第 19 讲 探索三角形相似的条件

模块导航

模块一　思维导图串知识

模块二　基础知识全梳理（吃透教材）

模块三　核心考点举一反三

模块四　小试牛刀过关测

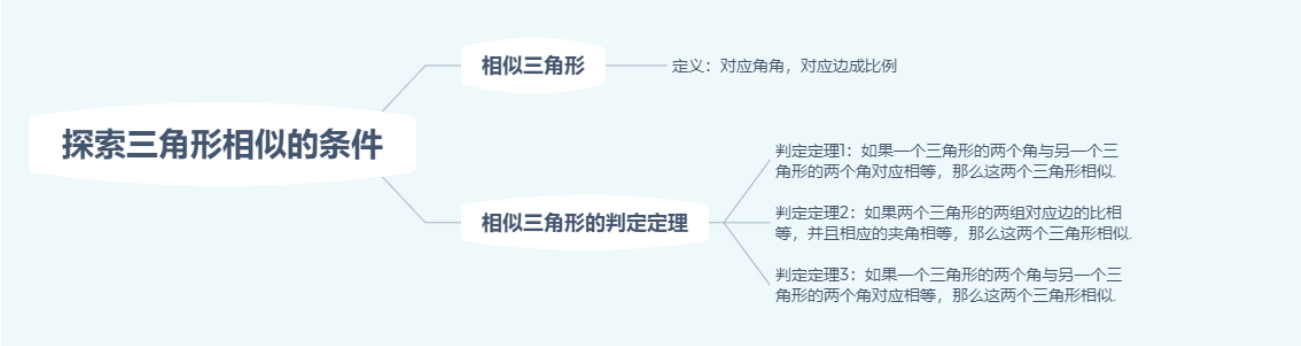
素养目标

1．理解相似三角形的定义，掌握定义中的两个条件；

2．掌握相似三角形的判定定理 1、判定定理 2、判定定理 3；

3．能熟练运用相似三角形的判定定理 1、判定定理 2、判定定理 3。

模块一 思维导图串知识

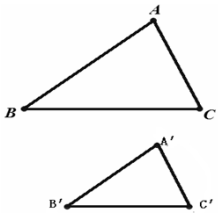


模块二 基础知识全梳理

知识点一、相似三角形

在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 中，如果 $\angle A=\angle A'$，$\angle B=\angle B'$，$\angle C=\angle C'$，$\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{BC}{B'C'}=\dfrac{CA}{C'A'}=k$，我们就说 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 相似，记作 $\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$．$k$ 就是它们的相似比，“$\backsim$”读作“相似于”．

要点：(1) 书写两个三角形相似时，要注意对应点的位置要一致，即 $\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$，则说明点 A 的对应点是 A'，点 B 的对应点是 B'，点 C 的对应点是 C'；



(2) 对于相似比，要注意顺序和对应的问题，如果两个三角形相似，那么第一个三角形的一边和第二个三角形的对应边的比叫做第一个三角形和第二个三角形的相似比．当相似比为 1 时，两个三角形全等．

知识点二、相似三角形的判定定理

1．**判定定理（一）：**如果一个三角形的两个角与另一个三角形的两个角对应相等，那么这两个三角形相似．

2．**判定定理（二）：**如果两个三角形的两组对应边的比相等，并且相应的夹角相等，那么这两个三角形相似．

要点：此方法要求用三角形的两边及其夹角来判定两个三角形相似，应用时必须注意这个角必需是两边的夹角，否则，判断的结果可能是错误的．

3．**判定定理（三）：**

如果一个三角形的两个角与另一个三角形的两个角对应相等，那么这两个三角形相似.（简述为：三边对应成比例，两个三角形相似）

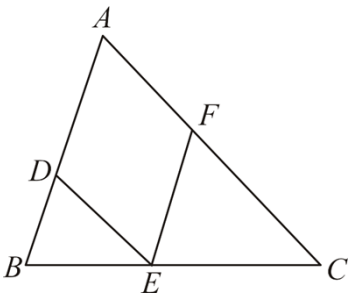
要点：要判定两个三角形是否相似，只需找到这两个三角形的两个对应角相等即可，对于直角三角形而言，若有一个锐角对应相等，那么这两个三角形相似.

4. **直角三角形相似的判定定理：**如果一个直角三角形的斜边及一条直角边与另一个直角三角形的斜边及一条直角边对应成比例，那么这两个直角三角形相似。（简述为：斜边和直角边对应成比例，两个直角三角形相似）

模块三 核心考点举一反三

考点一：两角对应相等，两个三角形相似

例 1. 如图，在$\triangle ABC$中，点D、E、F分别在AB、BC、AC边上，$DE\parallel AC$，$\angle DEF=\angle A$. 求证：$\triangle BDE\backsim\triangle EFC$.



【答案】见解析

【分析】根据$DE//AC$，得出$\angle BED=\angle C,\angle BDE=\angle A$，根据$\angle DEF=\angle A,\angle BDE=\angle DEF$.可判断$EF//AB$，$\angle B=\angle FEC$.可证$\Delta EFC\backsim\Delta EFC$.

【详解】证明$\because DE//AC$，

$\therefore\angle BED=\angle C,\angle BDE=\angle A$，

又$\because\angle DEF=\angle A$，

$\therefore\angle BDE=\angle DEF$，

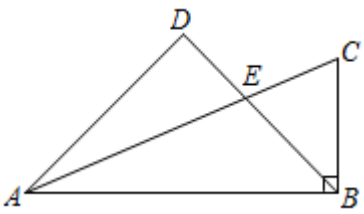
$\therefore EF//AB$，

$\therefore\angle B=\angle FEC$，

$\therefore\Delta EFC\backsim\Delta EFC$.

【点睛】本题考查平行线性质，三角形相似判定，掌握平行线性质，三角形相似判定是解题关键.

【变式 1-1】如图，在$Rt\triangle ABC$中，$\angle ABC=90°$，E是边AC上一点，且$BE=BC$，过点A作BE的垂线，交BE的延长线于点D，求证：$\triangle ADE\backsim\triangle ABC$.



【答案】见解析

【分析】先根据等腰三角形的性质得∠C=∠BEC，又由对顶角相等可证得∠AED=∠C，再由∠D=∠ABC=90°，即可得出结论.

【详解】证明：∵ $BE = BC$

∴∠C=∠BEC，

∵∠BEC=∠AED，

∴∠AED=∠C，

∵AD⊥BD，

∴∠D=90°，

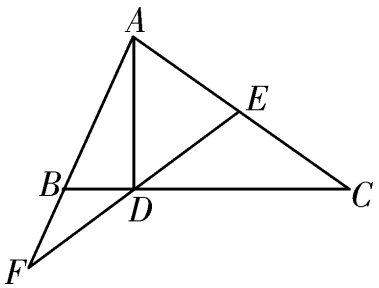
∵ $\angle ABC = 90°$，

∴∠D=∠ABC，

∴ $\triangle ADE \backsim \triangle ABC$.

【点睛】本题考查等腰三角形的性质，相似三角形的判定，熟练掌握等腰三角形的性质和相似三角形的判定定理是解题的关键.

【变式 1-2】如图，在△ABC 中，∠ABC＝2∠C，点 E 为 AC 的中点，AD⊥BC 于点 D，ED 延长后交 AB 的延长线于点 F，求证：△AEF∽△ABC.



【答案】证明见解析.

【分析】先根据直角三角形斜边上的中线性质得到 ED＝EC，则∠EDC＝∠C，再利用三角形外角性质可得∠AEF＝2∠C，而∠ABC＝2∠C，所以∠ABC＝∠AEF，加上∠EAF＝∠BAC，则根据有两组角对应相等的两个三角形相似可判断△AEF∽△ABC.

【详解】证明：∵AD⊥BC，

∴∠ADC＝90°，

∴△ADC 是直角三角形，

∵点 E 为 AC 的中点，

∴ED＝EC，

∴△ECD 是等腰三角形，

∴∠EDC＝∠C，

∴∠AEF＝∠EDC＋∠C＝2∠C，

∵∠ABC＝2∠C，

∴∠ABC＝∠AEF，

∵∠EAF=∠BAC,

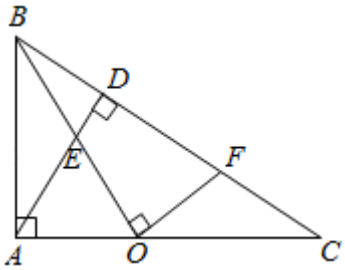
∴△AEF∽△ABC.

【点睛】此题考查了相似三角形的判定、直角三角形斜边上的中线性质、等腰三角形的判定和性质、三角形的外角的性质等，熟练掌握直角三角形斜边上中线的性质是解题的关键.

【变式 1-3】如图，在 RtΔABC 中，$\angle BAC=90°$，$AD\perp BC$ 于点 D.

（1）求证：$\Delta BAD\backsim\Delta CAD$；

（2）若点 O 是 AC 边上一点，连接 BO 交 AD 于 E，$OF\perp OB$ 交 BC 边于点 F，求证：$\Delta ABE\backsim\Delta COF$.



【答案】（1）见解析；（2）见解析.

【分析】（1）由 $AD\perp BC$ 得 $\angle ADB=\angle$CDA=90°，利用同角的余角相等推出 $\angle B=\angle DAC$ 即可；

（2）两次用同角的余角相等推出 $\angle BAE=\angle C$ 和 $\angle ABE=\angle COF$ 即可.

【详解】（1）证明：Q $AD\perp BC$，

$\therefore\angle ADB=\angle$CDA=90°，$\angle DAC+\angle C=90°$，

Q $\angle BAC=90°$，

$\therefore\angle B+\angle$C=90°，

Q $\angle DAC=\angle B$，

$\therefore\Delta BAD\backsim\Delta ACD$；

（2）证明：Q $AD\perp BC$，

$\therefore\angle DAC+\angle C=90°$，

Q $\angle BAC=90°$，

$\therefore\angle DAC+\angle BAE=90°$，

$\therefore\angle BAE=\angle C$，

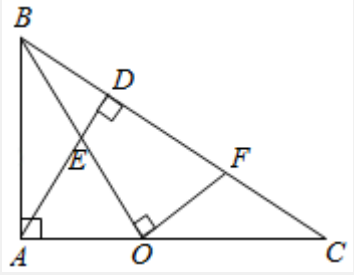
Q $OF\perp OB$，

$\therefore\angle BOA+\angle COF=90°$，

Q $\angle BOA+\angle ABE=90°$，

$\therefore\angle ABE=\angle COF$，

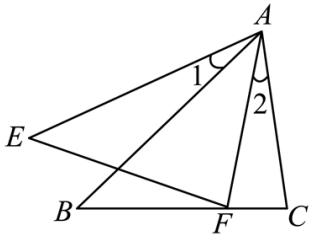
$\therefore\Delta ABE\backsim\Delta COF$.



【点睛】本题考查三角形相似判定问题 ，掌握三角形相似的判定定理，灵活运用三角形相似的判定定理证明相似是解题关键.

考点二：两边成比例且夹角相等，两个三角形相似

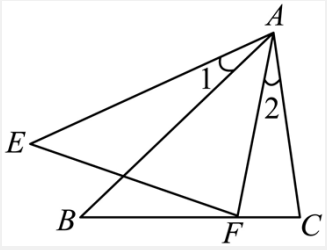
例 2.如图，$AB•AF=AE•AC$，且$\angle 1=\angle 2$，求证：$\triangle ABC\backsim\triangle AEF$.



【答案】见解析

【分析】根据题意得出$\frac{AB}{AE}=\frac{AC}{AF}$，然后由$\angle 1=\angle 2$得出$\angle BAC=\angle EAF$，利用相似三角形的判定即可证明

【详解】证明：如图，



$\because AB•AF=AE•AC$，

$\therefore\frac{AB}{AE}=\frac{AC}{AF}$，

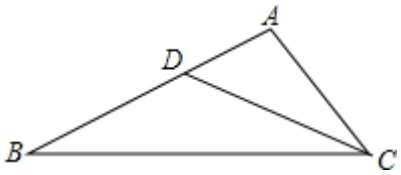
又$\because\angle 1=\angle 2$，

$\therefore\angle 2+\angle BAF=\angle 1+\angle BAF$，即$\angle BAC=\angle EAF$，

$\therefore\triangle ABC\backsim\triangle AEF$.

【点睛】本题主要考查相似三角形的判定定理，熟练掌握相似三角形的判定定理是解题关键.

【变式 2-1】如图所示，点 D 是$\triangle ABC$ 的 AB 边上一点，且 $AD=1$，$BD=2$，$AC=\sqrt{3}$．求证：$\triangle ACD\backsim\triangle ABC$.



【答案】见解析

【分析】首先利用已知得出$\frac{AD}{AC}=\frac{AC}{AB}$，进而利用相似三角形的判定方法得出即可.

【详解】证明：$\because \frac{AD}{AC}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$\frac{AC}{AB}=\frac{\sqrt{3}}{1+2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，，

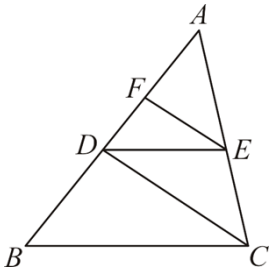
$\therefore \frac{AD}{AC}=\frac{AC}{AB}$，

$\because \angle A=\angle A$，

$\therefore \triangle ACD\backsim\triangle ABC$.

【点睛】本题主要考查了相似三角形的判定，正确把握相似三角形的判定方法是解题关键.

【变式 2-2】如图，$FE\parallel CD$，$AF=3$，$AD=5$，$AE=4$.



(1)求 AC 的长；

(2)若 $AB=\frac{25}{3}$，求证：$\triangle ADE\backsim\triangle ABC$.

【答案】(1)$AC=\frac{20}{3}$；

(2)见解析

【分析】（1）根据平行线分线段成比例定理得出比例式，求出 AC 即可；

（2）根据已知线段的长度求出$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{3}{5}$，根据相似三角形的判定即可得出$\triangle ADE\backsim\triangle ABC$.

（1）

解：$\because EF\parallel CD$，

$\therefore \frac{AF}{AD}=\frac{AE}{AC}$，

$\because AF=3$，$AD=5$，$AE=4$，

$\therefore \frac{3}{5}=\frac{4}{AC}$，

解得：$AC=\frac{20}{3}$；

（2）

证明：∵$AB=\frac{25}{3}$，$AD=5$，$AE=4$，$AC=\frac{20}{3}$，

∴$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{3}{5}$，

∵$\angle A=\angle A$，

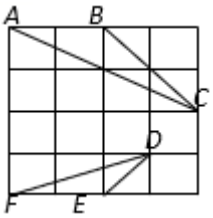
∴$\triangle ADE\backsim\triangle ABC$.

【点睛】本题考查了平行线分线段成比例定理，相似三角形的判定等知识点，能综合运用定理进行推理是解此题的关键.

【变式 2-3】如图，在 4×4 的正方形方格中，$\triangle ABC$ 和$\triangle DEF$ 的顶点都在边长为 1 的小正方形的顶点上.

（1）填空：$\angle ABC=$_____°，$BC=$_____；

（2）判断$\triangle ABC$ 和$\triangle DEF$ 是否相似，并证明你的结论.

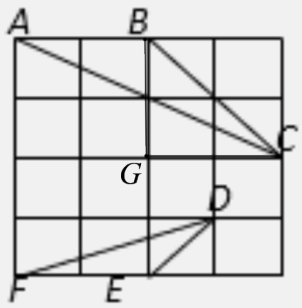


【答案】（1）135，$2\sqrt{2}$；（2）$\triangle ABC\backsim\triangle DEF$，证明见解析

【分析】（1）先在 $Rt\triangle BCG$ 中根据等腰直角三角形的性质求出$\angle GBC$ 的度数，再根据$\angle ABC=\angle GBC+\angle ABG$ 即可得出$\angle ABC$ 的度数；在 $Rt\triangle BGC$ 中利用勾股定理即可求出 BC 的长.

（2）利用格点三角形的知识求出 AB，BC 及 DE，EF 的长度，继而可作出判断.

【详解】解：（1）∵$\triangle BCG$ 是等腰直角三角形，



∴$\angle GBC=45°$，

∵$\angle ABG=90°$，

∴$\angle ABC=\angle GBC+\angle ABG=90°+45°=135°$；

∵在 $Rt\triangle BGC$ 中，$BG=2$，$CG=2$，

∴$BC=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$；

故答案为：135，$2\sqrt{2}$；

（2）解：相似．理由如下：

Q $\angle GEF=90°,\angle GED=45°$

$\therefore \angle DEF=135°$

$\because BC=2\sqrt{2}$，$ED=\sqrt{2}$，$AB=EF=2$

$\therefore \dfrac{AB}{DE}=\dfrac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$，$\dfrac{BC}{EF}=\dfrac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$

$\therefore \dfrac{AB}{DE}=\dfrac{BC}{EF}$

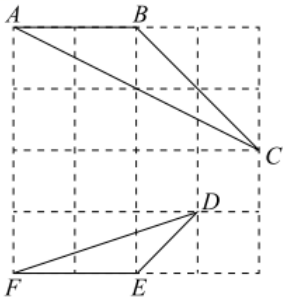
又$\because \angle ABC=\angle CED=135°$

$\therefore \triangle ABC\backsim\triangle DEF$.

【点睛】此题主要考查学生对勾股定理和相似三角形的判定的理解和掌握，解答此题的关键是认真观察图形，得出两个三角形角和角，边和边的关系.

考点三：三边对应成比例，两个三角形相似

例 3. 如图，方格纸中每个小正方形的边长均为 1，$\triangle ABC$ 和$\triangle DEF$ 的顶点都在方格纸的格点上，判断$\triangle ABC$ 和$\triangle DEF$ 是否相似，并说明理由.



【答案】相似，理由见解析

【分析】根据勾股定理求出 AB，BC，AC，DE，DF，EF 的长，再根据相似三角形的判定定理，即可求解.

【详解】解：$\triangle ABC$ 和$\triangle DEF$ 相似；理由如下：

根据题意得：$AB=2$，$BC=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$，$AC=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$；

$DE=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$，$DF=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$，$EF=2$，

$\therefore \dfrac{AB}{DE}=\sqrt{2}$，$\dfrac{BC}{EF}=\sqrt{2}$，$\dfrac{AC}{DF}=\sqrt{2}$，

$\therefore \dfrac{AB}{DE}=\dfrac{BC}{EF}=\dfrac{AC}{DF}=\sqrt{2}$，

$\therefore \triangle ABC\backsim\triangle DEF$.

【点睛】本题主要考查了网格图与勾股定理，相似三角形的判定，熟练掌握相似三角形的判定定理是解题的关键.

【变式 3-1】根据下列条件，判断$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$是否相似，并说明理由：

(1) $AB=4\text{cm}$，$BC=6\text{cm}$，$AC=8\text{cm}$，$A'B'=12\text{cm}$，$B'C'=18\text{cm}$，$A'C'=24\text{cm}$；

(2) $\angle A=120°$，$AB=7\text{cm}$，$AC=14\text{cm}$，$\angle A'=120°$，$A'B'=3\text{cm}$，$A'C'=6\text{cm}$.

【答案】(1)相似，理由见解析

(2)相似，理由见解析

【分析】（1）计算对应边的比，根据三边对应，两三角形相似，进而判断即可；

（2）根据两边对应成比例且夹角相等的三角形相似，进而判断即可.

（1）

解：$\because \dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{4}{12}=\dfrac{1}{3}$，$\dfrac{BC}{B'C'}=\dfrac{6}{18}=\dfrac{1}{3}$，$\dfrac{AC}{A'C'}=\dfrac{8}{24}=\dfrac{1}{3}$，

$\therefore \dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{BC}{B'C'}=\dfrac{AC}{A'C'}$.

$\therefore \triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$.

（2）

$\because \dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{7}{3}$，$\dfrac{AC}{A'C'}=\dfrac{14}{6}=\dfrac{7}{3}$，

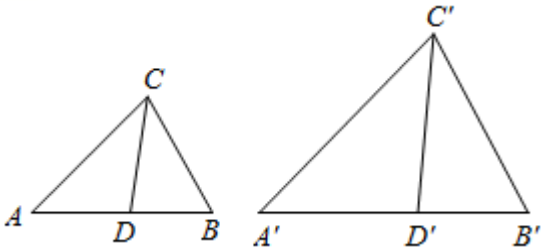
$\therefore \dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{AC}{A'C'}$.

又$\because \angle A=\angle A'$，

$\therefore \triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$.

【点睛】题主要考查了相似三角形的判定，正确把握判定方法是解题关键.

【变式 3-2】如图，在$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$中，D、D'分别是AB、$A'B'$上一点，$\dfrac{\boldsymbol{AD}}{\boldsymbol{AB}}=\dfrac{\boldsymbol{A'D'}}{\boldsymbol{A'B'}}$，当$\dfrac{\boldsymbol{CD}}{\boldsymbol{C'D'}}=\dfrac{\boldsymbol{AC}}{\boldsymbol{A'C'}}=\dfrac{\boldsymbol{AB}}{\boldsymbol{A'B'}}$时，求证：$\triangle ADC:\triangle A'D'C'$.



【答案】见解析

【分析】根据比例的性质可得，$\dfrac{CD}{C'D'}=\dfrac{AC}{A'C'}=\dfrac{AD}{A'D'}$，即可求证.

【详解】证明：$\because \dfrac{AD}{AB}=\dfrac{A'D'}{A'B'}$，

$\therefore \dfrac{AD}{A'D'}=\dfrac{AB}{A'B'}$，

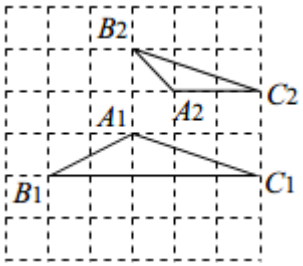
$\because \dfrac{CD}{C'D'}=\dfrac{AC}{A'C'}=\dfrac{AB}{A'B'}$，

$\therefore \dfrac{CD}{C'D'}=\dfrac{AC}{A'C'}=\dfrac{AD}{A'D'}$，

$\therefore \triangle ADC\backsim\triangle A'D'C'$.

【点睛】此题考查了相似三角形的判定方法，涉及了比例的性质，解题的关键是掌握相似三角形的判定方法.

【变式 3-3】如图，设网格中每个小正方形的边长均为 1．点 A_1、B_1、C_1 和 A_2、B_2、C_2 都在正方形的顶点上．求证：$\triangle A_1B_1C_1\backsim\triangle A_2B_2C_2$.



【答案】证明见解析

【分析】先利用勾股定理分别求解 $A_1B_1=\sqrt{5},A_1C_1=\sqrt{10},B_1C_1=5,\ A_2B_2=\sqrt{2},A_2C_2=2,B_2C_2=\sqrt{10}$，再分别计算：$\dfrac{A_1B_1}{A_2B_2}=\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{10}}{2},\dfrac{A_1C_1}{A_2C_2}=\dfrac{\sqrt{10}}{2},\dfrac{B_1C_1}{B_2C_2}=\dfrac{5}{\sqrt{10}}=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$，可得两个三角形的三边对应成比例，从而可得结论.

【详解】解：由勾股定理可得：

$A_1B_1=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5},A_1C_1=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10},B_1C_1=5,$

$A_2B_2=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2},A_2C_2=2,B_2C_2=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10},$

$\therefore \dfrac{A_1B_1}{A_2B_2}=\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{10}}{2},\dfrac{A_1C_1}{A_2C_2}=\dfrac{\sqrt{10}}{2},\dfrac{B_1C_1}{B_2C_2}=\dfrac{5}{\sqrt{10}}=\dfrac{\sqrt{10}}{2},$

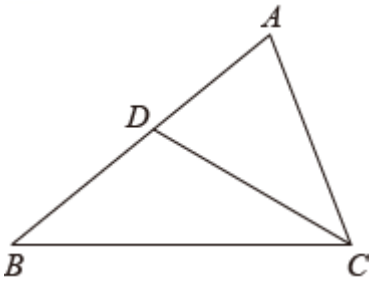
$\therefore \dfrac{A_1B_1}{A_2B_2}=\dfrac{A_1C_1}{A_2C_2}=\dfrac{B_1C_1}{B_2C_2},$

$\therefore\ \triangle A_1B_1C_1\backsim\triangle A_2B_2C_2$

【点睛】本题考查的是二次根式的运算，勾股定理的应用，相似三角形的判定，熟悉三边对应成比例的两个三角形相似是解题的关键.

考点四：添一个条件使两个三角形相似

例 4. 如图，在$\triangle ABC$中，$AB>AC$，点 D 在 AB 上（点 D 与 A，B 不重合），若再增加一个条件就能使 $\triangle ACD\backsim\triangle ABC$，则这个条件是_____（写出一个条件即可）.



【答案】$\angle ACD=\angle ABC$（答案不唯一）

【分析】两个三角形中如果有两组角对应相等，那么这两个三角形相似，据此添加条件即可.

【详解】解：添加$\angle ACD=\angle ABC$，可以使两个三角形相似.

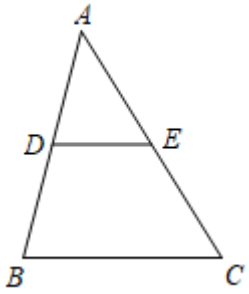
$\because \angle CAD=\angle BAC$，$\angle ACD=\angle ABC$，

$\therefore \triangle ACD\backsim\triangle ABC$.

故答案为：$\angle ACD=\angle ABC$（答案不唯一）

【点睛】本题考查相似三角形的判定定理，两组角对应相等的两个三角形相似. 理解和掌握三角形相似的判定是解题的关键.

【变式 4-1】如图，在$\mathrm{V}ABC$中，点D在AB边上，点E在AC边上，请添加一个条件_____，使$\triangle ADE\backsim\triangle ABC$.



【答案】$\angle ADE=\angle B$（答案不唯一）.

【分析】已知有一个公共角，则可以再添加一个角从而利用有两组角对应相等的两个三角形相似来判定或添加夹此角的两边对应成比例也可以判定.

【详解】解:$\because \angle A=\angle A$，

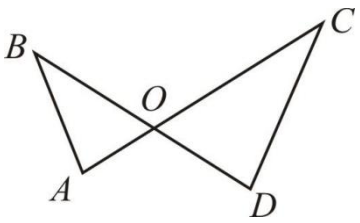
$\therefore$根据两角相等的两个三角形相似，可添加条件$\angle ADE=\angle B$或$\angle AED=\angle C$证$\triangle ADE\backsim\triangle ABC$相似；

根据两边对应成比例且夹角相等，可添加条件$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$证$\triangle ADE\backsim\triangle ABC$相似.

故答案为:$\angle ADE=\angle B$（答案不唯一）.

【点睛】此题考查了本题考查了相似三角形的判定，解题的关键是掌握相似三角形的判定方法.

【变式 4-2】如图，已知AC,BD相交于点O，若补充一个条件后，便可得到$\Delta AOB:\Delta DOC$，则要补充的条件可以是_____.



【答案】$\angle B=\angle C$（答案不唯一）

【分析】根据题意有$\angle AOB=\angle DOC$，因此根据相似三角形的判定条件只需要添加$\angle B=\angle C$或$\angle A=\angle D$即可证明$\triangle AOB\backsim\triangle DOC$.

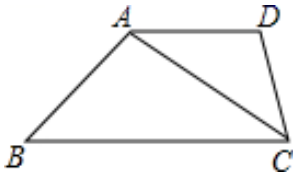
【详解】解：$\because\angle AOB=\angle DOC$，

$\therefore$当添加条件$\angle B=\angle C$时可以证明$\triangle AOB\backsim\triangle DOC$，

故答案为：$\angle B=\angle C$（答案不唯一）.

【点睛】本题主要考查了相似三角形的判定，熟知相似三角形的判定条件是解题的关键.

【变式 4-3】如图所示，在四边形$ABCD$中，$AD\parallel BC$，如果要使$\triangle ABC\backsim\triangle ADC$，那么还要补充的一个条件是_____.（只要求写出一个条件即可）



【答案】$\angle B=\angle DCA$或$\angle BAC=\angle D$或$\frac{AD}{AC}=\frac{AC}{BC}$（答案不唯一）

【分析】先由$AD\parallel BC$，得到$\angle DAC=\angle ACB$，然后利用相似三角形的判定定理，做题即可.

【详解】解：$\because AD/\!/BC$，

$\therefore\angle DAC=\angle ACB$，

$\therefore$当$\angle B=\angle DCA$或$\angle BAC=\angle D$或$\frac{AD}{AC}=\frac{AC}{BC}$

$\therefore$都可得相似.

故答案为：$\angle B=\angle DCA$或$\angle BAC=\angle D$或$\frac{AD}{AC}=\frac{AC}{BC}$（答案不唯一）.

【点睛】此题考查了相似三角形的判定，熟知相似三角形的判定条件是解题的关键：①如果两个三角形的三组对应边的比相等，那么这两个三角形相似；②如果两个三角形的两条对应边的比相等，且夹角相等，那么这两个三角形相似；③如果两个三角形的两个对应角相等，那么这两个三角形相似. 平行于三角形一边的直线截另两边或另两边的延长线所组成的三角形与原三角形相似.

考点五：判断三角形相似

例 5.（23-24 九年级上·四川眉山·期末）根据下列各组条件，不能判断$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$相似的是（　）

A．$\angle B=B'=90°$，$\angle A=60°$，$\angle C'=30°$

B．$\angle A=60°$，$\angle C=80°$，$\angle A'=60°$，$\angle B'=40°$

C．$AB=5$，$BC=7$，$AC=10$；$A'C'=16$，$B'C'=14$，$A'B'=10$

D．$\angle A=50°$，$AB=8$，$AC=15$；$\angle A'=50°$，$A'C'=30$，$A'B'=16$

【答案】C

【分析】本题考查了相似三角形的判定．熟练掌握相似三角形的判定定理是解题的关键．

根据相似三角形的判定定理对各选项进行判断作答即可．

【详解】解：$\because \angle B=B'=90°$，$\angle A=60°$，$\angle C'=30°$，

$\therefore \angle C=30°=\angle C'$，则$\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$，故 A 不符合要求；

$\because \angle A=60°$，$\angle C=80°$，$\angle A'=60°$，$\angle B'=40°$，

$\therefore \angle A=\angle A'$，$\angle B=40°=\angle B'$，则$\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$，故 B 不符合要求；

$\because AB=5$，$BC=7$，$AC=10$；$A'C'=16$，$B'C'=14$，$A'B'=10$，

$\therefore \dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{BC}{B'C'}\neq\dfrac{AC}{A'C'}$，不能判断$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$相似，故 C 符合要求；

$\because \angle A=50°$，$AB=8$，$AC=15$；$\angle A'=50°$，$A'C'=30$，$A'B'=16$，

$\therefore \angle A=\angle A'$，$\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{AC}{A'C'}$，则$\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$，故 D 不符合要求；

故选：C．

【变式 5-1】（23-24 九年级上·广西桂林·阶段练习）已知在$\mathrm{Rt}\triangle ABC$和$\mathrm{Rt}\triangle A'B'C'$中，$\angle C=\angle C'=90°$，则不能使两直角三角形相似的条件为（　　）

A．$\angle A=\angle A'$　　B．$\dfrac{AC}{A'C'}=\dfrac{BC}{B'C'}$　　C．$\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{A'C'}{A'B'}$　　D．$\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{B'C'}{A'C'}$

【答案】D

【分析】本题考查直角三角形相似的判定定理，根据题中条件，由各个选项中添加的条件，利用两个直角三角形相似的判定定理验证即可得到答案，熟记直角三角形相似的判定定理是解决问题的关键．

【详解】解：A、由$\angle C=\angle C'=90°$，加上$\angle A=\angle A'$，利用两个三角形相似的判定定理：两个角对应相等的两个三角形相似确定$\mathrm{Rt}\triangle ABC$和$\mathrm{Rt}\triangle A'B'C'$相似，不符合题意；

B、由$\angle C=\angle C'=90°$，加上$\dfrac{AC}{A'C'}=\dfrac{BC}{B'C'}$，利用两个三角形相似的判定定理：两边对应成比例且夹角相等的两个三角形相似确定$\mathrm{Rt}\triangle ABC$和$\mathrm{Rt}\triangle A'B'C'$相似，不符合题意；

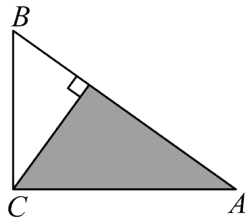
C、在$\mathrm{Rt}\triangle ABC$和$\mathrm{Rt}\triangle A'B'C'$中，由$\angle C=\angle C'=90°$，确定$AB$、$A'B'$为两个直角三角形的斜边，利用两个直角三角形相似的判定定理：直角边及斜边对应成比例的两个直角三角形相似确定$\mathrm{Rt}\triangle ABC$和$\mathrm{Rt}\triangle A'B'C'$相似，不符合题意；

D、根据两个直角三角形相似的判定定理，添加$\frac{AC}{AB}=\frac{B'C'}{A'C'}$，无法确定Rt△$ABC$和Rt△$A'B'C'$相似，符合题意；

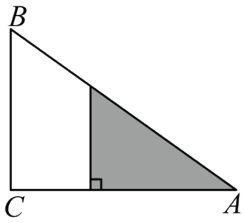
故选：D.

【变式 5-2】（2024 九年级下·浙江·专题练习）如图，在△ABC纸片中，$\angle C=90°$，$BC=5$，$AC=7$，将该纸片沿虚线剪开，剪下的阴影三角形与原三角形不相似的是（　　）

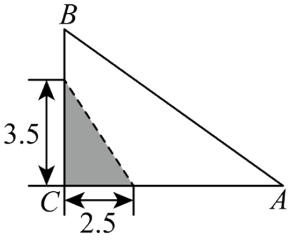
A.



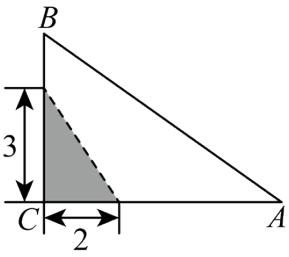
B.



C.



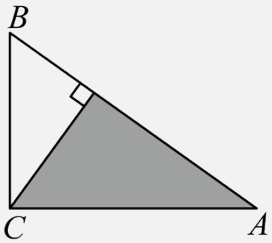
D.



【答案】D

【分析】本题主要考查相似三角形的判定，由$CD\perp AB$于点D，得$\angle ADC=90°$，则$\angle ADC=\angle ACB$，而$\angle A=\angle A$，即可证明△$ACD\backsim$△ABC，可判断A不符合题意；由$EF\perp AC$，得$\angle AFE=\angle C$，则$EF/\!/BC$，可证明$\triangle AEF\backsim\triangle ABC$，可判断$B$不符合题意；由$BC=5,AC=7,HC=2.5,GC=3.5$，得$\frac{HC}{BC}=\frac{GC}{AC}=\frac{1}{2}$，而$\angle GCH=\angle ACB$，可证明△$GHC\backsim$△$ABC$，可判断$C$不符合题意；由$BC=5,AC=7,LC=2,KC=3$，得$\frac{LC}{BC}=\frac{2}{5}$，$\frac{KC}{AC}=\frac{3}{7}$，则$\frac{LC}{BC}\neq\frac{KC}{AC}$，而$\angle KCL=\angle ACB$，所以△$KLC$与△$ABC$不相似，可判断$D$符合题意，于是得到问题的答案.

【详解】解：如图 1，



$\because CD\perp AB$于点D，

$\therefore\angle ADC=90°$，

$\because\angle ACB=90°$，

$\therefore\angle ADC=\angle ACB$，

$\because \angle A = \angle A$，

$\therefore \triangle ACD \backsim \triangle ABC$，

故 A 不符合题意；

如图 2，

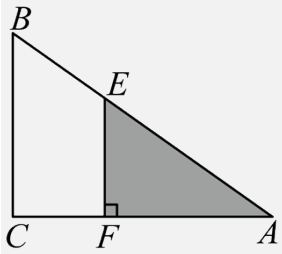


图2

$\because EF \perp AC$，

$\therefore \angle AFE = 90°$，

$\because \angle C = 90°$，

$\therefore \angle AFE = \angle C$，

$\therefore EF \parallel BC$，

$\therefore \triangle AEF \backsim \triangle ABC$，

故 B 不符合题意；

如图 3，

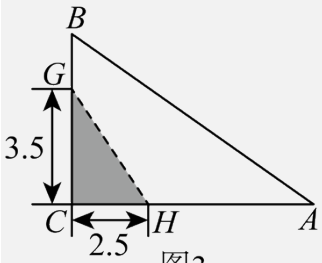


图3

$\because BC = 5, AC = 7, HC = 2.5, GC = 3.5$，

$\therefore \dfrac{HC}{BC} = \dfrac{2.5}{5} = \dfrac{1}{2}$，$\dfrac{GC}{AC} = \dfrac{3.5}{7} = \dfrac{1}{2}$，

$\therefore \dfrac{HC}{BC} = \dfrac{GC}{AC}$，

$\because \angle GCH = \angle ACB$，

$\therefore \triangle GHC \backsim \triangle ABC$，

故 C 不符合题意；

如图 4，

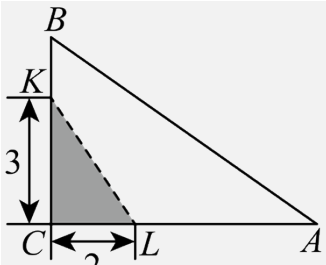


图4

$\because BC=5, AC=7, LC=2, KC=3$，

$\therefore \dfrac{LC}{BC}=\dfrac{2}{5}$，$\dfrac{KC}{AC}=\dfrac{3}{7}$，

$\therefore \dfrac{LC}{BC}\neq\dfrac{RC}{AC}$，

假设$\triangle KLC\backsim\triangle ABC$，

$\because \angle KCL=\angle ACB$，

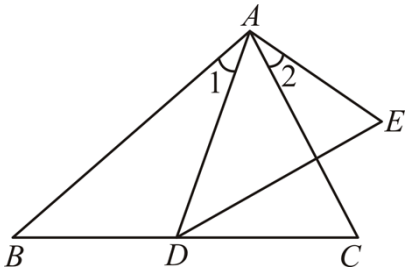
$\therefore \dfrac{LC}{BC}=\dfrac{KC}{AC}$，与已知条件不符，

$\therefore \triangle KLC$与$\triangle ABC$不相似，

故D符合题意，

故选：D.

【变式 5-3】（23-24 九年级下·湖南湘潭·阶段练习）如图，$\angle 1=\angle 2$，添加一个条件：① $\angle C=\angle E$；② $\angle B=\angle ADE$；③$\dfrac{AC}{AE}=\dfrac{BC}{DE}$；④$\dfrac{AB}{AD}=\dfrac{AC}{AE}$．其中能判定 $\triangle ABC\backsim\triangle ADE$的是（　）．



A．①②③　　B．①②④　　C．②③④　　D．①②③④

【答案】B

【分析】本题考查的是相似三角形的判定，解题的关键是熟练掌握相似三角形的判定定理“两角分别对应相等，两三角形相似；两边对应成比例且夹角相等，两三角形相似”，

先根据$\angle 1=\angle 2$，得出$\angle BAC=\angle DAE$，再由相似三角形的判定定理对各项逐一判断即可．

【详解】解：$\because \angle 1=\angle 2$，$\therefore \angle BAC=\angle DAE$，

①添加$\angle C=\angle E$，则$\triangle ABC:\triangle ADE$，本项符合题意；

②添加$\angle B=\angle ADE$，则$\triangle ABC:\triangle ADE$，本项符合题意；

③添加$\dfrac{AC}{AE}=\dfrac{BC}{DE}$；无法判断$\triangle ABC:\triangle ADE$，本项不合题意；

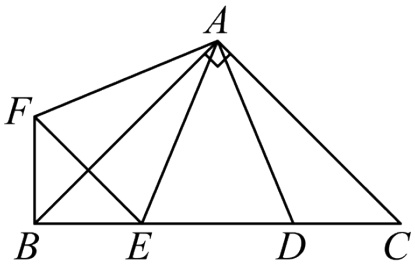
④添加$\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}$，则$\triangle ABC:\triangle ADE$，本项符合题意；

故选：B.

考点六：三角形相似有关比例变形式

例 6.（23-24 九年级上·浙江台州·阶段练习）如图，在$\mathrm{Rt}\triangle ABC$中，$AB=AC$，D、E是斜边BC上两点，且$\angle DAE=45°$，将$\triangle ADC$绕点A顺时针$90°$旋转后，得到$\triangle AFB$，连接EF．下列结论中正确的个数有（　）

①$\angle EAF=45°$；②$\triangle ABE\backsim\triangle ACD$；③$EA$平分$\angle CEF$；④$BE^2+DE^2\equiv DE^2$.



A．1个　　B．2个　　C．3个　　D．4个

【答案】C

【分析】①根据旋转的性质知$\angle CAD=\angle BAF$，因为$\angle BAC=90°$，$\angle DAE=45°$，所以$\angle CAD+\angle BAE=45°$，可得$\angle EAF$的度数；

②因为$\angle CAD$与$\angle BAE$不一定相等，根据三角形相似的判定即可作出判断；

③证明$\triangle ADE\cong\triangle AFE(\mathrm{SAS})$，得$\angle AED=\angle AEF$，$DE=FE$即可；

④$BF=CD$，$EF=DE$，$\angle FBE=90°$，根据勾股定理判断.

【详解】解：①∵将$\triangle ADC$绕点A顺时针$90°$旋转后，得到$\triangle AFB$，

$\therefore\angle CAD=\angle BAF$，$\angle ABF=\angle C$，$\angle BAC=90°$，$AF=AD$，

$\because\angle DAE=45°$，

$\therefore\angle CAD+\angle BAE=45°$，

$\therefore\angle EAF=\angle BAF+\angle BAE=\angle CAD+\angle BAE=45°$，故结论①正确；

②$\because AB=AC$，$\angle BAC=90°$，

$\therefore\angle ABC=\angle C=45°$，

但$\angle CAD$与$\angle BAE$不一定相等，

$\therefore\triangle ABE$与$\triangle ACD$不一定相似，故结论②错误；

③$\because\angle DAE=45°$，$\angle EAF=45°$，

$\therefore \angle DAE = \angle FAE$，

在$\mathrm{V}ADE$和$\triangle AFE$中，

$$\begin{cases} AD = AF \\ \angle DAE = \angle FAE \\ AE = AE \end{cases},$$

$\therefore \triangle ADE \cong \triangle AFE(\mathrm{SAS})$，

$\therefore \angle AED = \angle AEF$，$DE = FE$，

$\therefore AE$平分$\angle CEF$，故结论③正确；

④$\because \angle ABC = \angle C = 45°$，$\angle ABF = \angle C$，

$\therefore \angle FBE = \angle ABF + \angle ABC = 45° + 45° = 90°$，

$\therefore BE^2 + BF^2 = EF^2$，

$\because$将$\triangle ADC$绕点A顺时针$90°$旋转后，得到$\triangle AFB$，

$\therefore \triangle AFB \cong \triangle ADC$，

$\therefore BF = CD$，

又$\because DE = FE$，

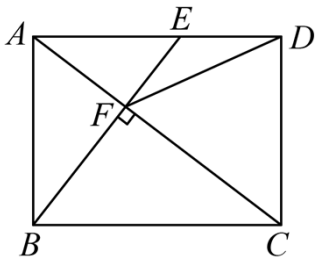
$\therefore BE^2 + CD^2 = DE^2$，故结论④正确，

$\therefore$结论正确的个数有3个.

故选：C.

【点睛】本题属于图形的旋转变换，考查了旋转的性质，相似的判定，等边对等角，全等三角形的判定和性质，勾股定理．掌握旋转的性质、勾股定理及相似的判定是解题的关键.

【变式 6-1】如图，在矩形$ABCD$中，E是AD边的中点，$BE \perp AC$，垂足为F，连接DF，分析下列四个结论，①$\triangle AEF \backsim \triangle CAB$，②$CF = 2AF$；③$DF = DC$；④$\dfrac{CD}{AC} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$．其中正确的结论有（　）



A．4个　　B．3个　　C．2个　　D．1个

【答案】B

【分析】①根据矩形的性质可证明$\angle ACB = \angle EAF$，$\angle ABC = \angle AFE = 90°$，即可证明结论正确；

②根据$AD \parallel BC$可证明$\triangle AEF \backsim \triangle CBF$，利用相似三角形的性质即可证明结论正确；

③过点D作$DM \parallel BE$，分别交BC，AC于点M，N，可证明四边形$BEDM$平行四边形，则$BM = CM$，进一步可证明DM垂直平分CF，可得结论正确；

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：https://d.book118.com/598077052020006111