

2024 年高考数学模拟试卷

考生须知：

1. 全卷分选择题和非选择题两部分，全部在答题纸上作答。选择题必须用 2B 铅笔填涂；非选择题的答案必须用黑色字迹的钢笔或答字笔写在“答题纸”相应位置上。
2. 请用黑色字迹的钢笔或答字笔在“答题纸”上先填写姓名和准考证号。
3. 保持卡面清洁，不要折叠，不要弄破、弄皱，在草稿纸、试题卷上答题无效。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知函数 $f(x)$ 满足当 $x \leq 0$ 时， $2f(x-2) = f(x)$ ，且当 $x \in (-2, 0]$ 时， $f(x) = |x+1| - 1$ ；当 $x > 0$ 时，

$f(x) = \log_a x (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1)$ 。若函数 $f(x)$ 的图象上关于原点对称的点恰好有 3 对，则 a 的取值范围是 ()

- A. $(625, +\infty)$ B. $(4, 64)$ C. $(9, 625)$ D. $(9, 64)$

2. 已知非零向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 满足 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ ， $|\vec{a}| = 3$ ，且 $\vec{a}$ 与 $\vec{a} + \vec{b}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{4}$ ，则 $|\vec{b}| =$ ()

- A. 6 B. $3\sqrt{2}$ C. $2\sqrt{2}$ D. 3

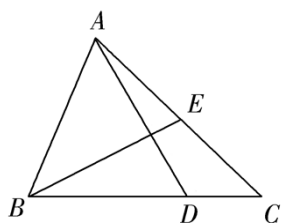
3. 设 $e \approx 2.71828 \dots$ 为自然对数的底数，函数 $f(x) = e^x - e^{-x} - 1$ ，若 $f(a) = 1$ ，则 $f(-a) =$ ()

- A. -1 B. 1 C. 3 D. -3

4. 已知焦点为 F 的抛物线 $C: y^2 = 4x$ 的准线与 x 轴交于点 A ，点 M 在抛物线 C 上，则当 $\frac{|MA|}{|MF|}$ 取得最大值时，直线 MA 的方程为 ()

- A. $y = x + 1$ 或 $y = -x - 1$ B. $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ 或 $y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ C. $y = 2x + 2$ 或 $y = -2x - 2$
D. $y = -2x + 2$

5. 已知 $\triangle ABC$ 中， $AB = 2, BC = 3, \angle ABC = 60^\circ, BD = 2DC, AE = EC$ ，则 $\vec{AD} \cdot \vec{BE} =$ ()



- A. 1 B. -2 C. $\frac{1}{2}$ D. $-\frac{1}{2}$

6. 赵爽是我国古代数学家、天文学家，大约公元 222 年，赵爽为《周髀算经》一书作序时，介绍了“勾股圆方图”，又称“赵爽弦图”（以弦为边长得到的正方形是由 4 个全等的直角三角形再加上中间的一个小正方形组成的，如图（1）），类比“赵爽弦图”，可类似地构造如图（2）所示的图形，它是由 6

个全等的三角形与中间的一个小正六边形组成的一个大正六边形，设 $A'F' = 2F'A$ ，若在大正六边形中随机取一点，则此点取自小正六边形的概率为（ ）

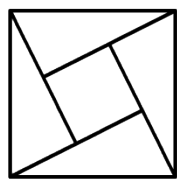


图1

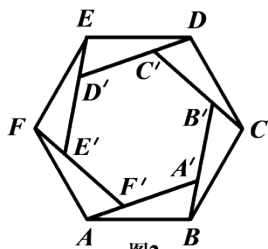


图2

A. $\frac{2\sqrt{13}}{13}$

B. $\frac{4}{13}$

C. $\frac{2\sqrt{7}}{7}$

D. $\frac{4}{7}$

7. 已知 $a = \ln 3, b = \log_3 e, c = \log_\pi e$ ，则下列关系正确的是（ ）

A. $c < b < a$

B. $a < b < c$

C. $b < a < c$

D. $b < c < a$

8. 已知复数 z 满足 $(z-i)(-i)=5$ ，则 $z =$ （ ）

A. $6i$

B. $-6i$

C. -6

D. 6

9. 已知函数 $f(x) = \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{6}\right) + \cos \omega x$ ($\omega > 0$) 在 $[0, \pi]$ 上的值域为 $\left[\frac{3}{2}, \sqrt{3}\right]$ ，则实数 ω 的取值范围为（ ）

A. $\left[\frac{1}{6}, \frac{1}{3}\right]$

B. $\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$

C. $\left[\frac{1}{6}, +\infty\right)$

D. $\left[\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right]$

10. 已知 M 是函数 $f(x) = \ln x$ 图象上的一点，过 M 作圆 $x^2 + y^2 - 2y = 0$ 的两条切线，切点分别为 A, B ，则 $\vec{MA} \cdot \vec{MB}$ 的最小值为（ ）

A. $2\sqrt{2} - 3$

B. -1

C. 0

D. $\frac{5\sqrt{2}}{2} - 3$

11. 函数 $f(x) = 2x^3 - ax^2 + 1$ 在 $(0, +\infty)$ 内有且只有一个零点，则 a 的值为（ ）

A. 3

B. -3

C. 2

D. -2

12. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 中， $a_4 + a_6 = 8$ 则 $a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 =$ （ ）

A. 10

B. 16

C. 20

D. 24

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 在 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 的对边分别是 a, b, c ，若 $\sqrt{3} \sin A - \cos A = 1$ ， $a = 2$ ，则 $\triangle ABC$ 的面积的最大值为_____.

14. 从分别写有 1, 2, 3, 4 的 4 张卡片中随机抽取 1 张，放回后再随机抽取 1 张，则抽得的第一张卡片上的数不小于

第二张卡片上的数的概率为_____.

15. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c ,

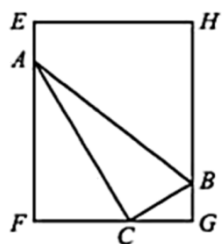
若 $2\cos A(b\cos C + c\cos B) = a = \sqrt{13}$, $\triangle ABC$ 的面积为 $3\sqrt{3}$,

则 $A = \underline{\hspace{2cm}}$, $b + c = \underline{\hspace{2cm}}$.

16. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边长分别为 a, b, c , 已知 $a^2 - c^2 = 2b$, 且 $\sin A \cos C = 3 \cos A \sin C$, 则 $b = \underline{\hspace{2cm}}$.

三、解答题: 共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 如图, $EFGH$ 是矩形, $\triangle ABC$ 的顶点 C 在边 FG 上, 点 A, B 分别是 EF, GH 上的动点 (EF 的长度满足需求). 设 $\angle BAC = \alpha$, $\angle ABC = \beta$, $\angle ACB = \gamma$, 且满足 $\sin \alpha + \sin \beta = \sin \gamma(\cos \alpha + \cos \beta)$.



(1) 求 γ ;

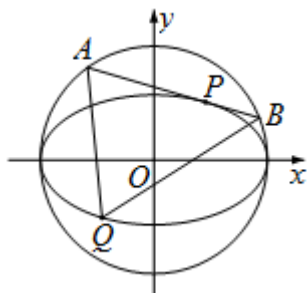
(2) 若 $FC = 5$, $CG = 3$, 求 $\frac{5}{AC} + \frac{3}{BC}$ 的最大值.

18. (12 分) 已知抛物线 $C_1: x^2 = 2py (p > 0)$ 和圆 $C_2: (x+1)^2 + y^2 = 2$, 倾斜角为 45° 的直线 l_1 过抛物线 C_1 的焦点, 且 l_1 与圆 C_2 相切.

(1) 求 p 的值;

(2) 动点 M 在抛物线 C_1 的准线上, 动点 A 在 C_1 上, 若 C_1 在 A 点处的切线 l_2 交 y 轴于点 B , 设 $\vec{MN} = \vec{MA} + \vec{MB}$. 求证点 N 在定直线上, 并求该定直线的方程.

19. (12 分) 已知直线 $l: y = kx + m$ 与椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 恰有一个公共点 P , l 与圆 $x^2 + y^2 = a^2$ 相交于 A, B 两点.



(I) 求 k 与 m 的关系式;

(II) 点 Q 与点 P 关于坐标原点 O 对称. 若当 $k = -\frac{1}{2}$ 时, ΔQAB 的面积取到最大值 a^2 , 求椭圆的离心率.

20. (12 分) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 过点 $(1, \frac{3}{2})$ 且椭圆的左、右焦点与短轴的端点构成的四边形的面积为 $2\sqrt{3}$.

(1) 求椭圆 C 的标准方程;

(2) 设 A 是椭圆的左顶点, 过右焦点 F 的直线 l_1 , 与椭圆交于 P, Q , 直线 AP, AQ 与直线 $l_2: x=4$ 交于 M, N , 线段 MN 的中点为 E .

①求证: $EF \perp PQ$;

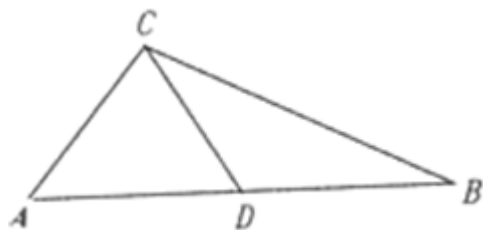
②记 $\Delta VPQE, \Delta PME, \Delta VONE$ 的面积分别为 S_1, S_2, S_3 , 求证: $\frac{S_1}{S_2 + S_3}$ 为定值.

21. (12 分) 已知等差数列 $\{a_n\}$ 和等比数列 $\{b_n\}$ 满足: $a_1 = b_1 = 1, b_n \in \mathbb{N}^*, a_2 + a_4 + a_9 = 3b_3, 3a_{b_3} = b_5 - 30$.

(I) 求数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(II) 求数列 $\left\{\frac{n^2}{a_n \cdot a_{n+1}}\right\}$ 的前 n 项和 S_n .

22. (10 分) 如图: 在 ΔABC 中, $a = \sqrt{10}, c = 4, \cos C = -\frac{\sqrt{5}}{5}$.



(1) 求角 A ;

(2) 设 D 为 AB 的中点, 求中线 CD 的长.

参考答案

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1、C

【解析】

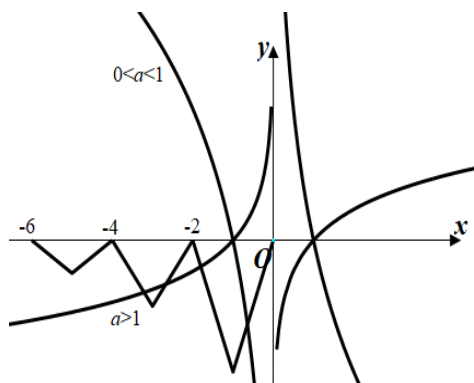
先作出函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0]$ 上的部分图象，再作出 $f(x) = \log_a x$ 关于原点对称的图象，分类利用图像列出有 3 个交点时满足的条件，解之即可。

【详解】

先作出函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0]$ 上的部分图象，再作出 $f(x) = \log_a x$ 关于原点对称的图象，

如图所示，当 $0 < a < 1$ 时，对称后的图象不可能与 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0]$ 的图象有 3 个交点；

当 $a > 1$ 时，要使函数 $f(x)$ 关于原点对称后的图象与所作的图象有 3 个交点，



$$\text{则} \begin{cases} a > 1 \\ -\log_a 3 > -\frac{1}{2} \\ -\log_a 5 < -\frac{1}{4} \end{cases}, \text{解得 } 9 < a < 625.$$

故选：C.

【点睛】

本题考查利用函数图象解决函数的交点个数问题，考查学生数形结合的思想、转化与化归的思想，是一道中档题.

2、D

【解析】

利用向量的加法的平行四边形法则，判断四边形的形状，推出结果即可。

【详解】

解：非零向量 $\vec{a}$ ， $\vec{b}$ 满足 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ ，可知两个向量垂直， $|\vec{a}| = 3$ ，且 $\vec{a}$ 与 $\vec{a} + \vec{b}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{4}$ ，

说明以向量 $\vec{a}$ ， $\vec{b}$ 为邻边， $\vec{a} + \vec{b}$ 为对角线的平行四边形是正方形，所以则 $|\vec{b}| = 3$ 。

故选：D.

【点睛】

本题考查向量的几何意义，向量加法的平行四边形法则的应用，考查分析问题解决问题的能力，属于基础题.

3、D

【解析】

利用 $f(a)$ 与 $f(-a)$ 的关系，求得 $f(-a)$ 的值.

【详解】

依题意 $f(a) = e^a - e^{-a} - 1 = 1, e^a - e^{-a} = 2,$

所以 $f(-a) = e^{-a} - e^a - 1 = -(e^a - e^{-a}) - 1 = -2 - 1 = -3$

故选：D

【点睛】

本小题主要考查函数值的计算，属于基础题.

4、A

【解析】

过 M 作 MP 与准线垂直，垂足为 P ，利用抛物线的定义可得 $\left| \frac{MA}{MF} \right| = \left| \frac{MA}{MP} \right| = \frac{1}{\cos \angle AMP} = \frac{1}{\cos \angle MAF}$ ，要使 $\left| \frac{MA}{MF} \right|$

最大，则 $\angle MAF$ 应最大，此时 AM 与抛物线 C 相切，再用判别式或导数计算即可.

【详解】

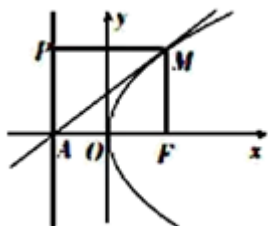
过 M 作 MP 与准线垂直，垂足为 P ， $\left| \frac{MA}{MF} \right| = \left| \frac{MA}{MP} \right| = \frac{1}{\cos \angle AMP} = \frac{1}{\cos \angle MAF}$ ，

则当 $\left| \frac{MA}{MF} \right|$ 取得最大值时， $\angle MAF$ 最大，此时 AM 与抛物线 C 相切，

易知此时直线 AM 的斜率存在，设切线方程为 $y = k(x+1)$ ，

则 $\begin{cases} y = k(x+1) \\ y^2 = 4x \end{cases}$. 则 $\Delta = 16 - 16k^2 = 0, k^2 = 1, k = \pm 1$ ，

则直线 AM 的方程为 $y = \pm (x+1)$.



故选：A.

【点睛】

本题考查直线与抛物线的位置关系，涉及到抛物线的定义，考查学生转化与化归的思想，是一道中档题.

5、C

【解析】

以 $\vec{BA}, \vec{BC}$ 为基底，将 $\vec{AD}, \vec{BE}$ 用基底表示，根据向量数量积的运算律，即可求解.

【详解】

$$\vec{BD} = 2\vec{DC}, \vec{BD} = \frac{2}{3}\vec{BC}, \vec{AD} = \vec{BD} - \vec{BA} = \frac{2}{3}\vec{BC} - \vec{BA},$$

$$\vec{AE} = \vec{EC}, \therefore \vec{BE} = \frac{1}{2}\vec{BC} + \frac{1}{2}\vec{BA},$$

$$\vec{AD} \cdot \vec{BE} = \left(\frac{2}{3}\vec{BC} - \vec{BA}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\vec{BC} + \frac{1}{2}\vec{BA}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\vec{BC}^2 - \frac{1}{6}\vec{BC} \cdot \vec{BA} - \frac{1}{2}\vec{BA}^2$$

$$= 1 - \frac{1}{6} \times 2 \times 3 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

故选:C.

【点睛】

本题考查向量的线性运算以及向量的基本定理，考查向量数量积运算，属于中档题.

6、D

【解析】

设 $AF' = a$ ，则 $A'F' = 2a$ ，小正六边形的边长为 $A'F' = 2a$ ，利用余弦定理可得大正六边形的边长为 $AB = \sqrt{7}a$ ，再利用面积之比可得结论.

【详解】

由题意，设 $AF' = a$ ，则 $A'F' = 2a$ ，即小正六边形的边长为 $A'F' = 2a$ ，

所以， $FF' = 3a$ ， $\angle AF'F = \frac{\pi}{3}$ ，在 $\triangle AF'F$ 中，

由余弦定理得 $AF^2 = AF'^2 + FF'^2 - 2AF' \cdot FF' \cdot \cos \angle AF'F$ ，

即 $AF^2 = a^2 + (3a)^2 - 2a \cdot 3a \cdot \cos \frac{\pi}{3}$ ，解得 $AF = \sqrt{7}a$ ，

所以，大正六边形的边长为 $AF = \sqrt{7}a$ ，

所以，小正六边形的面积为 $S_1 = \frac{1}{2} \times 2a \times 2a \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2 + 2a \times 2\sqrt{3}a = 6\sqrt{3}a^2$ ，

大正六边形的面积为 $S_2 = \frac{1}{2} \times \sqrt{7}a \times \sqrt{7}a \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2 + \sqrt{7}a \times \sqrt{21}a = \frac{21\sqrt{3}}{2}a^2$,

所以, 此点取自小正六边形的概率 $P = \frac{S_1}{S_2} = \frac{4}{7}$.

故选: D.

【点睛】

本题考查概率的求法, 考查余弦定理、几何概型等基础知识, 考查运算求解能力, 属于基础题.

7、A

【解析】

首先判断 a, b, c 和 1 的大小关系, 再由换底公式和对数函数 $y = \ln x$ 的单调性判断 b, c 的大小即可.

【详解】

因为 $a = \ln 3 > \ln e > 1$, $b = \log_3 e = \frac{1}{\ln 3}$, $c = \log_\pi e = \frac{1}{\ln \pi}$, $1 < \ln 3 < \ln \pi$, 所以 $c < b < 1$, 综上可得 $c < b < a$.

故选: A

【点睛】

本题考查了换底公式和对数函数的单调性, 考查了推理能力与计算能力, 属于基础题.

8、A

【解析】

由复数的运算法则计算.

【详解】

因为 $(z-i)(-i) = 5$, 所以 $z = \frac{5}{-i} + i = 6i$

故选: A.

【点睛】

本题考查复数的运算. 属于简单题.

9、A

【解析】

将 $f(x)$ 整理为 $\sqrt{3}\sin\left(\omega x + \frac{\pi}{3}\right)$, 根据 x 的范围可求得 $\omega x + \frac{\pi}{3} \in \left[\frac{\pi}{3}, \pi\omega + \frac{\pi}{3}\right]$; 根据 $f(0) = \frac{3}{2}$, 结合 $f(x)$ 的值域和 $\sin x$ 的图象, 可知

$\frac{\pi}{2} \leq \pi\omega + \frac{\pi}{3} \leq \frac{2\pi}{3}$, 解不等式求得结果.

【详解】

$$f(x) = \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{6}\right) + \cos \omega x = \sin \omega x \cos \frac{\pi}{6} + \cos \omega x \sin \frac{\pi}{6} + \cos \omega x = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \omega x + \frac{3}{2} \cos \omega x = \sqrt{3} \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{3}\right)$$

当 $x \in [0, \pi]$ 时, $\omega x + \frac{\pi}{3} \in \left[\frac{\pi}{3}, \pi\omega + \frac{\pi}{3}\right]$

$$\text{又 } f(0) = \sqrt{3}\sin\frac{\pi}{3} = \frac{3}{2}, \quad \sqrt{3}\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{3}{2}, \quad \sqrt{3}\sin\frac{\pi}{2} = \sqrt{3}$$

由 $f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上的值域为 $\left[\frac{3}{2}, \sqrt{3}\right]$ $\therefore \frac{\pi}{2} \leq \pi\omega + \frac{\pi}{3} \leq \frac{2\pi}{3}$

解得: $\omega \in \left[\frac{1}{6}, \frac{1}{3}\right]$

本题正确选项: A

【点睛】

本题考查利用正弦型函数的值域求解参数范围的问题, 关键是能够结合正弦型函数的图象求得角的范围的上下限, 从而得到关于参数的不等式.

10、C

【解析】

先画出函数图像和圆, 可知 $|MA| = |MB|$, 若设 $\angle AMB = 2\theta$, 则 $|\overrightarrow{MA}| = |\overrightarrow{MB}| = \frac{1}{\tan \theta}$, 所以

$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = |\overrightarrow{MA}|^2 \cos 2\theta = 2\sin^2 \theta + \frac{1}{\sin^2 \theta} - 3$, 而要求 $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$ 的最小值, 只要 $\sin \theta$ 取得最大值, 若设圆

$x^2 + y^2 - 2y = 0$ 的圆心为 C , 则 $\sin \theta = \frac{1}{|MC|}$, 所以只要 $|MC|$ 取得最小值, 若设 $M(x, \ln x)$, 则

$|MC|^2 = x^2 + (\ln x - 1)^2$, 然后构造函数 $g(x) = x^2 + (\ln x - 1)^2$, 利用导数求其最小值即可.

【详解】

记圆 $x^2 + y^2 - 2y = 0$ 的圆心为 C , 设 $\angle AMC = \theta$, 则 $|\overrightarrow{MA}| = |\overrightarrow{MB}| = \frac{1}{\tan \theta}$, $\sin \theta = \frac{1}{|MC|}$, 设

$M(x, \ln x)$, $|MC|^2 = x^2 + (\ln x - 1)^2$, 记 $g(x) = x^2 + (\ln x - 1)^2$, 则

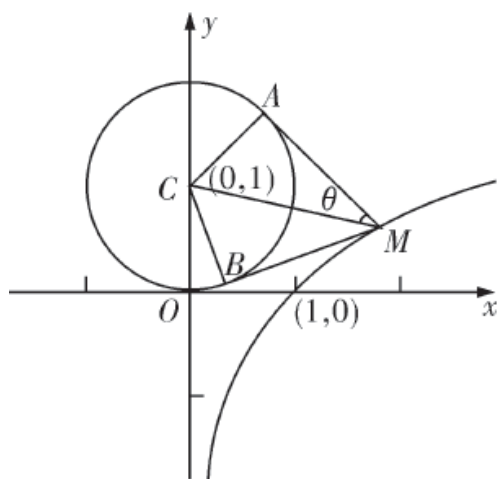
$$g'(x) = 2x + 2(\ln x - 1) \cdot \frac{1}{x} = \frac{2}{x}(x^2 + \ln x - 1), \text{ 令 } h(x) = x^2 + \ln x - 1,$$

因为 $h(x) = x^2 + \ln x - 1$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 且 $h(1) = 0$, 所以当 $0 < x < 1$ 时, $h(x) < h(1) = 0$, $g'(x) < 0$; 当 $x > 1$

时, $h(x) > h(1) = 0$, $g'(x) > 0$, 则 $g(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $g(x)_{\min} = g(1) = 2$, 即

$|MC| \geq \sqrt{2}$, $0 < \sin \theta \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$, 所以 $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = |\overrightarrow{MA}|^2 \cos 2\theta = 2\sin^2 \theta + \frac{1}{\sin^2 \theta} - 3 \geq 0$ (当 $\sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时等号成立).

故选: C



【点睛】

此题考查的是两个向量的数量积的最小值，利用了导数求解，考查了转化思想和运算能力，属于难题.

11、 A

【解析】

求出 $f'(x) = 6x^2 - 2ax$ ，对 a 分类讨论，求出 $(0, +\infty)$ 单调区间和极值点，结合三次函数的图像特征，即可求解.

【详解】

$$f'(x) = 6x^2 - 2ax = 6x(x - \frac{a}{3}),$$

若 $a \leq 0$ ， $x \in (0, +\infty)$, $f'(x) > 0$ ，

$f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递增，且 $f(0) = 1 > 0$ ，

$f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 不存在零点；

若 $a > 0$ ， $x \in (0, \frac{a}{3})$, $f'(x) < 0$, $x \in (\frac{a}{3}, +\infty)$, $f'(x) > 0$ ，

$f(x) = 2x^3 - ax^2 + 1$ 在 $(0, +\infty)$ 内有且只有一个零点，

$$f(\frac{a}{3}) = -\frac{1}{27}a^3 + 1 = 0, \therefore a = 3.$$

故选:A.

【点睛】

本题考查函数的零点、导数的应用，考查分类讨论思想，熟练掌握函数图像和性质是解题的关键，属于中档题.

12、 C

【解析】

根据等差数列性质得到 $a_4 + a_6 = 8 = 2a_5$ ，再计算得到答案.

【详解】

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/598074040006007007>