

浙江省五校联考 2023-2024 学年高三 3 月份调研考试数学试题

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号、考场号和座位号填写在试题卷和答题卡上。用 2B 铅笔将试卷类型 (B) 填涂在答题卡相应位置上。将条形码粘贴在答题卡右上角“条形码粘贴处”。
2. 作答选择题时，选出每小题答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目选项的答案信息点涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案。答案不能答在试题卷上。
3. 非选择题必须用黑色字迹的钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新答案；不准使用铅笔和涂改液。不按以上要求作答无效。
4. 考生必须保证答题卡的整洁。考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知三棱锥 $P-ABC$, $AC = \sqrt{2}$, $BC = 1$, $AC \perp BC$ 且 $PA = 2PB$, $PB \perp$ 平面 ABC , 其外接球体积为 ()

- A. $\frac{4\pi}{3}$ B. 4π C. $\frac{32\pi}{3}$ D. $4\sqrt{3}\pi$

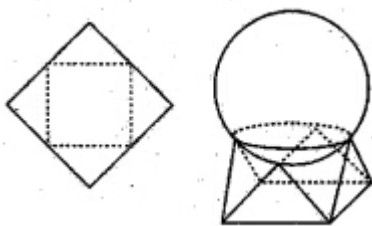
2. 设 a, b, c 分别是 $\triangle ABC$ 中 $\angle A, \angle B, \angle C$ 所对边的边长, 则直线 $\sin A \cdot x - ay - c = 0$ 与 $bx + \sin B \cdot y + \sin C = 0$ 的位置关系是 ()

- A. 平行 B. 重合
C. 垂直 D. 相交但不垂直

3. i 为虚数单位, 则 $\frac{2i^3}{1-i}$ 的虚部为 ()

- A. $-i$ B. i C. -1 D. 1

4. 如图所示, 用一边长为 $\sqrt{2}$ 的正方形硬纸, 按各边中点垂直折起四个小三角形, 做成一个蛋巢, 将体积为 $\frac{4\pi}{3}$ 的鸡蛋 (视为球体) 放入其中, 蛋巢形状保持不变, 则鸡蛋 (球体) 离蛋巢底面的最短距离为 ()



- A. $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{2}+1}{2}$
C. $\frac{\sqrt{6}-1}{2}$ D. $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$

5. 如果 $b < a < 0$, 那么下列不等式成立的是 ()

A. $\log_2 |b| < \log_2 |a|$

B. $\left(\frac{1}{2}\right)^b < \left(\frac{1}{2}\right)^a$

C. $b^3 > a^3$

D. $ab < b^2$

6. 若变量 x, y , 满足 $\begin{cases} x+y \leq 2 \\ 2x-3y \leq 9 \\ x \geq 0 \end{cases}$, 则 x^2+y^2 的最大值为 ()

A. 3

B. 2

C. $\frac{81}{13}$

D. 10

7. 造纸术、印刷术、指南针、火药被称为中国古代四大发明, 此说法最早由英国汉学家艾约瑟提出并为后来许多中国的历史学家所继承, 普遍认为这四种发明对中国古代的政治, 经济, 文化的发展产生了巨大的推动作用. 某小学三年级共有学生 500 名, 随机抽查 100 名学生并提问中国古代四大发明, 能说出两种发明的有 45 人, 能说出 3 种及其以上发明的有 32 人, 据此估计该校三级的 500 名学生中, 对四大发明只能说一种或一种也说不出的人有 ()

A. 69 人

B. 84 人

C. 108 人

D. 115 人

8. 设不等式组 $\begin{cases} x+y \geq 0 \\ x-\sqrt{3}y \leq 0 \end{cases}$ 表示的平面区域为 Ω , 若从圆 $C: x^2+y^2=4$ 的内部随机选取一点 P , 则 P 取自 Ω 的概率为 ()

A. $\frac{5}{24}$

B. $\frac{7}{24}$

C. $\frac{11}{24}$

D. $\frac{17}{24}$

9. $(x^2-2x-3)(x+2)^5$ 的展开式中, x^5 项的系数为 ()

A. -23

B. 17

C. 20

D. 63

10. 小王因上班繁忙, 来不及做午饭, 所以叫了外卖. 假设小王和外卖小哥都在 12:00~12:10 之间随机到达小王所居住的楼下, 则小王在楼下等候外卖小哥的时间不超过 5 分钟的概率是 ()

A. $\frac{1}{2}$

B. $\frac{4}{5}$

C. $\frac{3}{8}$

D. $\frac{3}{4}$

11. 抛物线方程为 $y^2=4x$, 一直线与抛物线交于 A, B 两点, 其弦 AB 的中点坐标为 $(1, 1)$, 则直线的方程为 ()

A. $2x-y-1=0$

B. $2x+y-1=0$

C. $2x-y+1=0$

D. $-2x-y-1=0$

12. 已知 $f(x)=e^{x-1}-e^{1-x}+x$, 则不等式 $f(x)+f(3-2x) \leq 2$ 的解集是 ()

A. $[1, +\infty)$

B. $[0, +\infty)$

C. $(-\infty, 0]$

D. $(-\infty, 1]$

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 若一组样本数据 7, 9, x , 8, 10 的平均数为 9, 则该组样本数据的方差为_____.

14. 有以下四个命题: ①在 $\triangle ABC$ 中, $A > B$ 的充要条件是 $\sin A > \sin B$; ②函数 $y = f(x)$ 在区间 $(1, 2)$ 上存在零点的充要条件是 $f(1) \cdot f(2) < 0$; ③对于函数 $y = f(x)$, 若 $f(2) = f(-2)$, 则 $f(x)$ 必不是奇函数; ④函数 $y = f(1-x)$ 与 $y = f(1+x)$ 的图象关于直线 $x = 1$ 对称. 其中正确命题的序号为_____.

15. 在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 已知点 P 在直线 AB_1 上运动, 则下列四个命题中: ①三棱锥 $D - C_1BP$ 的体积不变; ② $DP \perp D_1C$; ③当 P 为 AB_1 中点时, 二面角 $P - A_1C_1 - C$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$; ④若正方体的棱长为 2, 则

$|DP| + |BP|$ 的最小值为 $\sqrt{8 + 4\sqrt{2}}$; 其中说法正确的是_____ (写出所有说法正确的编号)

16. 设 S_n 是公差为 0 的等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 且 $a_7 = -2a_1$, 则 $\frac{S_9}{S_5 + a_4} =$ _____.

三、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (12 分) 已知椭圆 $G: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$, 上顶点为 $B(0, 1)$, 离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 直线 $l: y = kx - 2$ 交 y 轴于 C

点, 交椭圆于 P, Q 两点, 直线 BP, BQ 分别交 x 轴于点 M, N .

(I) 求椭圆 G 的方程;

(II) 求证: $S_{\triangle BOM} \cdot S_{\triangle BCN}$ 为定值.

18. (12 分) 已知函数 $f(x) = x - \ln x$, $g(x) = x^2 - ax$.

(1) 求函数 $f(x)$ 在区间 $[t, t+1] (t > 0)$ 上的最小值 $m(t)$;

(2) 令 $h(x) = g(x) - f(x)$, $A(x_1, h(x_1)), B(x_2, h(x_2)) (x_1 \neq x_2)$ 是函数 $h(x)$ 图像上任意两点, 且满足 $\frac{h(x_1) - h(x_2)}{x_1 - x_2} > 1$, 求

实数 a 的取值范围;

(3) 若 $\exists x \in (0, 1]$, 使 $f(x) \geq \frac{a - g(x)}{x}$ 成立, 求实数 a 的最大值.

19. (12 分) 已知曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x = 3 + 2 \cos \alpha \\ y = 1 + 2 \sin \alpha \end{cases}$ (α 为参数), 以直角坐标系原点为极点, 以 x 轴正半轴为极轴并

取相同的单位长度建立极坐标系.

(1) 求曲线 C 的极坐标方程, 并说明其表示什么轨迹;

(2) 若直线 l 的极坐标方程为 $\sin \theta - 2 \cos \theta = \frac{1}{\rho}$, 求曲线 C 上的点到直线 l 的最大距离.

20. (12 分) 已知 $f(x) = |x - 1| + |x + a| (a \in R)$.

(I) 若 $a=1$, 求不等式 $f(x) > 4$ 的解集;

(II) $\forall m \in (0,1), \exists x_0 \in R, \frac{1}{m} + \frac{4}{1-m} > f(x_0)$, 求实数 a 的取值范围.

21. (12分) 已知函数 $f(x) = e^{ax} - x$ ($a \in R, e$ 为自然对数的底数), $g(x) = \ln x + mx + 1$.

(1) 若 $f(x)$ 有两个零点, 求实数 a 的取值范围;

(2) 当 $a=1$ 时, $x[f(x)+x] \geq g(x)$ 对任意的 $x \in (0, +\infty)$ 恒成立, 求实数 m 的取值范围.

22. (10分) 以平面直角坐标系 xOy 的原点 O 为极点, x 轴的正半轴为极轴, 且在两种坐标系中取相同的长度单位,

建立极坐标系, 已知曲线 $C_1: \rho \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}$, 曲线 $C_2: \begin{cases} x = \cos 2\theta \\ y = \sin \theta \end{cases}$ (θ 为参数), 求曲线 C_1, C_2 交点的直角坐标.

参考答案

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1、A

【解析】

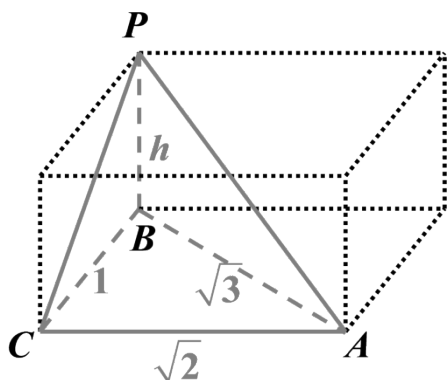
由 $AC \perp BC, PB \perp$ 平面 ABC , 可将三棱锥 $P-ABC$ 还原成长方体, 则三棱锥 $P-ABC$ 的外接球即为长方体的外接球, 进而求解.

【详解】

由题, 因为 $AC = \sqrt{2}, BC = 1, AC \perp BC$, 所以 $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{3}$,

设 $PB = h$, 则由 $PA = 2PB$, 可得 $\sqrt{3+h^2} = 2h$, 解得 $h = 1$,

可将三棱锥 $P-ABC$ 还原成如图所示的长方体,



则三棱锥 $P-ABC$ 的外接球即为长方体的外接球, 设外接球的半径为 R , 则 $2R = \sqrt{1^2 + (\sqrt{2})^2 + 1^2} = 2$, 所以 $R = 1$,

所以外接球的体积 $V = \frac{4\pi}{3} R^3 = \frac{4\pi}{3}$.

故选:A

【点睛】

本题考查三棱锥的外接球体积, 考查空间想象能力.

2、C

【解析】

试题分析: 由已知直线 $\sin A \cdot x - ay - c = 0$ 的斜率为 $\frac{\sin A}{a}$, 直线 $bx + \sin B \cdot y + \sin C = 0$ 的斜率为 $-\frac{b}{\sin B}$, 又由正

弦定理得 $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b}$, 故 $\frac{\sin A}{a} \times \left(-\frac{b}{\sin B}\right) = \frac{\sin B}{b} \times \left(-\frac{b}{\sin B}\right) = -1$, 两直线垂直

考点: 直线与直线的位置关系

3、C

【解析】

利用复数的运算法则计算即可.

【详解】

$\frac{2i^3}{1-i} = \frac{-2i}{1-i} = \frac{-2i(1+i)}{(1-i)(1+i)} = -i(1+i) = 1-i$, 故虚部为 -1 .

故选: C.

【点睛】

本题考查复数的运算以及复数的概念, 注意复数 $a+bi$ ($a, b \in R$) 的虚部为 b , 不是 bi , 本题为基础题, 也是易错题.

4、D

【解析】

因为鸟巢的底面是边长为1的正方形, 所以过四个顶点截鸡蛋所得的截面圆的直径为1, 又因为鸡蛋的体积为 $\frac{4\pi}{3}$

, 所以球的半径为1, 所以球心到截面的距离 $d = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 而截面到球体最低点距离为 $1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$, 而蛋壳的高度

为 $\frac{1}{2}$, 故球体到蛋壳底面的最短距离为 $\frac{1}{2} - \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$.

点睛: 本题主要考查折叠问题, 考查球体有关的知识. 在解答过程中, 如果遇到球体或者圆锥等几何体的内接或外接几何体的问题时, 可以采用轴截面的方法来处理. 也就是画出题目通过球心和最低点的截面, 然后利用弦长和勾股定理来解决. 球的表面积公式和体积公式是需要熟记的.

5、D

【解析】

利用函数的单调性、不等式的基本性质即可得出.

【详解】

$\because b < a < 0, \therefore \log_2 |b| > \log_2 |a|, \left(\frac{1}{2}\right)^b > \left(\frac{1}{2}\right)^a, b^3 < a^3, ab < b^2$.

故选: D.

【点睛】

本小题主要考查利用函数的单调性比较大小, 考查不等式的性质, 属于基础题.

6、D

【解析】

画出约束条件的可行域, 利用目标函数的几何意义求解最大值即可.

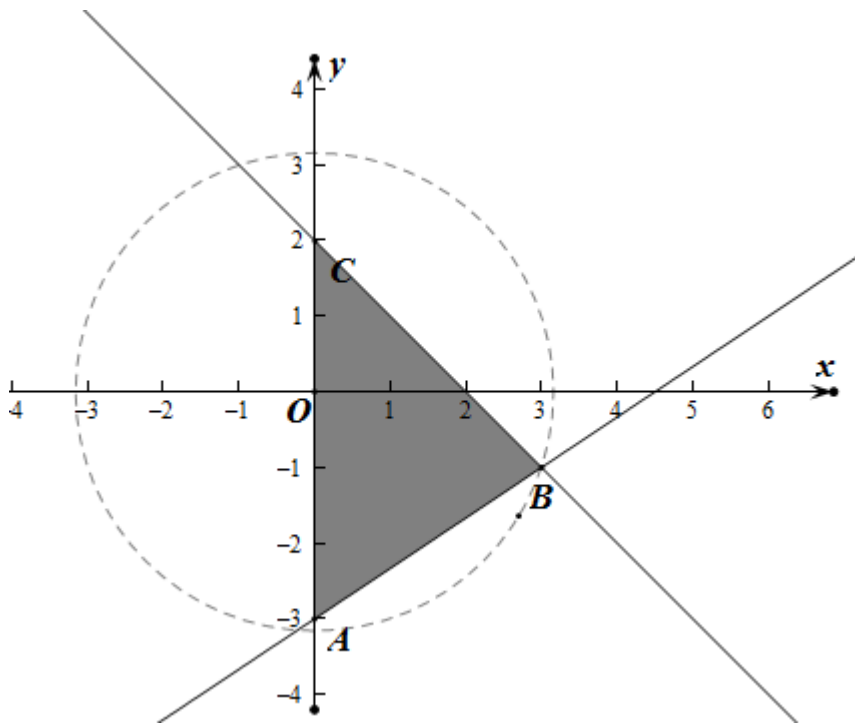
【详解】

解: 画出满足条件 $\begin{cases} x + y \leq 2 \\ 2x - 3y \leq 9 \\ x \geq 0 \end{cases}$ 的平面区域, 如图示:

如图点坐标分别为 $A(0, -3), B(3, -1), C(0, 2)$,

目标函数 $x^2 + y^2$ 的几何意义为, 可行域内点 (x, y) 与坐标原点 $(0, 0)$ 的距离的平方, 由图可知 $B(3, -1)$ 到原点的距离最大, 故 $(x^2 + y^2)_{\max} = 3^2 + (-1)^2 = 10$.

故选: D



【点睛】

本题考查了简单的线性规划问题，考查数形结合思想，属于中档题.

7、D

【解析】

先求得100名学生中，只能说一种或一种也说不出的人数，由此利用比例，求得500名学生中对四大发明只能说一种或一种也说不出的人数.

【详解】

在这100名学生中，只能说一种或一种也说不出的有 $100 - 45 - 32 = 23$ 人，设对四大发明只能说一种或一种也说不出的有 x 人，则 $\frac{100}{23} = \frac{500}{x}$ ，解得 $x = 115$ 人.

故选：D

【点睛】

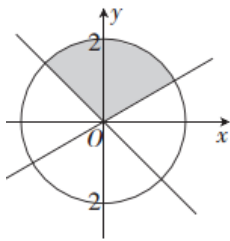
本小题主要考查利用样本估计总体，属于基础题.

8、B

【解析】

画出不等式组表示的可行域，求得阴影部分扇形对应的圆心角，根据几何概型概率计算公式，计算出所求概率.

【详解】



作出 Ω 中在圆 C 内部的区域，如图所示，

因为直线 $x+y=0$ ， $x-\sqrt{3}y=0$ 的倾斜角分别为 $\frac{3\pi}{4}$ ， $\frac{\pi}{6}$ ，

所以由图可得 P 取自 Ω 的概率为 $\frac{\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{6}}{2\pi} = \frac{7}{24}$ 。

故选：B

【点睛】

本小题主要考查几何概型的计算，考查线性可行域的画法，属于基础题。

9、B

【解析】

根据二项式展开式的通项公式，结合乘法分配律，求得 x^5 的系数。

【详解】

$(x+2)^5$ 的展开式的通项公式为 $T_{r+1} = C_5^r x^{5-r} \cdot 2^r$ 。则

$$\textcircled{1} (x^2 - 2x - 3) \text{ 出 } (-3), \text{ 则 } (x+2)^5 \text{ 出 } x^5, \text{ 该项为: } (-3) \cdot C_5^0 \cdot 2^0 \cdot x^5 = -3x^5;$$

$$\textcircled{2} (x^2 - 2x - 3) \text{ 出 } (-2x), \text{ 则 } (x+2)^5 \text{ 出 } x^4, \text{ 该项为: } (-2) \cdot C_5^1 \cdot 2^1 \cdot x^5 = -20x^5;$$

$$\textcircled{3} (x^2 - 2x - 3) \text{ 出 } x^2, \text{ 则 } (x+2)^5 \text{ 出 } x^3, \text{ 该项为: } 1 \cdot C_5^2 \cdot 2^2 \cdot x^5 = 40x^5;$$

综上所述：合并后的 x^5 项的系数为 17。

故选：B

【点睛】

本小题考查二项式定理及展开式系数的求解方法等基础知识，考查理解能力，计算能力，分类讨论和应用意识。

10、C

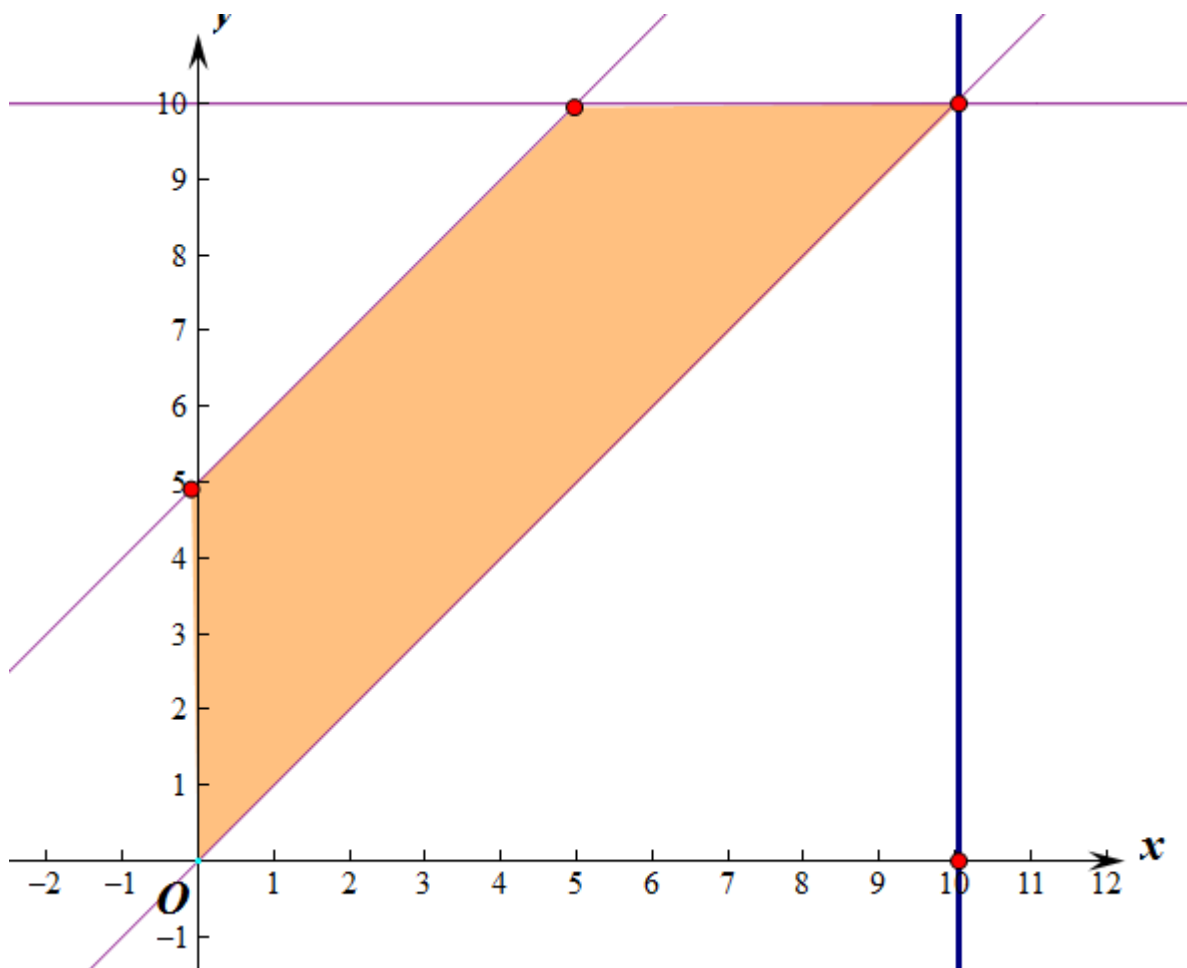
【解析】

设出两人到达小王的时间，根据题意列出不等式组，利用几何概型计算公式进行求解即可。

【详解】

设小王和外卖小哥到达小王所居住的楼下的时间分别为 x, y ，以 12:00 点为开始算起，则有 $\begin{cases} x \leq y \\ y - x \leq 5 \end{cases}$ ，在平面直角

坐标系内，如图所示：图中阴影部分表示该不等式组所表示的平面区域，



所以小王在楼下等候外卖小哥的时间不超过 5 分钟的概率为：

$$P = \frac{10 \cdot 10 - \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 10 - \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5}{10 \cdot 10} = \frac{3}{8}$$

故选：C

【点睛】

本题考查了几何概型中的面积型公式，考查了不等式组表示的平面区域，考查了数学运算能力。

11、A

【解析】

设 $A(x_1, y_1)$ ， $B(x_2, y_2)$ ，利用点差法得到 $\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{4}{2} = 2$ ，所以直线 AB 的斜率为 2，又过点 $(1, 1)$ ，再利用点斜式

即可得到直线 AB 的方程。

【详解】

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/606234103114011004>