第三章 导数的应用

第一节 微分中值定理与洛必达法则

一　微分中值定理

- 微分中值定理
  - 罗尔中值定理
  - 拉格朗日中值定理
  - 柯西中值定理

微分中值定理是一系列中值定理的总称，是研究函数的有力工具，中值定理揭示了函数在某区间上的整体性质和函数在该区间的某一点的导数之间的关系。

定理1（罗尔中值定理）

若函数$y=f(x)$满足以下3个条件:

（1）在闭区间$[a,b]$上连续

（2）在开区间(a,b)内可导

（3） $f(a)=f(b)$

则在开区间(a,b)内至少存在一点ξ, 使得$f'(\xi)=0$.

证 因为$f(x)$在$[a,b]$上连续，故$f(x)$在$[a,b]$上至少有一个最大值M和最小值m。

若$M=m$，则函数$y=f(x)$在$[a,b]$上恒为常数，故对任意$\xi\in(a,b)$都有$f'(\xi)\equiv 0$.

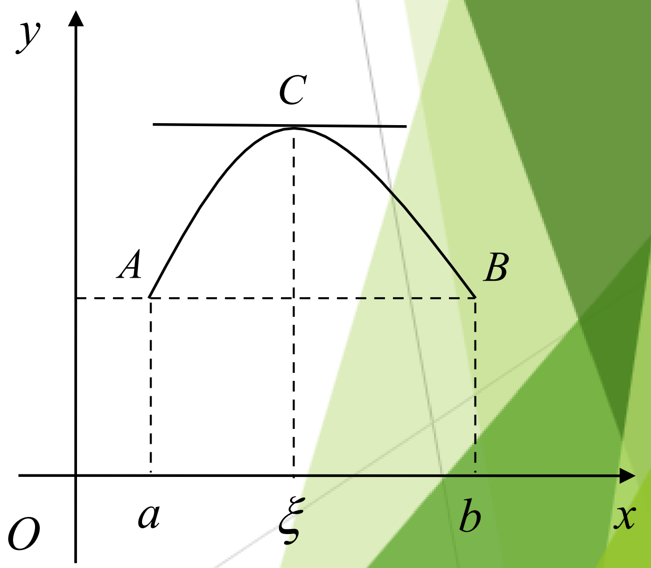
若$M\neq m$ 由于$f(a)=f(b)$，则最大值M和最小值m至少有一个在区间内部取得，不妨设有一点$\xi\in(a,b)$使$f(\xi)=M$（如图3—1）．从而有

$$f'_-(\xi)=\lim_{x\to\xi^-}\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}\geqslant 0$$

$$f'_+(\xi)=\lim_{x\to\xi^+}\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}\leqslant 0$$

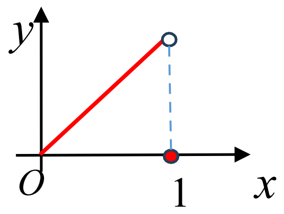
故$f'(\xi)=0$.

罗尔定理的几何意义：函数曲线$y=f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，处处有切线，且两端点函数值相等，那么在AB上至少有一条切线是水平的。

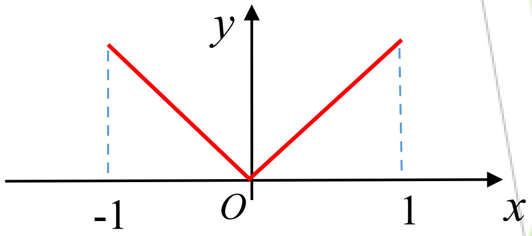


注意：定理条件有一条不满足，则该结论不一定成立

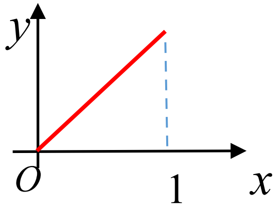
条件(1)不满足(不连续)：$f(x)=\begin{cases} x, & 0\le x<1 \\ 0, & x=1 \end{cases}$



条件(2)不满足(不可导)：$f(x)=|x|, x\in[-1,1]$



条件(3)不满足(端点值不相等)：$f(x)=x, x\in[0,1]$



定理2（拉格朗日中值定理）

若函数$y=f(x)$满足以下2个条件：

（1）在闭区间$[a,b]$上连续

（2）在开区间(a,b)内可导

则在开区间(a,b)内至少存在一点ξ，使得$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

或$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$

拉格朗日中值公式

证 作辅助函数$\varphi(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}x$

显然，$\varphi(x)$在$[a, b]$上连续，在(a, b)内可导，$\varphi'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

且$\varphi(a) = \varphi(b) = \frac{bf(a)-af(b)}{b-a}$，

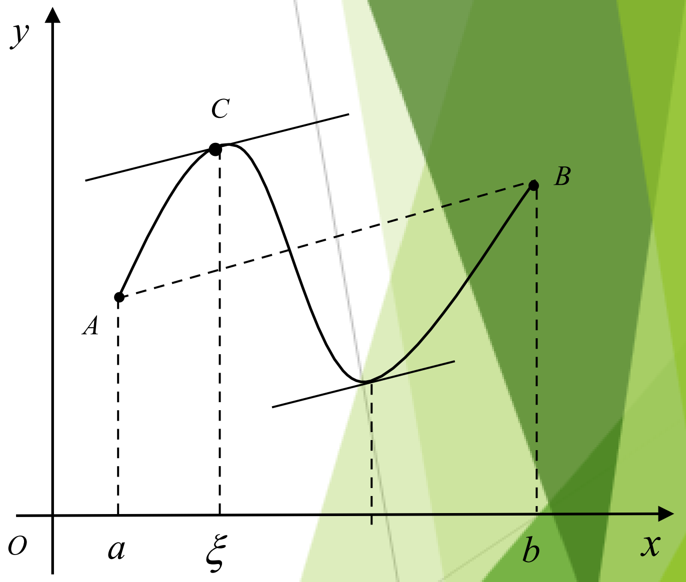
由罗尔定理知至少存在一点$\xi \in (a, b)$

使$\varphi'(\xi) = 0$即$\varphi'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$,

得$f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

拉格朗日中值定理的几何意义也明显：若 $f(a) \neq f(b)$，即弦AB不是水平的．通过罗尔定理几何意义的启发，仍可以直观地看到，光滑曲线弧AB上至少应有一点C具有平行于弦AB的切线，从而斜率相等，即$f'(\xi) = k_{AB} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

很显然，如果取$f(a) = f(b)$ ，那么$f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$，这样就变成罗尔中值定理了，因此罗尔中值定理是拉格朗日中值定理的特例.



例1 证明当$x > 0$时，$\frac{x}{x+1} < ln(1+x) < x$.

证明 设$f(x) = ln(1+x)$,

显然，$f(x)$在$[0,x]$上满足拉格朗日中值定理的条件，
有$f(x) - f(0) = f'(\xi)(x-0)(0 < \xi < x)$.

因为$f(0) = 0, f'(\xi) = \frac{1}{1+\xi}$,

故 $ln(1+x) = \frac{x}{1+\xi}(0 < \xi < x)$.

由于$0 < \xi < x$,

所以$\frac{x}{x+1} < \frac{x}{1+\xi} < x$, 即 $\frac{x}{1+x} < ln(1+x) < x \quad (x > 0)$.

作为拉格朗日中值定理的应用，有如下推论:

推论1 若函数$f(x)$在区间I上的导数恒为零，则$f(x)$在区间I上是一个常数.

证 在区间I上任取两点x_1, x_2, 且$x_1 < x_2$,

函数$y = f(x)$在$[x_1, x_2]$上满足拉格朗日中值定理的条件,

故有$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1), (x_1 < \xi < x_2)$。

由题设知，$f'(x)=0$,

所以有$f(x_2) - f(x_1) = 0$即$f(x_1) = f(x_2)$.

由x_1, x_2的任意性知$f(x)$在I上为常数.

由推论1立即可得:

推论2 若函数$f(x)$与$g(x)$在区间I上恒有$f'(x) = g'(x)$ ，则在区间I上$f(x)$与$g(x)$至多相差一个常数，即$f(x) = g(x) + C$(C为常数).

例2　证明$arcsin\,x + arccos\,x = \frac{\pi}{2}\ (-1 \le x \le 1)$.

证明　设$f(x) = arcsin\,x + arccos\,x\,, x \in [-1,1]$,

$$\because f'(x) = \frac{1}{\quad} + \left(-\frac{1}{\quad}\right) = 0$$

$$\therefore f(x) = C$$

又$\because f(0) = \frac{\pi}{\ }$

$$\therefore arcsin\,x + arccos\,x = \frac{\pi}{2}$$

同理可证$arctanx + arccotx = \frac{\pi}{2}$

定理3（柯西中值定理）

若函数$f(x)$及$g(x)$满足:

(1) 在闭区间$[a,b]$上连续

(2) 在开区间(a,b)内可导

(3) 开区间(a,b)内, $g'(x) \neq 0$在(a,b)

则在开区间(a,b)内至少存在一点ξ, 使$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$.

证 作辅助函数$\varphi(x)=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g(x)-f(x)$

显然，$\varphi(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导, $\varphi'(x)=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(x)-f'(x)$

且$\varphi(a)=\varphi(b)=\frac{f(b)g(a)-f(a)g(b)}{g(b)-g(a)}$，

由罗尔定理知至少存在一点$\xi\in(a,b)$

使$\varphi'(\xi)=0$即$\varphi'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(\xi)-f'(\xi)=0$

得$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$

显然，如果取$g(x)=x$ ，那么$g(b)-g(a)=b-a, g'(x)=1$，从而柯西中值公式就可以写成：

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a) \qquad (a<\xi<b).$$

这样就变成拉格朗日中值公式了，因此拉格朗日中值定理是柯西中值定理在取$g(x)=x$时的特例. 所以柯西中值定理又称为广义中值定理.

二　洛必达法则

1. 未定式

当$x \to x_0$（$\to \infty$），若两个函数$f(x)$与$g(x)$都趋于零或者都趋于无穷大，则极限$\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$可能存在，也可能不存在．通常把这种极限叫做**未定式**，并简记为“$\frac{0}{0}$”型或“$\frac{\infty}{\infty}$”型．例如，

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$为$\frac{0}{0}$型，$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x}$为$\frac{\infty}{\infty}$型．

“$\frac{0}{0}$”型 $\longrightarrow$

对于式子中没有三角函数，也没有根号的用因式分解，有根号的情况下用根式有理化，有三角函数的用三角函数的性质或者$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$求解.

“$\frac{\infty}{\infty}$”型 $\longrightarrow$

对于含x次幂的分式可以使用分子分母同除x次幂的方法且分为以下三种情况

1. 当分子分母最高次方一样大时，结果为分子最高项系数除以分母最高项系数；
2. 当分母最高次方比分子最高次方大时，结果为0；
3. 当分子最高次方比分母最高次方大时，结果为∞.

定理4 设函数$f(x), g(x)$满足:

（1）$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$ 或 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \infty$

（2）在x_0附近$f(x)$、$g(x)$都可导，且$g'(x) \neq 0$;

（3）$\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$（或为$\infty$）.

则 $$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A(\text{或}\infty).$$

例3 求$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin 5x}$

解 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin 5x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\sin 3x)'}{(\sin 5x)'}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{3\cos 3x}{5\cos 5x}=\frac{3}{5}.$

注意：使用洛必达法则时，发现$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$还未脱离$\frac{0}{0}$或$\frac{\infty}{\infty}$状态，则可继续使用洛必达法则进行求解，直到脱离$\frac{0}{0}$或$\frac{\infty}{\infty}$状态为止.

例4　求$\lim\limits_{x\to1}\frac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}$

解　$\lim\limits_{x\to1}\frac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{(x^3-3x+2)'}{(x^3-x^2-x+1)'}$

$=\lim\limits_{x\to1}\frac{3x^2-3}{3x^2-2x-1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{6x}{6x-2}=\frac{3}{2}.$

例5 求$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^n}{e^x}$（$n$为正整数）.

解 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^n}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{nx^{n-1}}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{n(n-1)x^{n-2}}{e^x}=\cdots=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{n!}{e^x}=0.$

“$\frac{0}{0}$” 型和 “$\frac{\infty}{\infty}$” 型是未定式的两种最基本类型，其它类型的未定式还有 :$0\cdot\infty$型、$\infty-\infty$型、0^0型、1^∞型、∞^0 型等，特别的， 0^0型、1^∞型、∞^0 型可以使用$y=e^{lny}$ 求解． 其它类型未定式一般都可以通过适当的方法化为$\frac{0}{0}$或$\frac{\infty}{\infty}$型未定式来计算.

例6 $\lim\limits_{x\to0^+} x\cdot \ln x.$

解 $\lim\limits_{x\to0^+} x\cdot \ln x=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to0^+}(-x)=0.$

例7　求 $\lim\limits_{x\to 0^+}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$

解　这是1^∞型未定式, $(\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\ln(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}} = e^{\frac{\ln\cos x}{x^2}}$,

$$\lim_{x\to 0^+}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln\cos x}{x^2}} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{-\tan x}{2x}} = e^{-\frac{1}{2}}.$$

本节的定理只能用于$\frac{0}{0}$或$\frac{\infty}{\infty}$型的函数的极限, 对其他未定型必须先化为两种类型之一, 然后才能用洛必达法则. 同时, 即使是$\frac{0}{0}$或$\frac{\infty}{\infty}$型, 当$lim\frac{f'(x)}{g'(x)}$不存在的时候, 不能断定$lim\frac{f(x)}{g(x)}$也不存在, 只是这时不能用洛必达法则, 而需要用其他的方法来求$lim\frac{f(x)}{g(x)}$.

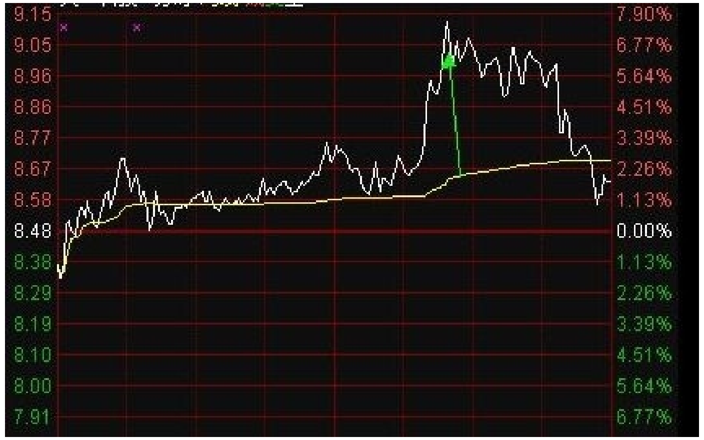
例8 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x+\cos x}$

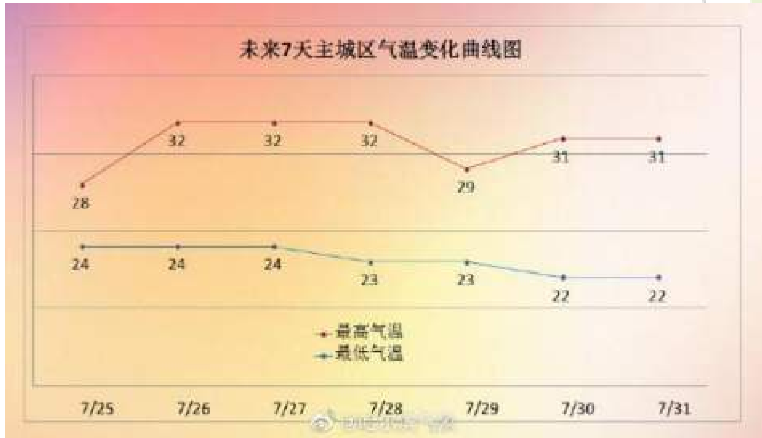
解 此题为$\frac{\infty}{\infty}$型，由于极限$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x+\sin x)'}{(x+\cos x)'}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+\cos x}{1-\sin x}$，这时极限不存在，也不为无穷大，故不能用洛必达法则，但是$x\to\infty$时$\frac{1}{x}$为无穷小，$\sin x$，$\cos x$是有界函数，有$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x+\cos x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+\sin x\cdot\frac{1}{x}}{1+\cos x\cdot\frac{1}{x}}=1$.

第三章 导数的应用

第二节 函数的单调性与极值

在日常生活中，我们常常见到很多变化曲线图，如股票走势图，每日气温变化图等，可以很直观的观察股票或者温度的走势。但是对于很多函数来说，没有计算机软件很难画出函数的图像，那么如何来判断函数的变化趋势呢？

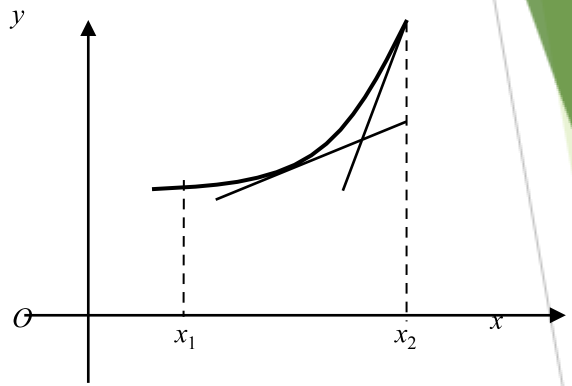




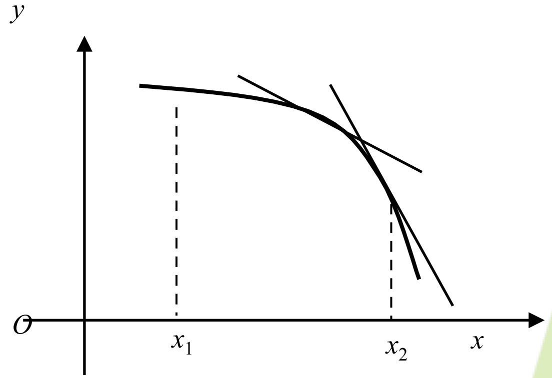
利用函数单调性的定义或函数的图像来判断函数的单调性是非常困难的，导数是一种有力的工具，本节我们介绍利用导数来判断函数单调性的方法.

1． 函数单调性的判定

如果函数$y=f(x)$在$[a, b]$上单调增加，其图像是一条沿x轴正向上升的曲线，曲线在各点处的切线斜率是非负.



如果函数$y=f(x)$在$[a, b]$上单调减少，其图像是一条沿x轴正向下降的曲线，曲线在各点处的切线斜率是非正的.



定理1　单调性判定定理

设函数$y=f(x)$在$[a,b]$上连续，在$(a,\ b)$内可导.

(1) 若在$(a,\ b)$内$f'(x)>0$，则函数$y=f(x)$在$[a,b]$上单调增加;

(2) 若在$(a,\ b)$内$f'(x)<0$，则函数$y=f(x)$在$[a,b]$上单调减少.

证（1）在$[a,b]$上任取两点$x_1,x_2(x_1<x_2)$．在$[x_1,x_2]$上应用拉格朗日中值定理，得

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1)\quad (x_1<\xi<x_2)$$

在上式中，$x_2-x_1>0$，因此，若在$(a,\ b)$内导数$f'(x)$保持正号，即$f'(x)>0$，那么也有$f'(\xi)>0$．于是

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1)>0,$$

故$f(x_1)<f(x_2)$.即函数$y=f(x)$在$[a,b]$上单调增加.

类似地，可以证明$f'(x)<0$的情形.

注1 判定法不仅对闭区间成立，对其他各种区间（开区间、半开半闭区间或无穷区间等）均适用.

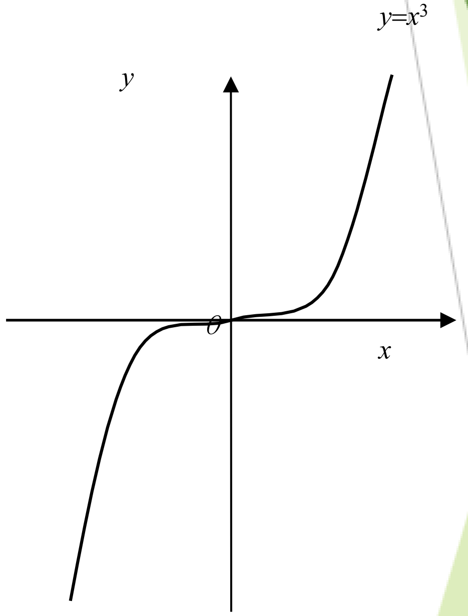
注2 单调性是函数在一个区间上的性质，如果在某区间内的有限个点处$f'(x)$为零或不存在，在其余各点处均为正（或负）时，那么$f(x)$在该区间上仍旧是单调增加（或单调减少）的.

例1 判定函数$y = x - \cos x$在$[0, \pi]$上的单调性.

解 在$(0, \pi)$内，均有 $y' = 1 + \sin x > 0$，故函数$y = x - \cos x$在$[0, \pi]$上单调增加.

例2　讨论函数$y=x^3$的单调性.

解　函数$y=x^3$的定义域为:$(-\infty,+\infty)$．导数为$y'=3x^2$．除当$x=0$时，$y'=0$外在其余各点处均有$y'>0$．因此函数$y=x^3$在区间$(-\infty,0)$及$(0,+\infty)$内都是单调增加的．从而在整个定义域$(-\infty,+\infty)$内是单调增加的．在$x=0$处曲线有一水平切线（即x轴）.



综上所述，求函数$y=f(x)$的单调区间我们可以按如下一般步骤进行：

（1）确定函数$y=f(x)$的定义域；

（2）求出导数$f'(x)$；

（3）求出函数$y=f(x)$的驻点和不可导点；

（4）用上述驻点和不可导点将函数$f(x)$的定义域分成若干子区间，列表讨论在每个子区间上$f'(x)$的符号，并利用定理1判断$f(x)$在每个区间上的单调性.

例3　确定函数$f(x)=3x-x^3$的单调区间.

解　函数的定义域为$(-\infty,+\infty)$；函数的导数为$f'(x)=3-3x^2=3(1+x)(1-x)$；令$f'(x)=0$，得驻点：$x_1=-1, x_2=1$；无不可导点；

列表讨论如下：

x	$(-\infty,-1)$	$(-1,+1)$	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$

由表可见，函数$f(x)$在区间$(-\infty,-1)$及$(1,+\infty)$上单调减少，在区间$(-1,1)$上单调增加.

例4 已知函数$f(x) = \frac{e^x}{x-a}$（其中$a < 0$），求函数的定义域及单调区间.

解 函数的定义域为$(-\infty, a) \cup (a, +\infty)$;

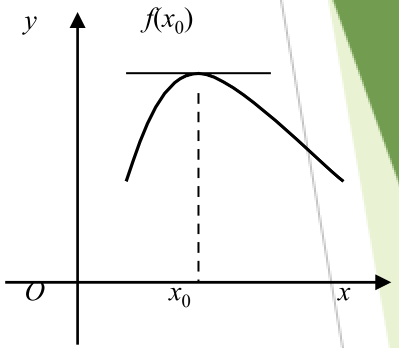
又$f'(x) = \frac{e^x[x-(a+1)]}{(x-a)^2}$,

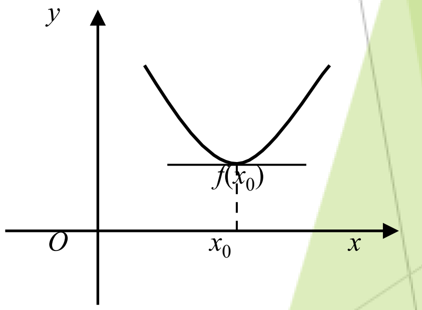
令$f'(x) = 0$，则$x = a + 1$,

故函数在$(-\infty, a)$上单调递减，在$(a, a + 1)$上单调递减，在$(a + 1, +\infty)$上单调递增.

定义2　设函数$f(x)$在区间(a,b)内有定义，$x_0 \in (a,b)$．如果在x_0的某一邻域内恒有$f(x) < f(x_0)$，则称$f(x_0)$是函数$f(x)$的一个**极大值**，称x_0是函数$f(x)$的一个**极大值点**；

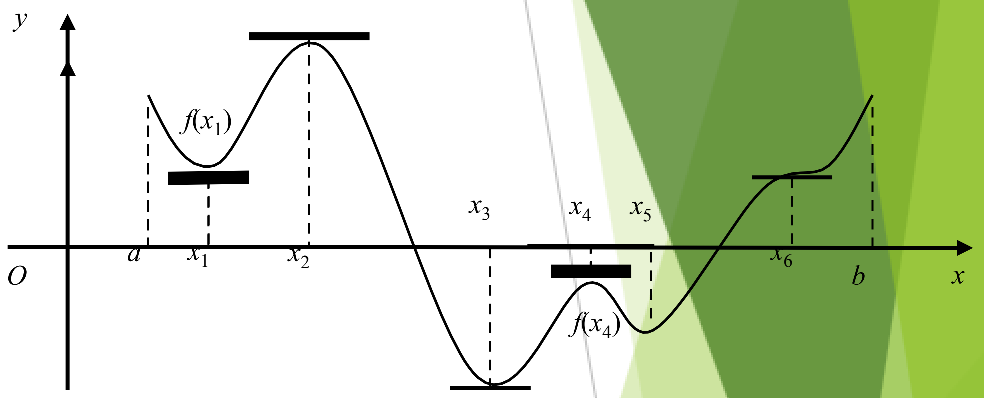
如果在x_0的某一邻域内恒有$f(x) > f(x_0)$，则称$f(x_0)$是函数$f(x)$的一个**极小值**，称x_0是函数$f(x)$的一个**极小值点**.





函数的极大值和极小值统称为函数的**极值**，使函数取得极值的点（极大值点和极小值点）统称为**极值点**.

函数的极值是局部性概念．如果$f(x_0)$是函数$f(x)$的一个极大值，只意味在x_0的一个邻域内，$f(x_0)$是一个最大值，而对于$f(x)$的整个定义域来说，$f(x_0)$不一定是最大的，甚至比极小值还小．$f(x_4)$是函数的一个极大值，而$f(x_1)$是函数的一个极小值，但$f(x_4)$显然小于$f(x_1)$．



从上图中我们还可以看到，在函数的极值点处，曲线的切线都是水平的，例如图中的点x_1，x_2，x_3，x_4等处．但曲线上有水平切线的地方，函数却不一定取得极值，例如图中的点x_6处．

定理2　极值的必要条件

若函数$f(x)$在点x_0处可导且取得极值，则$f'(x_0)=0$.

上述定理告诉我们，可导函数的极值点必定是驻点，但驻点却不一定是极值点.

例5　函数$y=x^3$，其导数为$y'=3x^2$，令$y'=0$，得$x=0$是其驻点，但不是极值点.