2024-2025 学年度上学期广东省三校“决胜高考，梦圆乙巳”第一次联合模拟考试

数学试卷

注意事项：

1.答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上.

2.回答选择题时，选出每小题答案后，请 2B 用铅笔把答题卡对应题目的答案标号涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号.回答非选择题时，将答案写在答题卡上，写在试卷上无效.

3.考试结束后，本试卷和答题卡一并交回

第 I 卷（选择题）

一、单选题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 一个圆台的上、下底面的半径分别为 1 和 4，高为 4，则它的表面积为（　　）

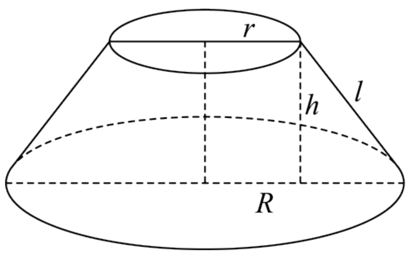
A. 41π　　B. 42π　　C. $29\sqrt{3}\pi$　　D. $\left(18+7\sqrt{3}\right)\pi$

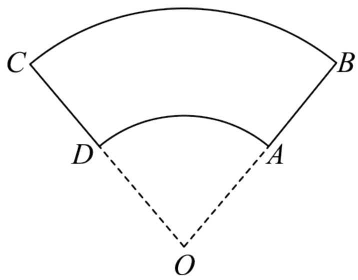
【答案】B

【解析】

【分析】利用圆台的表面积公式即可.

【详解】





依题意，设圆台的高为 $h=4$，所以圆台的母线长为 $\sqrt{(4-1)^2+4^2}=5$，

则圆台的表面积为 $\pi\left(1^2+4^2\right)+\pi(1+4)\times 5=42\pi$，

故选：B.

2. 某校高一年级有 400 名学生, 高二年级有 360 名学生, 现用分层抽样的方法在这 760 名学生中抽取一个样本. 已知在高一年级中抽取了 60 名学生, 则在高二年级中应抽取的学生人数为

A. 66　　B. 54　　C. 40　　D. 36

【答案】B

【解析】

【分析】

先算出总人数中高二与高一学生人数之比，再由抽取的样本中高二与高一学生人数之比不变求出高二应抽取人数.

【详解】解：在总人数中高二与高一学生人数之比为 360：400=9:10

所以在抽取的样本中高二与高一学生人数之比仍为 360：400=9:10

因为高一抽取了 60 人，所以高二应抽取 54 人

故选 B.

【点睛】本题考查了分层抽样，属于基础题.

3. 已知点 F，A 分别是椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左焦点、右顶点，$B(0,b)$ 满足 $\overrightarrow{FB}\cdot\overrightarrow{AB}=0$，则椭圆的离心率等于（　　）

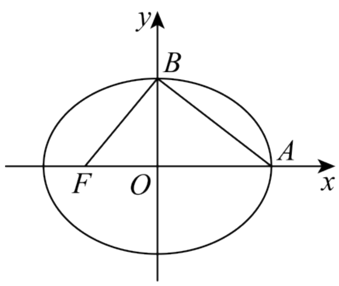
A. $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$

【答案】B

【解析】

【分析】首先根据 $\overrightarrow{FB}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ 推断出 $FB\perp AB$，进而根据勾股定理可知 $|FB|^2+|AB|^2=(a+c)^2$，把进而整理关于 a 和 c 的方程求得 $\frac{c}{a}$ 即离心率 e 的值.

【详解】



$\because \overrightarrow{FB}\cdot\overrightarrow{AB}=0$，$\therefore FB\perp AB$，

$\therefore |FB|^2+|AB|^2=(a+c)^2$，即 $b^2+c^2+a^2+b^2=(a+c)^2$，

整理得 $2ac-2b^2=0$，即 $c^2+ac-a^2=0$，

等号两边同时除以a^2得$\frac{c^2}{a^2}+\frac{c}{a}-1=0$，即$e^2+e-1=0$，求得$e=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$，

$\because 0<e<1$，$\therefore e=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$，

故选：B.

4. 由数字 1，2，3，4，5 组成没有重复数字的五位数，其中偶数共有（　　）

A. 60 个　　B. 48 个　　C. 36 个　　D. 24 个

【答案】B

【解析】

【分析】由题意得，可分两步进行求解：第一步，先对末位排序，第二步再对前四位排序，根据分步计数原理，可求得结果.

【详解】由题意得，末位一定为 2，4 中的一个，所以有 2 种排法，

前面四位数全排列共有$A_4^4=24$种排法，

故没有重复数字的五位偶数的个数为$2A_4^4=2\times 24=48$个.

故选：*B*.

【点睛】本题考查排列知识的应用，考查学生对基础知识的掌握程度，属基础题.

5. 已知$f(x)$是定义在R上的奇函数，且$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，$f(2)=0$，则$(x-1)\cdot f(x)<0$的解集为（　　）

A. $(-2,2)$　　B. $(1,2)$　　C. $(-2,0)\cup(1,2)$　　D. $(-2,+\infty)$

【答案】C

【解析】

【分析】根据函数$f(x)$的奇偶性以及在$(0,+\infty)$上单调递增，判断出$f(x)$的值的正负情况，解不等式$(x-1)\cdot f(x)<0$即可得答案.

【详解】由题意得，$f(-2)=f(2)=0$，$f(x)$在$(-\infty,0)$，$(0,+\infty)$上为增函数，

当$x\in(-\infty,-2)\cup(0,2)$时，$f(x)<0$，当$x\in(-2,0)\cup(2,+\infty)$时，$f(x)>0$，

由$(x-1)f(x)<0$可得，$\begin{cases}x-1>0\\f(x)<0\end{cases}$或$\begin{cases}x-1<0\\f(x)>0\end{cases}$，

解得$\begin{cases}x>1\\x<-2或0<x<2\end{cases}$或$\begin{cases}x<1\\-2<x<0或x>2\end{cases}$，

综上所述，$1<x<2$或$-2<x<0$.

故选：C.

6. 19世纪的法国数学家卢卡斯以研究斐波那契数列而著名，以他的名字命名的卢卡斯数列$\{a_n\}$满足

$a_1=1,a_2=3,a_{n+2}=a_n+a_{n+1}$，若其前$n$项和为$S_n$，则$S_{10}=$（　　）

A. a_{12}　　　　B. $a_{12}-1$　　　　C. $a_{12}-2$　　　　D. $a_{12}-3$

【答案】D

【解析】

【分析】根据递推公式累加即可.

【详解】因为$a_{n+2}=a_n+a_{n+1}$,所以$a_n=a_{n+2}-a_{n+1}$,

累加得：

$S_{10}=a_1+a_2+\cdots+a_{10}=(a_3-a_2)+(a_4-a_3)+\cdots+(a_{12}-a_{11})=a_{12}-a_2$,

即$S_{10}=a_{12}-3$.

故选：D.

7. 已知向量$\vec{a}=(1,t)$，$\vec{b}=(-3,1)$，且$(2\vec{a}+\vec{b})\perp\vec{b}$，则向量$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角等于（　　）

A. $\frac{\pi}{4}$　　　　B. $\frac{\pi}{3}$　　　　C. $\frac{2\pi}{3}$　　　　D. $\frac{3\pi}{4}$

【答案】D

【解析】

【分析】利用向量垂直则数量积为零，可求出t，再由利用向量数量积的坐标运算求向量的夹角即可.

【详解】由$\vec{a}=(1,t)$，$\vec{b}=(-3,1)$，得$2\vec{a}+\vec{b}=(-1,2t+1)$，

由$(2\vec{a}+\vec{b})\perp\vec{b}$，得$-1\times(-3)+(2t+1)\times1=0$，解得$t=-2$，则$\vec{a}=(1,-2)$，

则$|\vec{a}|=\sqrt{1^2+(-2)^2}=\sqrt{5}$，$|\vec{b}|=\sqrt{(-3)^2+1^2}=\sqrt{10}$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=1\times(-3)+(-2)\times1=-5$，

因此$\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{-5}{\sqrt{5}\times\sqrt{10}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$，而$\langle\vec{a},\vec{b}\rangle\in[0,\pi]$，

所以$\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=\frac{3\pi}{4}$.

故选：D

8. 设函数 $f(x)=x^3-x^2+2x$，则

A. 函数 $f(x)$ 无极值点

B. $x=1$ 为 $f(x)$ 的极小值点

C. $x=2$ 为 $f(x)$ 的极大值点

D. $x=2$ 为 $f(x)$ 的极小值点

【答案】A

【解析】

【分析】

求出函数的导函数 $f'(x)=3x^2-2x+2$，即可求得其单调区间，然后求极值.

【详解】解：由函数 $f(x)=x^3-x^2+2x$ 可得：$f'(x)=3x^2-2x+2=3(x-\frac{1}{3})^2+\frac{5}{3}>0$，

∴函数 $f(x)$ 在 R 上单调递增.

∴函数 $f(x)=x^3-x^2+x$ 的单调递增区间为 $(-\infty,+\infty)$.

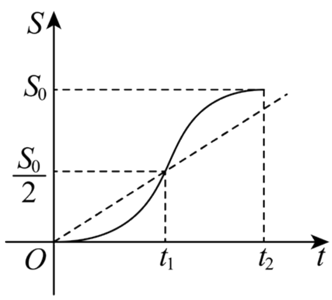
∴函数 $f(x)$ 无极值点.

故选 A.

【点睛】本题主要考查了利用导数求函数的极值，属于基础题.

二、多选题：本题共 3 小题，共 15 分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.

9. 午饭时间；B 同学从教室到食堂的路程 S 与时间 t 的函数关系如图，记 t 时刻的瞬时速度为 $V(t)$，区间 $[0,t_1],[0,t_2],[t_1,t_2]$ 上的平均速度分别为 V_1,V_2,V_3，则下列判断正确的有（　　）



A. $V_1<V_2<V_3$

B. $\frac{V_1+V_3}{2}<V_2$

C. 对于 $V_i(i=1,2,3)$，存在 $m_i\in(0,t_2)$，使得 $V(m_i)=V_i$

D. 整个过程小明行走的速度一直在加快

【答案】AC

【解析】

【分析】可通过题意，分别表示出V_1，V_2，V_3，再根据选项 A，B 进行比大小，即可确定；选项 C 可根据图像，由线与直线的交点，即可判断，选项 D，可以观察曲线在各点处的切线方程的斜率，即可判断.

【详解】由题意可知；$V_1=\dfrac{\dfrac{S_0}{2}-0}{t_1-0}=\dfrac{S_0}{2t_1}$，$V_2=\dfrac{S_0-0}{t_2-0}=\dfrac{S_0}{t_2}$，$V_3=\dfrac{S_0-\dfrac{S_0}{2}}{t_2-t_1}=\dfrac{S_0}{2(t_2-t_1)}$，

由图像可知$t_1<t_2$，$t_2-t_1<t_1$，即$2t_1>t_2$，因此$V_1=\dfrac{S_0}{2t_1}<V_2=\dfrac{S_0}{t_2}$，$t_2-2(t_2-t_1)=2t_1-t_2>0$，

所以$t_2>2(t_2-t_1)$，因此$V_2=\dfrac{S_0}{t_2}<V_3=\dfrac{S_0}{2(t_2-t_1)}$，此时$V_1<V_2<V_3$，故 A 正确；

由$V_1+V_3-2V_3=S_0(\dfrac{1}{2t_1}+\dfrac{1}{2(t_2-t_1)}-\dfrac{2}{t_2})$，可化为

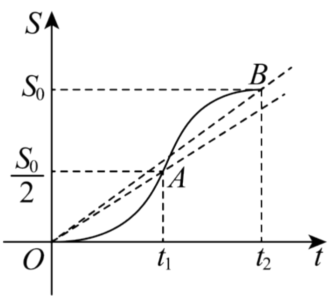
$\dfrac{t_2}{2t_1(t_2-t_1)}-\dfrac{2}{t_2}=\dfrac{{t_2}^2-4t_1(t_2-t_1)}{2t_1t_2(t_2-t_1)}=\dfrac{(t_2-t_1)^2}{2t_1t_2(t_2-t_1)}>0$，故$\dfrac{V_1+V_3}{2}>V_2$，故 B 不正确；

由图像可知，直线与曲线的交点为$(t_1$，$\dfrac{S_0}{2})$，故存在$m_i\in(0,t_2)$，使得$V(m_i)=V_i$，即当$m_i=t_1$时，

$V(V_1)=V_1$，故 C 正确；

t时刻的瞬时速度为$V\left(t\right)$,判断平均速度的快慢，可以看整个曲线在各点处的切线方程的斜率，

由图象可知，当$t=t_1$时，切线方程的斜率最大，



故而在此时，速度最快，故 D 不正确.

故选：AC.

10. 对于函数$f\left(x\right)=\dfrac{x}{\ln x}$，下列说法正确的是（　　）

A. $f\left(x\right)$在$\left(0,\mathrm{e}\right)$上单调递减，在$\left(\mathrm{e},+\infty\right)$上单调递增

B. 当$0<x_1<x_2<1$时，$x_1\cdot\ln x_2>x_2\cdot\ln x_1$

C. 若函数$y=f\left(\left|x\right|\right)-k(k\in\mathrm{R})$有两个零点，则$k=\mathrm{e}$

D. 设$g\left(x\right)=x^2+a\left(a\in\mathrm{R}\right)$，若对$\forall x_1\in\mathbf{R}$，$\exists x_2\in(1,+\infty)$，使得$g\left(x_1\right)=f\left(x_2\right)$成立，则$a\geq\mathrm{e}$

【答案】BD

【解析】

【分析】根据函数的定义域即可判断 A；利用导数判断函数$f\left(x\right)$在$\left(0,1\right)$上的单调性即可判断 B；求出函数$f\left(x\right)$的单调区间，作出函数$y=f\left(\left|x\right|\right)$的图象，结合图象即可判断 C；结合 C 选项即可判断 D.

【详解】对于 A 选项，$f\left(x\right)=\dfrac{x}{\ln x}$的定义域为$\left(0,1\right)\cup\left(1,+\infty\right)$，所以 A 选项错误；

对于 B 选项，$f'\left(x\right)=\dfrac{\ln x-1}{\left(\ln x\right)^2}$，当$0<x<1$时，$f'\left(x\right)<0$，$f\left(x\right)$递减，

由于$0<x_1<x_2<1$，所以$f\left(x_1\right)>f\left(x_2\right),\dfrac{x_1}{\ln x_1}>\dfrac{x_2}{\ln x_2}$，

由于$\ln x_1<0,\ln x_2<0,\left(\ln x_1\right)\cdot\left(\ln x_2\right)>0$，

所以由$\dfrac{x_1}{\ln x_1}>\dfrac{x_2}{\ln x_2}$两边乘以$\left(\ln x_1\right)\cdot\left(\ln x_2\right)$得 $x_1\cdot\ln x_2>x_2\cdot\ln x_1$，所以 B 选项正确；

对于 C 选项，令$y=f\left(\left|x\right|\right)-k=0,f\left(\left|x\right|\right)=k$，

由于$f'\left(x\right)=\dfrac{\ln x-1}{\left(\ln x\right)^2}$，所以在区间$\left(0,1\right),\left(1,\mathrm{e}\right),f'\left(x\right)<0,f\left(x\right)$递减，

在区间$\left(\mathrm{e},+\infty\right),f'\left(x\right)>0,f\left(x\right)$递增，

当$0<x<1$时，$f\left(x\right)=\dfrac{x}{\ln x}<0$，当$x>1$时，$f\left(x\right)=\dfrac{x}{\ln x}>0$，$f\left(\mathrm{e}\right)=\mathrm{e}$，

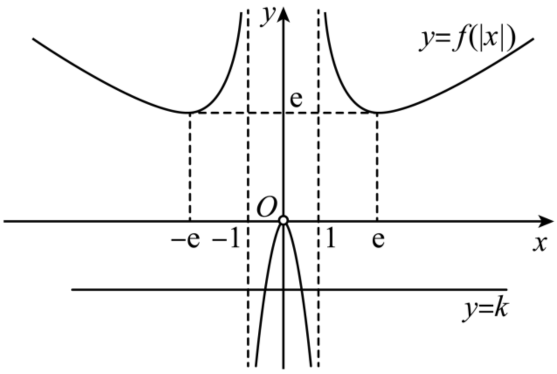
函数$y=f\left(\left|x\right|\right)$的定义域为$\left(-\infty,-1\right)\cup\left(-1,0\right)\cup\left(0,1\right)\cup\left(1,+\infty\right)$，

又$f\left(\left|-x\right|\right)=f\left(\left|x\right|\right)$，所以函数$y=f\left(\left|x\right|\right)$为偶函数，

由此画出$y=f\left(\left|x\right|\right)$的图象如图所示，

由图可知，当$k=\mathrm{e}$或$k<0$时，直线$y=k$与$y=f\left(\left|x\right|\right)$的图象有两个交点，

即当 $k=\mathrm{e}$ 或 $k<0$ 时，函数 $y=f\left(|x|\right)-k$ 有两个零点，所以 C 选项错误；



对于 D 选项，由上述分析可知，$x_2\in\left(1,+\infty\right)$，

则 $f\left(x_2\right)\in\left[\mathrm{e},+\infty\right)$，$x_1\in\mathrm{R}$，$g\left(x_1\right)\geq a$，

要使“对 $\forall x_1\in\mathbf{R}$，$\exists x_2\in\left(1,+\infty\right)$，使得 $g\left(x_1\right)=f\left(x_2\right)$ 成立”，

则需 $a\geq\mathrm{e}$，所以 D 选项正确.

故选：BD.

【点睛】方法点睛：利用导数解决函数零点问题的方法：

（1）直接法：先对函数求导，根据导数的方法求出函数的单调区间与极值，根据函数的基本性质作出图象，然后将问题转化为函数图象与 x 轴的交点问题，突出导数的工具作用，体现了转化与化归思想、数形结合思想和分类讨论思想的应用；

（2）构造新函数法：将问题转化为研究两函数图象的交点问题；

（3）参变量分离法：由 $f\left(x\right)=0$ 分离变量得出 $a=g\left(x\right)$，将问题等价转化为直线 $y=a$ 与函数 $y=g\left(x\right)$ 的图象的交点问题.

11. 已知 O 为坐标原点，焦点为 F 的抛物线 $C:x^2=2py\left(p>0\right)$ 过点 $M\left(2,1\right)$，过 M 且与 OM 垂直的直线 l 与抛物线 C 的另一交点为 N，则（　　）

A. $p=2$

B. $|MF|=3$

C. $|MN|=12\sqrt{5}$

D. 直线 l 与抛物线 C 的准线相交于点 $\left(3,-1\right)$

【答案】ACD

【解析】

【分析】将点 $M\left(2,1\right)$ 代入抛物线方程可确定抛物线方程，可判断 A；由抛物线定义可求 $|MF|$，可判断 B；求出直线 l 的方程，与抛物线方程联立解得点 N，从而求出 $|MN|$，可判断 C；易求出直线 l

与准线交点，可判断 D.

【详解】由抛物线$C:x^2=2py\left(p>0\right)$过点$M\left(2,1\right)$，

可得$4=2p$，则$p=2$，故 A 正确；

由上可知抛物线$C:x^2=4y$，准线方程为$y=-1$，

所以$\left|MF\right|=1-\left(-1\right)=2$，故 B 错误；

由已知可得$k_{OM}=\frac{1}{2}$，所以直线l的方程为$y-1=-2\left(x-2\right)$，即$y=-2x+5$，

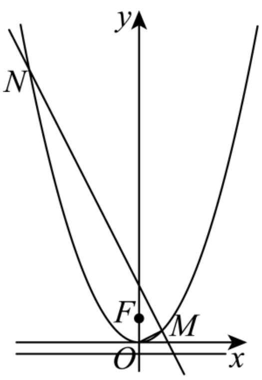
联立方程组$\begin{cases}y=-2x+5\\x^2=4y\end{cases}$，得$x^2+8x-20=0$，

解得$x=-10$或$x=2$，故$N\left(-10,25\right)$，

所以$\left|MN\right|=\sqrt{\left(-10-2\right)^2+\left(25-1\right)^2}=12\sqrt{5}$，故 C 正确；

由直线l的方程$y=-2x+5$，令$y=-1$，得$x=3$，

所以直线l与抛物线C的准线相交于点$\left(3,-1\right)$，故 D 正确.



故选：ACD

第Ⅱ卷（非选择题）

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

12. 若函数$f(x)=x\mathrm{e}^x-(m-1)\mathrm{e}^{2x}$存在唯一极值点，则实数$m$的取值范围是__________.

【答案】$\left(-\infty,1\right]$

【解析】

【分析】由$f'(x)=0$，可得出$2m-2=\frac{x+1}{\mathrm{e}^x}$，可知直线$y=2m-2$与函数$g\left(x\right)=\frac{x+1}{\mathrm{e}^x}$的图象有一个交点（非切点），利用导数分析函数$g\left(x\right)=\frac{x+1}{\mathrm{e}^x}$的单调性与极值，数形结合可得出实数$m$的取值范围.