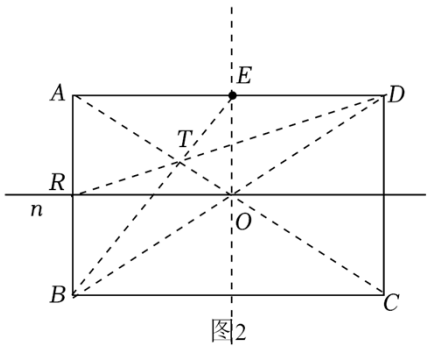


图2

5．（2022•无锡）“黄金分割”给人以美感，它在建筑、艺术等领域有着广泛的应用．如图 1，点 B 把线段

AC 分成两部分，如果$\frac{BC}{AB}=\frac{AB}{AC}$，那么称线段 AC 被点 B 黄金分割，点 B 为线段 AC 的黄金分割点．AB 与 AC 的比称为黄金比，它们的比值为$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$．请在图 2 中完成相应的问题：

已知，$\angle MON=60°$，点 A 在 OM 边上，$OA=4$．

（1）请在 ON 边上用无刻度的直尺和圆规作出点 B，使得 OB 与 OA 的比为黄金比；（不写作法，保留作图痕迹）

（2）$\triangle AOB$ 的面积＝__ $2\sqrt{15}-2\sqrt{3}$ __．

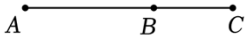


图1

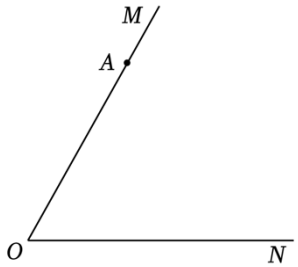


图2

【分析】（1）先作线段 OA 的垂直线平分线，交线段 OA 于点 C，再过点 A 作 OA 的垂线 AD，以点 A 为圆心，AC 的长为半径画弧，交射线 AD 于点 E，连接 OE，然后以点 E 为圆心，AE 的长为半径画弧，交线段 OE 于点 F，最后以点 O 为圆心，OF 的长为半径画弧，交射线 ON 于点 B，此时点 B 即为所求．

（2）过点 A 作 $AG\perp OB$ 于点 G，在 Rt$\triangle AOG$ 中，可得 $AG=OA\cdot\sin 60°=4\times\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$，再利用三角形面积公式可得答案．

【解答】解：（1）由题意得，$\frac{OB}{OA}=\frac{OB}{4}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，

可得 $OB=2\sqrt{5}-2$，

先作线段 OA 的垂直线平分线，交线段 OA 于点 C，再过点 A 作 OA 的垂线 AD，

以点 A 为圆心，AC 的长为半径画弧，交射线 AD 于点 E，连接 OE，

可得 $AE=2$，则 $OE=2\sqrt{5}$，

然后以点 E 为圆心，AE 的长为半径画弧，交线段 OE 于点 F，

最后以点 O 为圆心，OF 的长为半径画弧，交射线 ON 于点 B，

此时 $OB=2\sqrt{5}-2$．

如图 2，点 B 即为所求．

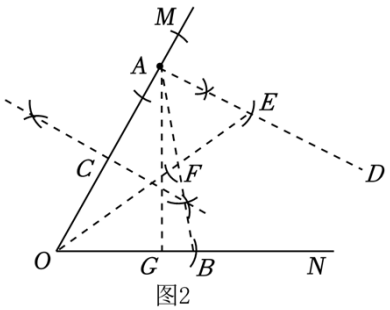


图2

（2）过点 A 作 $AG\perp OB$ 于点 G，

在 Rt△AOG 中，$AG=OA\cdot\sin60^\circ=4\times\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$，

∴△AOB 的面积为 $\frac{1}{2}OB\cdot AG=\frac{1}{2}\times(2\sqrt{5}-2)\times2\sqrt{3}=2\sqrt{15}-2\sqrt{3}$.

故答案为：$2\sqrt{15}-2\sqrt{3}$.

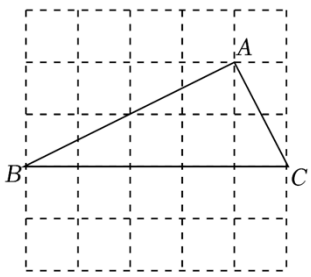
6.（2022•长春）图①、图②、图③均是 5×5 的正方形网格，每个小正方形的边长均为 1，其顶点称为格点，△ABC 的顶点均在格点上．只用无刻度的直尺，在给定的网格中，按下列要求作图，保留作图痕迹．

（1）网格中△ABC 的形状是 <u>直角三角形</u>；

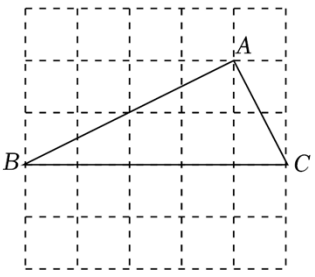
（2）在图①中确定一点 D，连结 DB、DC，使△DBC 与△ABC 全等；

（3）在图②中△ABC 的边 BC 上确定一点 E，连结 AE，使△ABE∽△CBA；

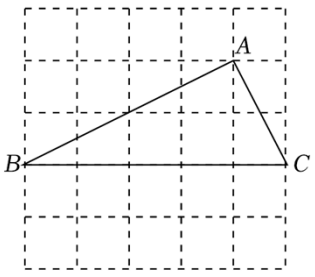
（4）在图③中△ABC 的边 AB 上确定一点 P，在边 BC 上确定一点 Q，连结 PQ，使△PBQ∽△ABC，且相似比为 1：2．



图①



图②



图③

【分析】（1）利用勾股定理的逆定理证明即可；

（2）根据全等三角形的判定，作出图形即可；

（3）根据相似三角形的判定作出图形即可；

（4）作出 AB，BC 的中点 P，Q 即可．

【解答】解：（1）∵$AC=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$，$AB=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$，$BC=5$，

∴$AC^2+AB^2=BC^2$，

∴$\angle BAC=90°$，

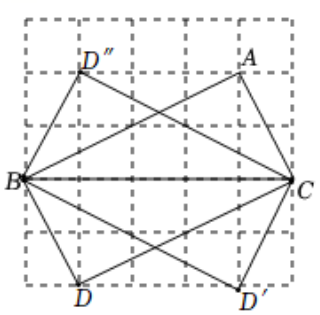
∴$\triangle ABC$ 是直角三角形；

故答案为：直角三角形；

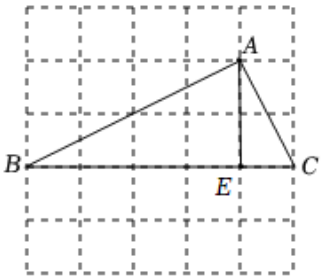
（2）如图①中，点 D，点 D'，点 D'' 即为所求；

（3）如图②中，点 E 即为所求；

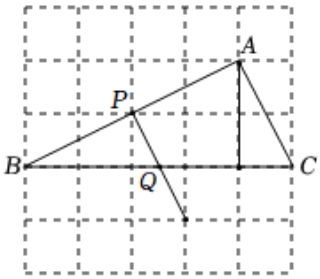
（4）如图③，点 P，点 Q 即为所求．



图①



图②



图③

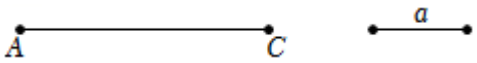
7．（2022•淮安）如图，已知线段 AC 和线段 a．

（1）用直尺和圆规按下列要求作图．（请保留作图痕迹，并标明相应的字母，不写作法）

①作线段 AC 的垂直平分线 l，交线段 AC 于点 O；

②以线段 AC 为对角线，作矩形 $ABCD$，使得 $AB=a$，并且点 B 在线段 AC 的上方．

（2）当 $AC=4$，$a=2$ 时，求（1）中所作矩形 $ABCD$ 的面积．

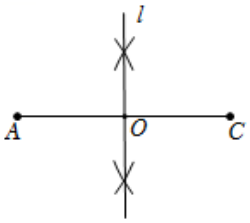


【分析】（1）①按照线段垂直平分线的作图步骤作图即可．

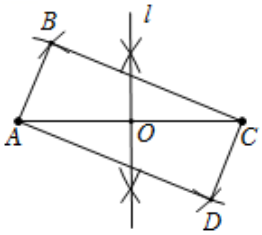
②以点 O 为圆心，OA 的长为半径画弧，再以点 A 为圆心，线段 a 的长为半径画弧，两弧在线段 AC 上方交于点 B，同理，以点 O 为圆心，OC 的长为半径画弧，再以点 C 为圆心，线段 a 的长为半径画弧，两弧在线段 AC 下方交于点 D，连接 AD，CD，AB，BC，即可得矩形 $ABCD$．

（2）利用勾股定理求出 BC，再利用矩形的面积公式求解即可．

【解答】解：（1）①如图，直线 l 即为所求．



②如图，矩形 $ABCD$ 即为所求．



（2）∵四边形 $ABCD$ 为矩形，

∴$\angle ABC=90°$，

∵$a=2$，

∴$AB=CD=2$，

∴$BC=AD=\sqrt{AC^2-AB^2}=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}$，

∴矩形 $ABCD$ 的面积为 $AB\cdot BC=2\times 2\sqrt{3}=4\sqrt{3}$．

8．（2022•牡丹江）在菱形 $ABCD$ 中，对角线 AC 和 BD 的长分别是 6 和 8，以 AD 为直角边向菱形外作等腰直角三角形 ADE，连接 CE．请用尺规或三角板作出图形，并直接写出线段 CE 的长．

【分析】分两种情况，即等腰直角三角形 ADE 的直角顶点为点 A 或点 D 两种情况，分别画出相应的图形，通过作垂线，构造直角三角形，利用勾股定理求出答案即可．

【解答】解：利用三角板可作图 1，图 2；

（1）如图 1，过点 E 作 AC 的垂线，交 CA 的延长线于点 F，

∵四边形 $ABCD$ 是菱形，

∴$AC\perp BD$，$OA=OC=\frac{1}{2}AC=3$，$OB=OD=\frac{1}{2}BD=4$，

∴$AB=\sqrt{3^2+4^2}=5=BC=CD=AD$，

∵$\triangle ADE$ 是等腰直角三角形，

∴$\angle DAE=90°$，$AE=AD$，

∴$\angle OAD+\angle FAE=180°-90°=90°$，

又∵$\angle FAE+\angle FEA=90°$，

∴$\angle OAD=\angle FEA$，

在△*AOD* 和△*EFA* 中，

$$\begin{cases}\angle OAD=\angle FEA\\ \angle AOD=\angle EFA=90^\circ\\ AD=EA\end{cases}$$

∴△*AOD*≌△*EFA*（*AAS*），

∴*AF*＝*DO*＝4，*EF*＝*AO*＝3，

在 Rt△*CEF* 中，*CF*＝4+6＝10，*EF*＝3，

∴$EC=\sqrt{CF^2+EF^2}=\sqrt{109}$；

（2）如图 2，过点 *E* 作 *BD* 的垂线，交 *BD* 的延长线于点 *F*，过点 *C* 作 *EF* 的垂线交 *EF* 的延长线于点 *G*，

∵四边形 *ABCD* 是菱形，

∴*AC*⊥*BD*，即∠*COD*＝90°，

∵*EF*⊥*BD*，

∴∠*OFG*＝90°，

又∵*CG*⊥*EG*，

∴∠*G*＝90°，

∴四边形 *OCGF* 是矩形，

由（1）的方法可证，△*AOD*≌△*DFE*（*AAS*），

∴*DF*＝*AO*＝3，*EF*＝*DO*＝4，

∴*OF*＝*OD*+*DF*＝4+3＝7＝*CG*，

在 Rt△*ECG* 中，*CG*＝7，*EG*＝*EF*+*FG*＝4+3＝7，

∴$EC=\sqrt{CG^2+EG^2}=\sqrt{7^2+7^2}=7\sqrt{2}$；

综上所述，$EC=\sqrt{109}$或 $EC=7\sqrt{2}$.

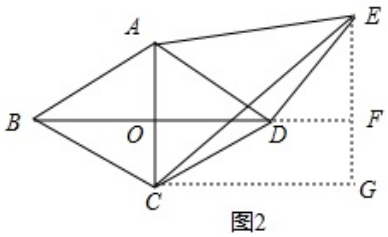


图2

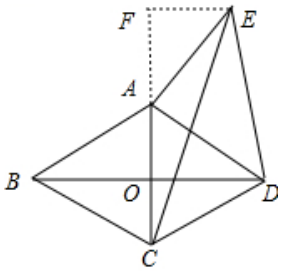
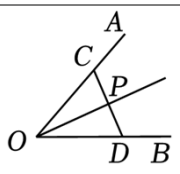
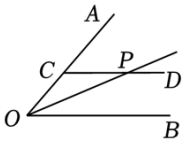
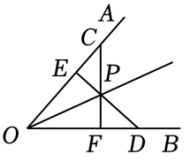
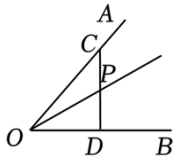


图1

【中考模拟练】

1．（2023•衡水模拟）某数学兴趣小组的同学尝试只用一副带刻度的三角板作∠*AOB* 的角平分线，有如下四位同学的作法，其中无法判断 *OP* 是角平分线的是（　　）

甲： *OC*＝*OD*，*P* 为 *CD* 的中点	乙： *CD*∥*OB*，*OC*＝*CP*	丙： *OC*＝*OD*，*OE*＝*OF*	丁： *CD*⊥*OB*，*P* 为 *CD* 的中点

A．甲　　B．乙　　C．丙　　D．丁

【分析】利用“三线合一”可对甲同学的作法进行判断；根据平行线的性质和等腰三角形的性质证明∠*COP*＝∠*BOP*，从而可对乙同学的作法进行判断；先证明△*COF*≌△*DOE* 得到∠*OCF*＝∠*ODE*，再证明△*PCE*≌△*PDF* 得到 *PE*＝*PF*，然后证明△*OPE*≌△*OPF* 得到∠*COP*＝∠*DOP*，从而可对丙同学的作法进行判断；过 *P* 点作 *PH*⊥*OA* 于 *H* 点，如图，利用垂线段最短得到 *PC*＝*PD*＞*PH*，根据角平分线的性质可对丁同学的作法进行判断．

【解答】解：∵*OC*＝*OD*，*OP* 平分 *CD*，

∴*OP* 平分∠*COD*，所以甲同学的作法可判断 *OP* 是角平分线；

∵*CD*∥*OB*，

∴∠*CPO*＝∠*BOP*，

∵*OC*＝*CP*，

∴∠*COP*＝∠*CPO*，

∴∠*COP*＝∠*BOP*，

∴*OP* 平分∠*COB*，所以乙同学的作法可判断 *OP* 是角平分线；

∵*OC*＝*OD*，∠*COF*＝∠*DOE*，*OF*＝*OE*，

∴△*COF*≌△*DOE*（*SAS*），

∴∠*OCF*＝∠*ODE*，

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：https://d.book118.com/598071034111006112