河南省新郑市第一中学2024届高三上学期12月阶段测试

数学试题

学校:_____姓名：_____班级：_____考号：_____

一、单选题

1．已知集合 $A=\left\{x|3x-2-x^2<0\right\}$， $B=\{x|\ x-a<0\}$，且 $B\subseteq A$，则实数 a 的取值范围为（　）

A．$a\le 1$　　B．$1<a\le 2$　　C．$a>2$　　D．$a\le 2$

2．已知复数 z 满足 $z\left(2-\mathrm{i}\right)=(1+\mathrm{i})^2$，则复数 z 在复平面内对应的点位于（　）

A．第一象限　　B．第二象限

C．第三象限　　D．第四象限

3．已知正实数 a，b，则“ $2^a+2^b\ge 4$ ”是“ $ab\ge 1$ ”的（　）

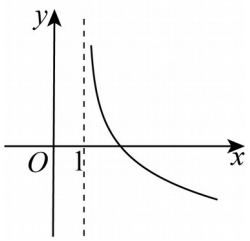
A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

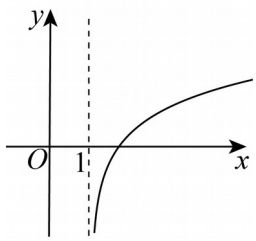
C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件

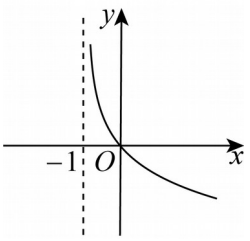
4．已知函数 $f(x)=\begin{cases}(2-a)x+3a,x<1\\ \sqrt{x-1},x\ge 1\end{cases}$ 的值域为 R，那么实数 a 的取值范围是（　）

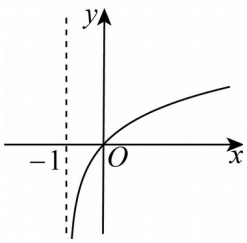
A．$(-\infty,-1]$　　B．$[-1,2)$　　C．$(0,2)$　　D．$(-2,1]$

5．如果函数 $y=a^x(a>0,a\ne 1)$ 的反函数是增函数，那么函数 $y=-\log_a(x+1)$ 的图象大致是（　）

A．

B．

C．

D．

6．已知函数$f\left(x\right)=\sin 2x+a\cos 2x$的图象关于点$\left(-\frac{\pi}{8},0\right)$对称，若$f\left(x_1\right)\cdot f\left(x_2\right)=-2$，则$a\left|x_2-x_1\right|$的最小值为（　）

A．$\frac{\pi}{2}$　　B．π　　C．$\frac{3\pi}{4}$　　D．$\frac{5\pi}{4}$

7．人们用分贝$\left(\mathrm{dB}\right)$来划分声音的等级，声音的等级$d\left(x\right)$（单位：dB）与声音强度x（单位：$\mathrm{W/m^2}$）满足$d\left(x\right)=9\lg\frac{x}{1\times10^{-13}}$.一般两人小声交谈时，声音的等级约为45dB，在有50人的课堂上讲课时，老师声音的等级约为63dB，那么老师上课时声音强度约为一般两人小声交谈时声音强度的（　）

A．1倍　　B．10倍　　C．100倍　　D．1000倍

8．中国空间站(*China Space Station*)的主体结构包括天和核心舱、问天实验舱和梦天实验舱.2022年10月31日15：37分，我国将“梦天实验舱”成功送上太空，完成了最后一个关键部分的发射，“梦天实验舱”也和“天和核心舱”按照计划成功对接，成为“*T*”字形架构，我国成功将中国空间站建设完毕.2023年，中国空间站将正式进入运营阶段.假设中国空间站要安排甲、乙等5名航天员进舱开展实验，其中“天和核心舱”安排2人，“问天实验舱”安排2人，“梦天实验舱”安排1人.若甲、乙两人不能同时在一个舱内做实验，则不同的安排方案共有（　）

A．9种　　B．24种　　C．26种　　D．30种

二、多选题

9．已知函数$f(x)=\begin{cases}xe^x,x<1\\\frac{e^x}{x^3},x\geq1\end{cases}$，函数$g(x)=xf(x)$，下列选项正确的是（　）

A．点$\left(0,0\right)$是函数$f(x)$的零点；

B．$\exists x_1\in\left(0,1\right)$，$\exists x_2\in(1,3)$，使$f(x_1)>f(x_2)$

C．若关于 x 的方程 $g(x)-2a=0$ 有一个根，则实数 a 的取值范围是

$\left(\frac{2}{e^2},\frac{e^2}{8}\right)\cup\left(\frac{e}{2},+\infty\right)$

D．函数 $f(x)$ 的值域为 $\left[-e^{-1},+\infty\right)$

10．下列命题中，正确的是（　）

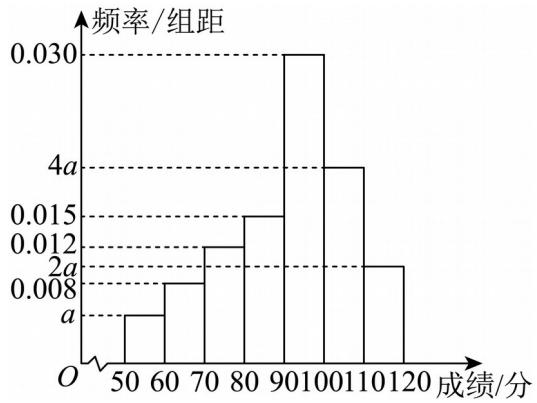
A．若事件 A，B 互斥，则 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

B．若事件 A，B 相互独立，则 $P(\overline{AB})=P(\overline{A})\cdot P(\overline{B})$

C．若事件 A，B，C 两两互斥，则 $P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)$

D．若事件 A，B，C 两两独立，则 $P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$

11．2023 年是共建“一带一路”倡议提出十周年．某校组织了“一带一路”知识竞赛，将学生的成绩（单位：分，满分：120 分）整理成如图的频率分布直方图（同一组中的数据用该组区间的中点值为代表），则（　）



A．该校竞赛成绩的极差为 70 分

B．a 的值为 0.005

C．该校竞赛成绩的平均分的估计值为 90.7 分

D．这组数据的第 30 百分位数为 81

12．已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $\forall n\in N^*$，曲线 $C_0:y=\ln x$ 和 $C_n:y=1-\frac{a_n}{x^n}$ 有交点 $T_n(x_n,y_n)$，

且C_0和C_n在点T_n处的切线重合，则下列结论正确的为（　）

A．$\forall n\in N^*, x_n<e$　　B．$\exists p\in N^*, a_p<1$

C．$\exists p,q\in N^*, x_p a_p=x_{p+q}a_{p+q}$　　D．$\forall n\in N^*, y_n\cdot e^{\frac{1}{n}}<1$

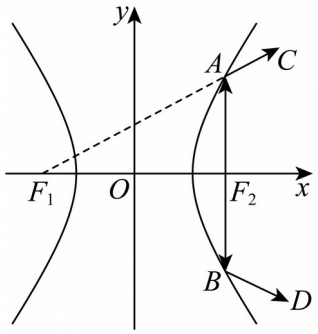
三、填空题

13．设$f(n)=\cos\left(\frac{n\pi\pi}{2}+\frac{}{4}\right)$，则$f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(2022)=$_____.

14．设$x>0,\ \ y>0,\ \ x+2y=5$，则$\frac{(x+1)(2y+1)}{\sqrt{xy}}$的最小值为___.

15．双曲线的光学性质为：从双曲线的一个焦点发出的光线经过双曲线反射后，反射光线的反向延长线过双曲线的另一个焦点．如图：F_1,F_2为双曲线

$C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左，右焦点，若从右焦点$F_2$发出的光线在$C$上的点$A,B$处反射后射出（$A,B,F_2$共线），且$\angle CAB=\angle ABD=120^\circ$，则$C$的离心率为_____.



16．在正六棱柱$ABCDEF-A_1B_1C_1D_1E_1F_1$中，若底面边长为1，高为3，则$BC$到平面$ADC_1B_1$的距离为___.

四、解答题

17．已知关于 x 的方程 $2x^2-bx+\frac{1}{4}=0$ 的两根为 $\sin\theta$ 和 $\cos\theta$，$\theta\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right)$.

（1）求实数 b 的值；

（2）求 $\frac{2\sin\theta\cos\theta+1}{\cos\theta-\sin\theta}$ 的值.

18．已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n.

(1)若 $S_1=2$，$S_{n+1}=2S_n+2$，证明：$S_n=a_{n+1}-2$；

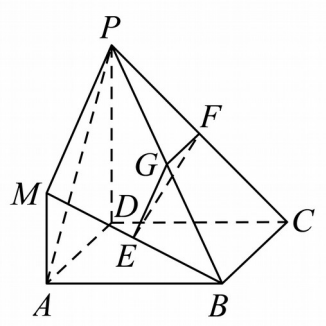
(2)在（1）的条件下，若 $b_n=\log_2 a_n$，数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n，求证

$$\frac{1}{T_1}+\frac{1}{T_2}+\frac{1}{T_3}+\cdots+\frac{1}{T_n}<2$$

19．在如图所示的几何体中，底面 $ABCD$ 是正方形，四边形 $ADPM$ 是直角梯形，

$MA\perp AD$，且四边形 $ADPM\perp$ 底面 $ABCD$，E,G,F 分别为 MB,PB,PC 的中点，

$AD=PD=2,PD=2AM$.



(1)求证：平面 $EFG//$ 平面 $ADPM$；

(2)求多面体 $PMABCD$ 的体积.

20．已知椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的长轴长为 $2\sqrt{6}$，且其离心率小于 $\frac{\sqrt{2}}{2}$，P 为

椭圆C上一点，F_1、F_2分别为椭圆C的左、右焦点，$\triangle F_1PF_2$的面积的最大值为$2\sqrt{2}$.

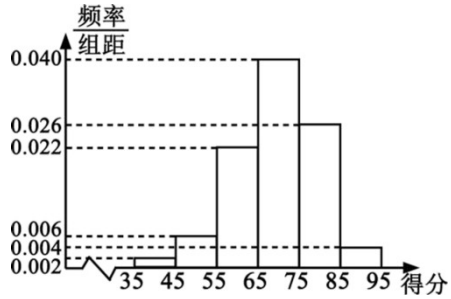
(1)求椭圆C的标准方程；

(2)A为椭圆C的上顶点，过点$D(0,-1)$且斜率为k的直线l与椭圆C交于M，N两点，

直线l_1为过点D且与AM平行的直线，设l_1与直线$y=-\frac{5}{2}$的交点为Q.证明：直线QN

过定点.

21．传唱红色歌曲能够弥补青少年面对社会多元化的彷徨，有助于在红歌中受到启迪，树立积极的生活态度和健康的价值观．某重点高中在纪念“一二·九”活动中，举办了“唱青春之序曲，展时代之芳华”红色经典歌曲合唱比赛，由专业教师和学生会共50人组成评委团，评委所打分数的平均分最高的节目参加区合唱比赛．评委对各节目的给分相互独立，互不影响．现有两个特等奖节目：《在太行山上》得分的频率分布直方图和《四渡赤水出奇兵》得分的频率分布表，如下所示：



分数区间	[35,45)	[45,55)	[55,65)	[65,75)	[75,85)	[85,95]
频数	1	4	10	22	11	2
频率	0.02	0.08	0.20	0.44	0.22	0.04

分数区间	[35，55)	[55，75)	[75，95]
印象值	8	9	10

(1)从两个节目各自的平均分来看，应该推选哪个节目参加区合唱比赛（同一组中的数据用该组区间的中点值作代表）；

(2)根据印象值表对两个节目的所有评分进行赋值，从两个节目的“印象值”分数中各随机抽取一个分数，试估计《在太行山上》“印象值”比《四渡赤水出奇兵》“印象值”高的概率.

22．已知函数 $f(x)=(a-1)x+\ln x(a\in\mathbf{R})$．

(1)讨论函数 $f(x)$ 的单调性与极值；

(2)当 $a=0$ 时，函数 $g(x)=f(x)-(2-x)\mathrm{e}^x$ 在 $\left[\frac{1}{4},1\right]$ 上的最大值为 δ，求使得

$\delta\in\left[k-\frac{1}{5},k+\frac{3}{5}\right]$ 上的整数 k 的值（其中 e 为自然对数的底数，参考数据：$\ln 0.5\approx -0.7$，

$\ln 0.6\approx -0.5$）．

参考答案：

1．A

【分析】先根据不等式的解法将两个集合的范围解出，再根据集合间的关系即可求出参数范围.

【详解】因为 $A=\left\{x|3x-2-x^2<0\right\}=\{x|\ x^2-3x+2>0\}=\{x|\ x>2$ 或 $x<1\}$，

$B=\{x|\ x-a<0\}=\{x|\ x<a\}$，

因为 $B\subseteq A$，

所以 $a\le 1$.

故选：A.

2．B

【分析】利用复数的运算法则求出 z，根据复数的几何意义得出答案.

【详解】由题意可得 $z=\dfrac{(1+\mathrm{i})^2}{2-\mathrm{i}}=\dfrac{2\mathrm{i}(2+\mathrm{i})}{(2-\mathrm{i})(2+\mathrm{i})}=\dfrac{4\mathrm{i}+2\mathrm{i}^2}{4-\mathrm{i}^2}=-\dfrac{2}{5}+\dfrac{4}{5}\mathrm{i}$，

则复数 z 在复平面内对应的点为 $\left(-\dfrac{2}{5},\dfrac{4}{5}\right)$，该点位于第二象限.

故选：B.

3．B

【分析】利用两次基本不等式判定必要性成立，通过反例说明充分性不成立.

【详解】若 $ab\ge 1$，则 $2^a+2^b\ge 2\sqrt{2^a\cdot 2^b}=2\sqrt{2^{a+b}}\ge 2\sqrt{2^{2\sqrt{ab}}}\ge 2\sqrt{2^2}=4$，

即必要性成立；

当 $a=4$，$b=\dfrac{1}{8}$ 时，$2^a+2^b\ge 4$ 成立，但 $ab=\dfrac{1}{2}$，故 $ab\ge 1$ 不成立，

即充分性不成立；

即“ $2^a+2^b\ge 4$ ”是“ $ab\ge 1$ ”的必要不充分条件.

故选：B.

4．B

【分析】先求出函数$y=\sqrt{x-1},x\geq 1$的值域，而$f\left(x\right)$的值域为R，进而得$\begin{cases}2-a<0\\2-a+3a\geq 0\end{cases}$，

由此可求出a的取值范围.

【详解】解：因为函数$y=\sqrt{x-1},x\geq 1$的值域为$[0,+\infty)$，

而$f\left(x\right)$的值域为R，所以函数$g\left(x\right)=\left(2-a\right)x+3a(x<1)$的值域包含$\left(-\infty,0\right)$，

所以$\begin{cases}2-a>0\\\left(2-a\right)\times 1+3a\geq 0\end{cases}$，解得$-1\leq a<2$，

故选：B

5．C

【分析】由题意求得$a>1$，再结合对数函数的图象与性质，合理排除，即可求解.

【详解】因为函数$y=a^{x}(a>0,a\neq 1)$的反函数是增函数，可得函数$y=a^{x}$为增函数，所以

$a>1$，

所以函数$y=-\log_{a}(x+1)$为减函数，可排除B、D；

又由当$x=0$时，$y=-\log_{a}(0+1)=0$，排除A.

故选：C.

【点睛】本题主要考查了指数函数和对数函数的图象与性质的应用，其中解答中熟记指数函数和对数函数的图象与性质，以及指数函数与对数的关系是解答的关键，着重考查推理与运算能力.

6．A

【分析】利用辅助角公式化简$f\left(x\right)=\sin 2x+a\cos 2x$，结合其图象关于点$\left(-\frac{\pi}{8},0\right)$对称，可

推出辅助角φ的表达式，结合其意义求得a的值，再$f\left(x_1\right)\cdot f\left(x_2\right)=-2$结合函数最值以及周期，即可求得答案.

【详解】由题意得$f\left(x\right)=\sin 2x+a\cos 2x=\sqrt{a^2+1}\sin(2x+\varphi)$，（

$\sin\varphi=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+1}},\cos\varphi=\dfrac{1}{\sqrt{a^2+1}}$），

由于函数$f\left(x\right)=\sin 2x+a\cos 2x$的图象关于点$\left(-\dfrac{\pi}{8},0\right)$对称，

故$2\left(-\dfrac{\pi}{8}\right)+\varphi=k\quad k\in\mathbf{Z}$，即$\varphi=\dfrac{\pi}{4}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$，

由于$\tan\varphi=a$，故$a=\tan\varphi=\tan\left(\dfrac{\pi}{4}+k\pi\right)=1,\quad k\in\mathbf{Z}$，

故$f\left(x\right)=\sqrt{2}\sin(2x+\dfrac{\pi}{4})$，最小正周期为$T=\dfrac{2\pi}{2}=\pi$，

由于$f\left(x_1\right)\cdot f\left(x_2\right)=-2$，故$f\left(x_1\right),f\left(x_2\right)$中的一个为函数最大值，另一个为最小值，

即$a\left|x_2-x_1\right|=\left|x_2-x_1\right|$的最小值为$\dfrac{T}{2}=\dfrac{\pi}{2}$，

故选：A

7．C

【分析】根据所给声音等级与声音强度的函数关系，求出声音等级即可比较得解.

【详解】∵声音的等级式$d\left(x\right)$（单位：dB）与声音强度x（单位：$\mathrm{W/m^2}$）满足

$d\left(x\right)=9\lg\dfrac{x}{1\times10^{-13}}$，

又∵老师的声音的等级约为63dB，

$\therefore 63=9\lg\frac{x}{10^{-13}}$，解得$x=10^{-6}$，即老师的声音强度约为$10^{-6}\ \mathrm{W/m^2}$，

∵两人交谈时的声音等级大约为$45\mathrm{dB}$，

$\therefore 45=9\lg\frac{x}{10^{-13}}$，解得$x=10^{-8}$，即两人交谈时的声音强度约为$10^{-8}\ \mathrm{W/m^2}$，

$\therefore$老师上课时声音强度约为两人小声交谈时声音强度的$\frac{10^{-6}}{10^{-8}}=100$倍.

故选：C

8．B

【分析】先利用分组与分配的求法求得5名航天员共有30种不同的安排方案，再利用分类加法计数原理求得甲、乙两人在同一个舱内有6种不同的安排方案，从而利用间接法即可得解.

【详解】依题意，先从5名航天员中安排1人到“梦天实验舱”，则有$\mathrm{C}_5^1=5$种安排方案，

再将剩下的4人分成两组，每组2人，则有$\frac{\mathrm{C}_4^2\mathrm{C}_2^2}{\mathrm{A}_2^2}=\frac{6\times1}{2}=3$种安排方案，

接着将这两组分配到“天和核心舱”与“问天实验舱”，有$\mathrm{A}_2^2=2$种安排方案，

所以这5名航天员的安排方案共有$5\times3\times2=30$种，

其中甲、乙两人同在“天和核心舱”内的安排方案有$\mathrm{C}_3^2\mathrm{C}_1^1=3$种，同在“问天实验舱”内的安排方案有$\mathrm{C}_3^2\mathrm{C}_1^1=3$种，

即甲、乙两人在同一个舱内做实验的安排方案有$3+3=6$种，

所以甲、乙两人不在同一个舱内做实验的安排方案有$30-6=24$种.

故选：B.

9．BD

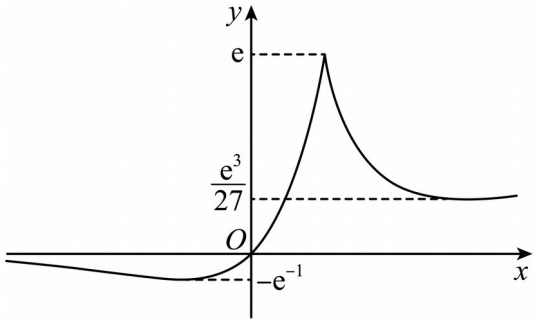
【分析】由函数零点的定义可判断A不正确，根据函数$f(x)$的单调性，结合图像可判断B与D是否正确，根据函数$g(x)$的单调性与极值情况，结合图像可确定a的取值范围，可判断选项C.

【详解】令$f(x)=0$，可得$x=0$，$x=0$是函数$f(x)$的零点，零点是实数0，不是点$(0,0)$，A错误；

因为$f'(x)=\begin{cases}(x+1)\mathrm{e}^2, x<1\\ \dfrac{(x-3)\mathrm{e}^x}{x^4}, x\geq 1\end{cases}$，当$x<-1$时，$f'(x)<0$，当$-1<x<1$时，$f'(x)>0$，当$1<x<3$时，$f'(x)<0$，当$x>3$时，$f'(x)>0$，

所以$f(x)$在$(-\infty,-1)$上单调递减，在$(-1,1)$上单调递增，在$(1,3)$上单调递减，在$(3,+\infty)$上单调递增，且$f(x)$的极小值为$f(-1)=-\mathrm{e}^{-1}$和$f(3)=\dfrac{\mathrm{e}^3}{27}$，且$f(1)=\mathrm{e}$，

当$x<0$时，$f(x)<0$，当$x>0$时，$f(x)>0$，如图，作出函数$f(x)$的图像，



观察图像可知，$\exists x_1\in(0,1)$，$\exists x_2\in(1,3)$，使$f(x_1)>f(x_2)$，所以B正确；

函数$f(x)$的值域为$\left[-\mathrm{e}^{-1},+\infty\right)$，D正确；

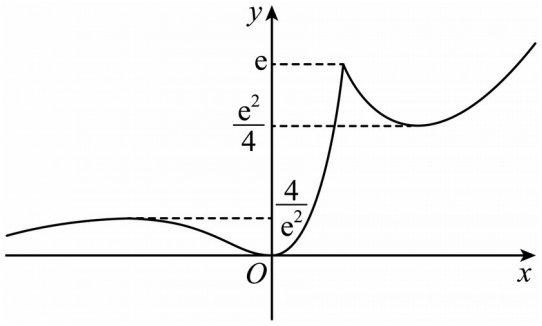
对于C，由 $g(x)-2a=0$ 得 $g(x)=2a$，因为 $g(x)=xf(x)=\begin{cases}x^2\mathrm{e}^x,x<1\\ \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^2},x\geq 1\end{cases}$，则

$g'(x)=\begin{cases}(x^2+2x)\mathrm{e}^x,x<1\\ \dfrac{(x-2)\mathrm{e}^x}{x^3},x\geq 1\end{cases}$，

令 $g'(x)=0$，得 $x=-2$ 或 $x=0$ 或 $x=2$，当 x 变化时，$g'(x)$，$g(x)$ 的变化情况，如下表

x	$(-\infty,-2)$	-2	$(-2,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,2)$	2	$(2,+\infty)$
$g'($	＋	0	－	0	＋		－	0	＋
$g($	递增	$\dfrac{4}{\mathrm{e}^2}$	递减	0	递增	e	递减	$\dfrac{\mathrm{e}^2}{4}$	递增

如图，



当 $\frac{4}{\mathrm{e}^2}<2a<\frac{\mathrm{e}^2}{4}$ 或 $2a>e$ 或 $2a=0$ 时，关于 x 的方程 $g(x)-2a=0$ 有一个根，所以 a 的取值范围是 $\left(\frac{2}{\mathrm{e}^2},\frac{\mathrm{e}^2}{8}\right)\cup\left(\frac{\mathrm{e}}{2},+\infty\right)\cup\{0\}$，C不正确.

故选：BD.

10．ABC

【分析】利用互斥事件的概率加法公式判断选项AC；利用独立事件的乘法公式判断选项B；举反例判断选项D.

【详解】对于A，根据互斥事件的概率加法公式即可判断A正确；

对于B，若事件A，B相互独立，则$\overline{A}$，$\overline{B}$也相互独立，所以$P\left(\overline{A}\overline{B}\right)=P\left(\overline{A}\right)P\left(\overline{B}\right)$，故B正确；

对于C，根据互斥事件的概率加法公式即可判断C正确；

对于D，例如，从1，2，3，4中随机选出一个数字，记事件$A=$“取出的数字为1或2”，$B=$“取出的数字为1或3”，$C=$“取出的数字为1或4”，则$AB=AC=BC=ABC=$“取出的数字为1”，

显然$P(A)=P(B)=P(C)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$，

$P(AB)=P(AC)=P(BC)=P(ABC)=\frac{1}{4}$，

满足$P\left(AB\right)=P\left(A\right)P\left(B\right)$，$P\left(AC\right)=P\left(A\right)P\left(C\right)$，$P\left(BC\right)=P\left(B\right)P\left(C\right)$，

所以事件A，B，C两两独立，但是$P\left(ABC\right)\neq P\left(A\right)\cdot P\left(B\right)P\left(C\right)$，故D错误.

故选：ABC.

11．BC

【分析】利用频率分布直方图，用样本估计总体，样本的极差、平均值、百分位数相关知识计算即可.

【详解】因为由频率分布直方图无法得出这组数据的最大值与最小值，

所以这组数据的极差可能为70，也可能为小于70的值，所以A错误；

因为$(a+0.008+2a+0.012+0.015+4a+0.030)\times10=70a+0.65=1$，解得$a=0.005$，

所以B正确；

该校竞赛成绩的平均分的估计值$\overline{x}=55\times0.005\times10+65\times0.008\times10+$

$75\times0.012\times10+85\times0.015\times10+95\times0.030\times10+105\times4\times0.005\times10+115\times2\times0.005\times10=90.7$分，

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：https://d.book118.com/598124043133006024