

（一） 数字谜

① 横式字谜

一、例题与方法指导

例 1 $\square$ ， $\square 8$ ， $\square 97$ 在上面的 3 个方框内分别填入恰当的数字，可以使得这 3 个数的平均数是 150。那么所填的 3 个数字之和是多少？

思路导航： $150 \times 3 - 8 - 97 = 340$

所以 3 个数之和为 $3+4+5=12$ 。

例 2 在下列算式的 $\square$ 中填上适当的数字，使得等式成立：

(1) $6\square\square 4 \div 56 = \square 0\square$ ，

(2) $7\square\square 8 \div 37 = \square 1\square$ ，

(3) $3\square\square 3 \div 2\square = \square 17$ ，

(4) $8\square\square\square \div 58 = \square\square 6$ 。

分析：(1) $6104/56=109$

(2) $7548/37=204$

(3) $3393/29=117$

(4) $8468/58=146$

例 3 在算式 $40796 \div \square\square\square = \square 99 \dots 98$ 的各个方框内填入适当的数字后，就可以使其成为正确的等式。求其中的除数。

分析： $40796/102=399 \dots 98$ 。

例 4 我学数学乐 $\times$ 我学数学乐 = 数数数学数数学学数学

在上面的乘法算式中，“我、学、数、乐”分别代表的 4 个不同的数字。如果“乐”代表 9，那么“我数学”代表的三位数是多少？

分析：学=1，我=8，数=6， $81619 \times 81619 = 6661661161$

例 5 $\square \div (\square \div \square \div \square) = 24$ 在式中的 4 个方框内填入 4 个不同的一位数，使左边的数比右边的数小，并且等式成立。

思路导航：

这样，我们可以先用字母代替数字，原等式写成：
 $a / (b / c / d) = a / (b / c * d) = a * c * d / b$ ， $(a < b < c < d)$

当 $a=1$ 时，有 $6*8/2=24$ ， $8*9/3=24$ ；

当 $a=2$ 时，有 $4*9/3=12$ ， $6*8/4=12$ ， $8*9/6=12$ ；

所以，满足要求的等式有： $1 \div (2 \div 6 \div 8) = 24$ ， $1 \div (3 \div 8 \div 9) = 24$ ，

$$2 \div (3 \div 4 \div 9) = 24, 2 \div (4 \div 6 \div 8) = 24, 2 \div (6 \div 8 \div 9) = 24。$$

例 6 ① $\square \times \square = 5\square$ ；② $12 + \square - \square = \square$ ，把 1 至 9 这 9 个数字分别填入上面两个算式的各个方框中，使等式成立，这里有 3 个数字已经填好。

分析：根据第一个等式，只有两种可能： $7 \times 8 = 56$ ， $6 \times 9 = 54$ ；如果为 $7 \times 8 = 56$ ，则余下的数字有：3、4、9，显然不行；而当 $6 \times 9 = 54$ 时，余下的数字有：3、7、8，那么， $12 + 3 - 7 = 8$ 或 $12 + 3 - 8 = 7$ 都能满足。

二、训练巩固

1. 迎迎 $\times$ 春春 = 杯迎迎杯，数数 $\times$ 学学 = 数赛赛数，春春 $\times$ 春春 = 迎迎赛赛

在上面的 3 个算式中，相同的汉字代表相同的数字，不同的汉字代表不同的数字。如果这 3 个等式都成立，那么，“迎+春+杯+数+学+赛”等于多少？

分析：考察上面三个等式，可以从最后一个等式入手：能够满足：春春 $\times$ 春春 = 迎迎赛赛的只有 $88 \times 88 = 7744$ ，于是，春=8，迎=7，赛=4；这样，不难得到第一个为： $77 \times 88 = 6776$ ，第二个为： $55 \times 99 = 5445$ ；所以，迎+春+杯+数+学+赛=7+8+6+5+9+4=39。

2. 迎+春 $\times$ 春 = 迎春，（迎+杯） $\times$ （迎+杯）= 迎杯

在上面的两个横式中，相同的汉字代表相同的数字，不同的汉字代表不同的数字。那么“迎+春+杯”等于多少？

分析：同样可以从第二个算式入手，发现满足要求的只有 $(8+1) \times (8+1) = 81$ ，于是，迎=8；这样，第一个算式显然只有： $8+9 \times 9 = 89$ ；所以，迎+春+杯=8+9+1=18。

三、拓展提升

1. 在下列各式的 $\square$ 中分别填入相同的两位数：

$$(1) 5 \times \square = 2\square; \quad (2) 6 \times \square = 3\square。$$

2. 将 3~9 中的数填入下列各式，使算式成立，要求各式中无重复的数字：

$$(1) \square \div \square = \square \div \square; \quad (2) \square \div \square > \square \div \square。$$

3. 在下列各式的 $\square$ 中填入合适的数字：

$$(1) 448 \div \square\square = \square; \quad (2) 2822 \div \square\square = \square\square;$$

$$(3) 13 \times \square\square = 4\square 6。$$

4. 在下列各式的 $\square$ 中填入合适的数：

- (1) $\square \div 32 = 8 \dots 31$; (2) $573 \div 32 = \square \dots 29$;
 (3) $4837 \div \square = 74 \dots 27$ 。

答案与提示 练习 22

1. $5 \times \boxed{50} = 2 \boxed{50}$; (2) $6 \times \boxed{60} = 3 \boxed{60}$ 。
 2. (1) $\boxed{8} \div \boxed{4} = \boxed{6} \div \boxed{3}$; (2) $\boxed{9} \div \boxed{3} > \boxed{8} \div \boxed{4}$ 。
 3. (1) $448 \div \boxed{56} = 8$ 或 $448 \div \boxed{64} = \boxed{7}$;
 (2) $2822 \div \boxed{34} = 83$ 或 $2822 \div \boxed{83} = \boxed{34}$;
 (3) $13 \times \boxed{32} = 4 \boxed{16}$ 。
 4. (1) 287; (2) 17; () 65。

②竖式字谜

一、例题与方法指导

例 1 在图 4-1 所示的算式中，每一个汉字代表一个数字，不同的汉字代表不同的数字。那么“喜欢”这两个汉字所代表的两位数是多少？

$$\begin{array}{r}
 \text{喜 欢} \\
 \text{欢 喜} \\
 + \quad \text{喜 欢} \\
 \hline
 \text{人 人 喜}
 \end{array}$$

图4-1

分析： 首先看个位，可以得到“欢”是 0 或 5，但是“欢”是第二个数的十位，所以“欢”不能是 0，只能是 5。再看十位，“欢”是 5，加上个位有进位 1，那么，加起来后得到的“人”就应该是偶数，因为结果的百位也是“人”，所以“人”只能是 2；由此可知，“喜”等于 8。所以，“喜欢”这两个汉字所代表的两位数就是 85。

例 2 在图 4-2 所示的竖式中，相同的汉字表示相同的数字，不同的汉字表示不同的数字。如果：巧+解+数+字+谜=30，那么“数字谜”所代表的三位数是多少？

$$\begin{array}{r}
 \text{谜} \\
 \text{谜} \\
 \text{字} \\
 \text{数} \\
 \text{解} \\
 \text{数} \\
 \text{字} \\
 \text{字} \\
 \text{字} \\
 \text{字} \\
 + \text{赛} \\
 \hline
 \text{巧} \\
 \text{解} \\
 \text{数} \\
 \text{字} \\
 \text{谜}
 \end{array}$$

图4-2

分析：还是先看个位，5 个“谜”相加的结果个位还是等于“谜”，“谜”必定是 5（0 显然可以排出）；接着看十位，四个“字”相加再加上进位 2，结果尾数还是“字”，那说明“字”只能是 6；再看百位，三个“数”相加再加上进位 2，结果尾数还是“数”，“数”可能是 4 或 9；再看千位，（1）如果“数”为 4，两个“解”相加再加上进位 1，结果尾数还是“解”，那说明“解”只能是 9； $5+6+4+9=24$ ， $30-24=6$ ，“巧”等于 6 与“字”等于 6 重复，不能；（2）如果“数”为 9，两个“解”相加再加上进位 2，结果尾数还是“解”，那说明“解”只能是 8； $5+6+9+8=28$ ， $30-28=2$ ，可以。所以“数字谜”代表的三位数是 965。

例 3 在图 4-3 所示的加法算式中，相同的汉字表示相同的数字，不同的汉字表示不同的数字。请把这个竖式翻译成数字算式。

$$\begin{array}{r}
 \text{香} \text{港} \text{回} \text{归} \\
 + \text{华} \text{人} \text{爱} \text{港} \\
 \hline
 \text{华} \text{人} \text{回} \text{港} \text{游}
 \end{array}$$

图4-3

分析：首先万位上“华”=1；再看千位，“香”只能是 8 或 9，那么“人”就相应的只能是 0 或 1。但是“华”=1，所以，“人”就是 0；再看百位，“人”=0，那么，十位上必须有进位，否则“港”+“人”还是“港”。由此可知“回”比“港”大 1，这样就说明“港”不是 9，百位向千位也没有进位。于是可以确定“香”等于 9 的；再看十位，“回”+“爱”=“港”要有进位的，而“回”比“港”大 1，那么“爱”就等于 8；同时，个位必须有进位；再看个位，两数相加至少 12，至多 13，即只能是 5+7 或 6+7，显然“港”=5，“回”=6，“归”=7。这样，整个算式就是： $9567+1085=10652$ 。

例 4 图 4-4 是一个加法竖式，其中 E, F, I, N, O, R, S, T, X, Y 分别表示从 0 到 9 的不同数字，且 F, S 不等于零。那么这个算式的结果是多少？

$$\begin{array}{r}
 F \ O \ R \ T \ Y \\
 \quad \quad \quad T \ E \ N \\
 + \quad \quad \quad T \ E \ N \\
 \hline
 S \ I \ X \ T \ Y
 \end{array}$$

图4-4

分析：先看个位和十位，N 应为 0，E 应为 5；再看最高位上，S 比 F 大 1；千位上 0 最少是 8；但因为 N 等于 0，所以，I 只能是 1，O 只能是 9；由于百位向千位进位是 2，且 X 不能是 0，因此决定了 T、R 只能是 7、8 这两个；如果 T=7，X=3，这是只剩下了 2、4、6 三个数，无法满足 S、F 是两个连续数的要求。所以，T=8、R=7；由此得到 X=4；那么，F=2，S=3，Y=6。所以，得到的算式结果是 31486。

二、训练巩固

1. 在图 4-5 所示的减法算式中，每一个字母代表一个数字，不同的字母代表不同的数字。那么 D+G 等于多少？

$$\begin{array}{r}
 A \ B \ C \ B \ D \\
 - \quad \quad E \ F \ A \ G \\
 \hline
 \quad \quad \quad F \ F \ F
 \end{array}$$

图4-5

分析：先从最高位看，显然 A=1，B=0，E=9；接着看十位，因为 E 等于 9，说明个位有借位，所以 F 只能是 8；由 F=8 可知，C=7；这样，D、G 有 2、4，3、5 和 4、6 三种可能。所以，D+G 就可以等于 6，8 或 10。

2. 王老师家的电话号码是一个七位数，把它前四位组成的数与后三位组成的数相加得 9063，把它前三位数组成的数与后四位数组成的数相加得 2529。求王老师家的电话号码。

分析：我们可以用 abcdefg 来表示这个七位数电话号码。由题意知， $abcd+efg=9063$ ， $abc+defg=2529$ ；首先从第一个算式可以看出，a=8，从第二个算式可以看出，d=1；再回到第一个算式，g=2，掉到第二个算式，c=7；又回到第一个算式，f=9，掉到第二个算式，b=3；那么，e=6。所以，王老师家的电话号码是 8371692。

3. 将一个四位数的各位顺序颠倒过来，得到一个新的四位数。如果新数比原数大 7902，那么在所有符合这样条件的四位数中，原数最大是多少？

分析：用 abcd 来表示原四位数，那么新四位数为 dcba， $dcba-abcd=7902$ ；由最高为看起，a 最大为 2，则 d=9；但个位上 $10+a-d=2$ ，所以，a 只能是 1；接下来看百位，b 最大是 9，那么，c=8 正好能满足要求。所以，原四位数最大是 1989。

三、拓展提升

1. 已知图 4-6 所示的乘法竖式成立，那么 ABCDE 是多少？

$$\begin{array}{r} 1\ A\ B\ C\ D\ E \\ \times \qquad \qquad \qquad 3 \\ \hline A\ B\ C\ D\ E\ 1 \end{array}$$

图4-6

分析：由 1/7 的特点易知，ABCDE=42857。142857*3=428571。

2. 某个自然数的个位数字是 4，将这个 4 移到左边首位数字的前面，所构成的新数恰好是原数的 4 倍。问原数最小是多少？

分析：由个位起逐个递推：4*4=16，原十位为 6；4*6+1=25，原百位为 5；4*5+2=22，原千位为 2；4*2+2=10，原万位为 0；1*4=4，正好。所以，原数最小是 102564。

3. 在图 4-7 所示的竖式中，相同的汉字表示相同的数字，不同的汉字表示不同的数字。则符合题意的数“迎春杯竞赛赞”是多少？

$$\begin{array}{r} \text{赞 迎 春 杯 竞 赛} \\ \times \qquad \qquad \qquad \text{好} \\ \hline \text{迎 春 杯 竞 赛 赞} \end{array}$$

图4-7

分析：同第 10 题一样，也是利用 1/7 的特点。因为每个字母代表不同的数字，因此“好”只有 3 和 6 可选：

好=3，则：142857*3=428571；好=6，则：142857*6=857142；两个都能满足，所以，符合题意的数“迎春杯竞赛赞”可能是 428571 或 857142。

（二）定义新运算

定义新运算通常是用特殊的符号表示特定的运算意义。它的符号不同于课本上明确定义或已经约定的符号，例如“+、-、×、÷、>、<”等。表示运算意义的表达式，通常是使用四则运算符号，例如 $a \star b = 3a - 3b$ ，新运算使用的符号是 $\star$ ，而等号右边表示新运算意义的则是四则运算符号。

正确解答定义新运算这类问题的关键是要确切理解新运算的意义，严格按照规定的法则进行运算。如果没有给出用字母表示的规则，则应通过给出的具体的

数字表达式，先求出表示定义规则的一般表达式，方可进行运算。

值得注意的是：定义新运算一般是不满足四则运算中的运算律和运算性质，所以，不能盲目地运用定律和运算性质解题。

一、例题与方法指导

例 1. 设 ab 都表示数，规定 $a\triangle b$ 表示 a 的 4 倍减去 b 的 3 倍，即 $a\triangle b=4\times a-3\times b$ ，试计算 $5\triangle 6$ ， $6\triangle 5$ 。

$$\text{解 } 5\triangle 6=5\times 4-6\times 3=20-18=2$$

$$6\triangle 5=6\times 4-5\times 3=24-15=9$$

说明 例 1 定义的 $\triangle$ 没有交换律，计算中不得将 $\triangle$ 前后的数交换。

例 2. 对于两个数 a 、 b ，规定 $a\star b$ 表示 $3\times a+2\times b$ ，试计算 $(5\star 6)\star 7$ ， $5\star (6\star 7)$ 。

思路导航：

先做括号内的运算。

$$\text{解 } (5\star 6)\star 7=(5\times 3+6\times 2)\star 7=27\star 7=27\times 3+7\times 2=95$$

$$5\star (6\star 7)=5\star (6\times 3+7\times 2)=5\star 32=5\times 3+32\times 2=79$$

说明 本题定义的运算不满足结合律。这是与常规的运算有区别的。

例 3. 已知 $2\triangle 3=2\times 3\times 4$ ， $4\triangle 2=4\times 5$ ，一般地，对自然数 a 、 b ， $a\triangle b$ 表示 $a\times (a+1)\times \dots \times (a+b-1)$ 。

计算 $(6\triangle 3)-(5\triangle 2)$ 。

思路导航：

$$\text{原式}=6\times 7\times \dots \times 5\times 6$$

$$=336-30$$

规定： $a\triangle b=a+(a+1)+(a+2)+\dots+(a+b-1)$ ，其中 a, b 表示自然数。

例 4. 求 $1\triangle 100$ 的值。已知 $x\triangle 10=75$ ，求 x 。

思路导航：

$$(1) \text{原式}=1+2+3+\dots+100=(1+100)\times 100\div 2=5050$$

$$(2) \text{原式即 } x+(x+1)+(x+2)+\dots+(x+9)=75,$$

所以

$$10x+(1+2+3+\dots+9)=75$$

$$10x+45=75$$

$$10x=30$$

$$x=3$$

二、巩固训练

1. 若对所有 b ， $a\triangle b=a\times x$ ， x 是一个与 b 无关的常数； $a\star b=(a+b)\div 2$ ，且 $(1\triangle 3)\star 3=1\triangle (3\star 3)$ 。

求 $(1\triangle 4)\star 2$ 的值。

分析 注意本题有两种运算，由 $(1\triangle 3)\star 3=1\triangle (3\star 3)$ ，可求出 x 。

解 因为 $(1\triangle 3)\star 3=1\triangle (3\star 3)$ ，所以 $(1\times x)$

即

$$(x+3)\div 2=x$$

$$x+3=2x$$

$$x=3$$

因为 $(1\triangle 4)\star 2$

$$=(1\times 4)\star 2$$

$$=(4+2)\div 2$$

$$=3$$

2. 如果规定：③= $2\times 3\times 4$ ，④= $3\times 4\times 5$ ，⑤= $4\times 5\times 6$ ，……，⑨= $8\times 9\times 10$ ，求⑨+⑧-⑦+⑥-⑤+④-③的值。

解题思路

依题意可以看出：定义的新运算为连续三个数的乘积，而且，⑤里的数就是三个连续数中的中间的哪个数，即③是 2，3，4 三个连续的乘积，④是 3，4，5 三个连续数的乘积，从而不难求出⑨+⑧-⑦+⑥-⑤+④-③的值。

$$\begin{aligned}\text{解：原式}&=8\times 9\times 10+7\times 8\times 9-6\times 7\times 8+5\times 6\times 7-4\times 5\times 6+3\times 4\times 5-2\times 3\times 4 \\&=720+504+-339+210-120+60-24 \\&=1014\end{aligned}$$

三、能力提升

1. $a*b$ 表示 a 的3倍减去 b 的 $\frac{1}{2}$ ，例如：

$$1*2=1\times 3-2\times \frac{1}{2}=2，\text{根据以上的规定，}$$

计算：① $10*6$ ② $7*(2*1)$ 。

2. 定义新运算为 $a\ominus b=\frac{a+1}{b}$

①求 $2\ominus(3\ominus 4)$ 的值；

②若 $x\ominus 4=1.35$ ，则 $x=?$

3. 有一个数学运算符号 $\circ$ ，使下列算式成立：

$$\frac{1}{2}\circ\frac{2}{3}=\frac{3}{6},\frac{4}{5}\circ\frac{7}{9}=\frac{11}{45},\frac{5}{6}\circ\frac{1}{7}\frac{6}{42},\text{求}\frac{3}{11}\circ\frac{4}{5}\text{的值}$$

答案

1.解：① $10*6=10\times 3-6\times \frac{1}{2}=30-3=27.$

$$\begin{aligned}\text{②}7*(2*1)&=7*\left(2\times 3-1\times \frac{1}{2}\right)\\&=7*5.5\\&=7\times 3-5.5\times \frac{1}{2}\\&18.25.\end{aligned}$$

2.解： $2\ominus(3\ominus 4)=2\ominus \frac{3+1}{4}$
 $=2\ominus 1$
 $=\frac{2+1}{1}$
 $=3.$

②按照规定的运算：

②按照规定的运算： $x\div 4=\frac{x+1}{4}$,所以有 $\frac{x+1}{4}=135$,解出 $x=4.4$

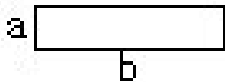
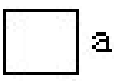
3.解：通过对 $\frac{1}{2}\circ \frac{2}{3}=\frac{3}{6},\frac{4}{5}\circ \frac{7}{9}=\frac{11}{45},\frac{5}{6}\circ \frac{1}{7}=\frac{6}{42}$

这几个算式的观察，找到规律为： $\frac{b}{a}\circ \frac{d}{c}=\frac{b+d}{a\times c}$

因此 $\frac{3}{11}\circ \frac{4}{5}=\frac{7}{55}$

（三） 不规则图形面积计算（1）

我们曾经学过的三角形、长方形、正方形、平行四边形、梯形、菱形、圆和扇形等图形，一般称为基本图形或规则图形. 我们的面积及周长都有相应的公式直接计算. 如下表：

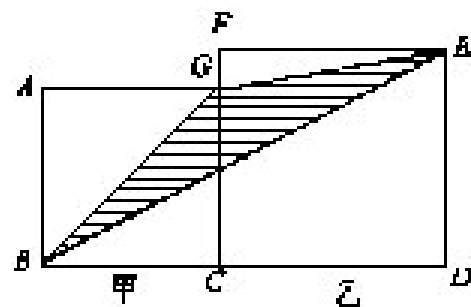
名称	图形	周长公式	面积公式
长方形		周长=2(a+b)	面积=ab
正方形		周长=4a	面积=a²

实际问题中，有些图形不是以基本图形的形状出现，而是由一些基本图形组合、拼凑成的，它们的面积及周长无法应用公式直接计算. 一般我们称这样的图形为不规则图形。

那么，不规则图形的面积及周长怎样去计算呢？我们可以针对这些图形通过实施割补、剪拼等方法将它们转化为基本图形的和、差关系，问题就能解决了。

一、例题与方法指导

例 1 如右图，甲、乙两图形都是正方形，它们的边长分别是 10 厘米和 12 厘米. 求阴影部分的面积。

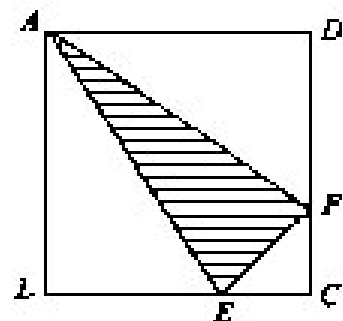


思路导航：

阴影部分的面积等于甲、乙两个正方形面积之和减去三个“空白”三角形（ $\triangle ABG$ 、 $\triangle BDE$ 、 $\triangle EFG$ ）的面积之和。

例 2 如右图，正方形 ABCD 的边长为 6 厘米， $\triangle ABE$ 、 $\triangle ADF$ 与四边形 AECF 的面积彼此相等，求三角形 AEF 的面积。

思路导航：



∵ $\triangle ABE$ 、 $\triangle ADF$ 与四边形 $AECF$ 的面积彼此相等，

∴ 四边形 $AECF$ 的面积与 $\triangle ABE$ 、 $\triangle ADF$ 的面积都等于正方形 $ABCD$ 的 $\frac{1}{3}$ 。

在 $\triangle ABE$ 中，因为 $AB=6$ ，所以 $BE=4$ ，同理 $DF=4$ ，因此 $CE=CF=2$ ，

∴ $\triangle ECF$ 的面积为 $2 \times 2 \div 2 = 2$ 。

所以 $S_{\triangle AEF} = S_{\text{四边形}AECF} - S_{\triangle ECF} = 12 - 2 = 10$ （平方厘米）。

例 3 两块等腰直角三角形的三角板，直角边分别是 10 厘米和 6 厘米。如右图那样

重合，求重合部分（阴影部分）的面积。

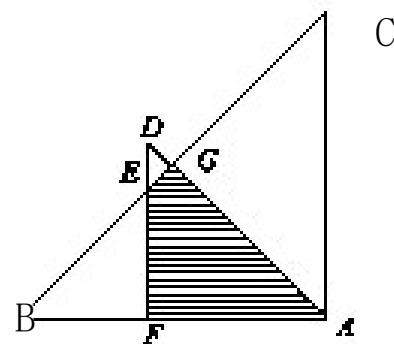
思路导航：

在等腰直角三角形 ABC 中

∵ $AB=10$

∴ $EF=BF=AB-AF=10-6=4$ ，

∴ 阴影部分面积 $= S_{\triangle ABG} - S_{\triangle BEF} = 25 - 8 = 17$ （平方厘米）。



例 4 如右图， A 为 $\triangle CDE$ 的 DE 边上中点， $BC=CD$ ，若 $\triangle ABC$ （阴影部分）面积为 5 平方厘米。

求 $\triangle ABD$ 及 $\triangle ACE$ 的面积。

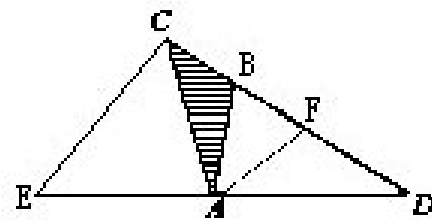
思路导航：

取 BD 中点 F ，连结 AF 。因为 $\triangle ADF$ 、 $\triangle ABF$ 和 $\triangle ABC$ 等底、等高，

所以它们的面积相等，都等于 5 平方厘米。

∴ $\triangle ACD$ 的面积等于 15 平方厘米， $\triangle ABD$ 的面积等于 10 平方厘米。

又由于 $\triangle ACE$ 与 $\triangle ACD$ 等底、等高，所以 $\triangle ACE$ 的面积是 15 平方厘米。



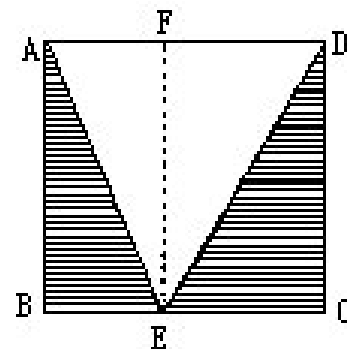
二、巩固训练

1. 如右图，在正方形ABCD 中，三角形ABE 的面积是 8 平方厘米，它是三角形DEC 的面积的 $\frac{4}{5}$ ，求正方形ABCD 的面积。

解：过E 作BC 的垂线交AD 于F。

在矩形ABEF 中AE 是对角线，所以 $S_{\triangle ABE}=S_{\triangle AEF}=8$ 。

在矩形CDFE 中DE 是对角线，所以 $S_{\triangle ECD}=S_{\triangle EDF}$ 。



2. 如右图，已知： $S_{\triangle ABC}=1$ ， $AE=ED$ ， $BD=\frac{2}{3}BC$. 求阴影部分的面积。

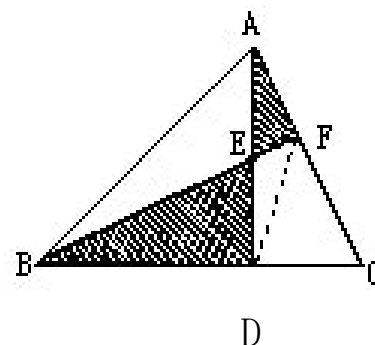
解：连结DF。∵ $AE=ED$ ，

∴ $S_{\triangle AEF}=S_{\triangle DEF}$ ； $S_{\triangle ABE}=S_{\triangle BED}$

∴ $S_{\text{阴影}}=S_{\triangle ABF}=S_{\triangle BFD}$ 。∵ $BD=\frac{2}{3}BC$ ，

∴ $S_{\triangle BFD}=\frac{2}{3}S_{\triangle BCF}=\frac{2}{3}(1-S_{\triangle ABF})$ ，

∴ $S_{\triangle ABF}=\frac{2}{3}(1-S_{\triangle ABF})$ ，∴ $S_{\triangle ABF}=\frac{2}{5}$ 。



3. 如右图，正方形ABCD 的边长是 4 厘米，CG=3 厘米，矩形DEFG 的长DG 为 5 厘米，求它的宽DE 等于多少厘米？

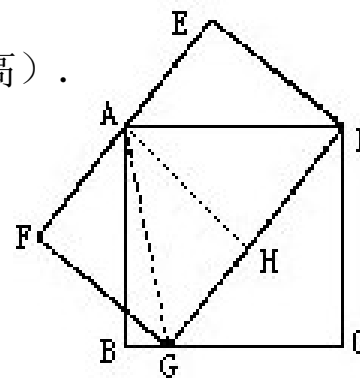
解：连结 AG，自 A 作 AH 垂直于DG 于H，在 $\triangle ADG$ 中， $AD=4$ ， $DC=4$ （AD 上的高）。

∴ $S_{\triangle AGD}=4 \times 4 \div 2=8$ ，又 $DG=5$ ，

∴ $S_{\triangle AGD}=AH \times DG \div 2$ ，

∴ $AH=8 \times 2 \div 5=3.2$ （厘米），

∴ $DE=3.2$ （厘米）。



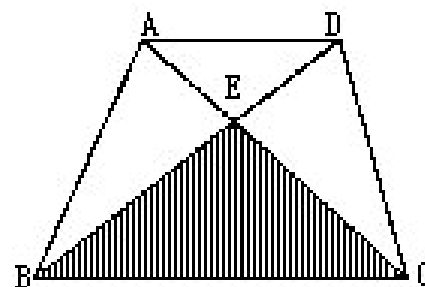
4. 如右图，梯形 ABCD 的面积是 45 平方米，高 6 米， $\triangle AED$ 的面积是 5 平方米， $BC=10$ 米，求阴影部分面积。

解：∵梯形面积=（上底+下底） $\times$ 高 $\div 2$

即 $45=(AD+BC) \times 6 \div 2$ ， $45=(AD+10$

$) \times 6 \div 2$ ，

∴ $AD=45 \times 2 \div 6-10=5$ 米。



$\therefore \triangle ADE$ 的高是 2 米。

$\triangle EBC$ 的高等于梯形的高减去 $\triangle ADE$ 的高，即 $6-2=4$ 米，

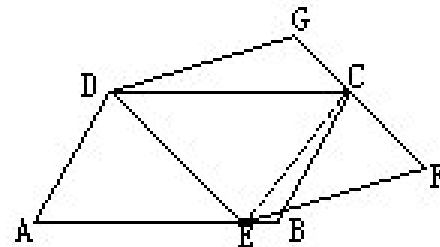
5. 如右图，四边形 $ABCD$ 和 $DEFG$ 都是平行四边形，证明它们的面积相等。

证明：连结 CE ，

$\square ABCD$ 的面积等于 $\triangle CDE$ 面积的 2 倍，

而 $\square DEFG$ 的面积也是 $\triangle CDE$ 面积的 2 倍。

$\therefore \square ABCD$ 的面积与 $\square DEFG$ 的面积相等。

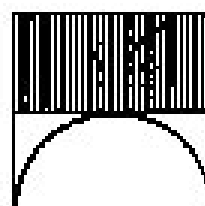
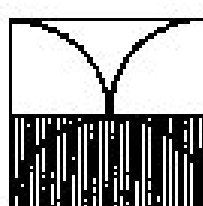
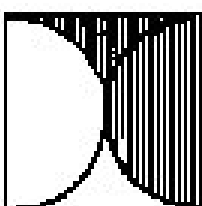
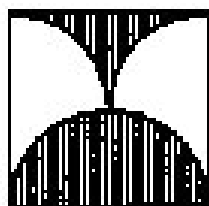


（四） 不规则图形面积计算（2）

不规则图形的另外一种情况，就是由圆、扇形、弓形与三角形、正方形、长方形等规则图形组合而成的，这是一类更为复杂的不规则图形，为了计算它的面积，常常要变动图形的位置或对图形进行适当的分割、拼补、旋转等手段使之转化为规则图形的和、差关系，同时还常要和“容斥原理”（即：集合 A 与集合 B 之间有： $S_{A \cup B} = S_A + S_B - S_{A \cap B}$ ）合并使用才能解决。

一、例题与方法指导

例 1. 如右图，在一个正方形内，以正方形的三条边为直径向内作三个半圆，求阴影部分的面积。



解法 1：把上图靠下边的半圆换成（面积与它相等）右边的半圆，得到右图。这时，右图中阴影部分与不含阴影部分的大小形状完全一样，因此它们的面积相等。所以上图中阴影部分的面积等于正方形面积的一半。

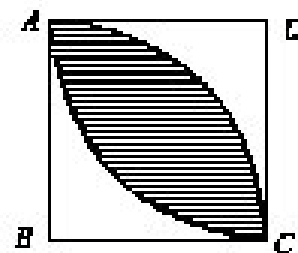
解法 2：将上半个“弧边三角形”从中间切开，分别补贴在下半圆的上侧边上，如右图所示。阴影部分的面积是正方形面积的一半。

解法 3: 将下面的半圆从中间切开，分别贴补在上面弧边三角形的两侧，如右图所示. 阴影部分的面积是正方形的一半.

例 2. 如右图，正方形 ABCD 的边长为 4 厘米，分别以 B、D 为圆心以 4 厘米为半径在正方形内画圆，求阴影部分面积。

解：由容斥原理

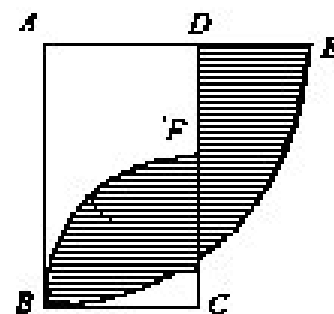
$$\begin{aligned}
 S_{\text{阴影}} &= S_{\text{扇形 ACB}} + S_{\text{扇形 ACD}} - S_{\text{正方形 ABCD}} \\
 &= \frac{\pi}{4} \times AB^2 \times 2 - AB^2 \\
 &= \frac{\pi}{4} \times 4^2 \times 2 - 4^2 \\
 &= 16 \times \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) \approx 16 \times \frac{3.14 - 2}{2} = 9.12 \text{ 平方米}
 \end{aligned}$$



例 3 如右图，矩形 ABCD 中，AB=6 厘米，BC=4 厘米，扇形 ABE 半径 AE=6 厘米，扇形 CBF 的半径 CB=4 厘米，求阴影部分的面积。

解： $S_{\text{阴影}} = S_{\text{扇形 ABE}} + S_{\text{扇形 CBF}} - S_{\text{矩形 ABCD}}$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{4} \times \pi \times 6^2 + \frac{1}{4} \times \pi \times 4^2 - 6 \times 4 \\
 &= \frac{1}{4} \times \pi (36 + 16) - 24 \\
 &= 13\pi - 24 = 15 \text{ (平方厘米)} \quad (\text{取 } \pi=3) 。
 \end{aligned}$$

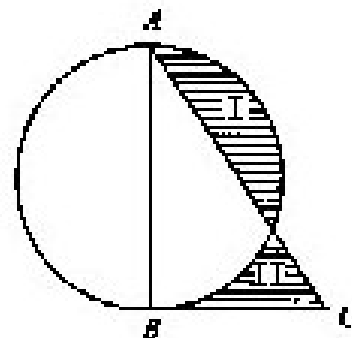


例 4. 如右图，直角三角形 ABC 中，AB 是圆的直径，且 AB=20 厘米，如果阴影（I）的面积比阴影（II）的面积大 7 平方厘米，求 BC 长。

分析 已知阴影（I）比阴影（II）的面积大 7 平方厘米，就是半圆面积比三角形 ABC 面积大 7 平方厘米；又知半圆直径 AB=20 厘米，可以求出圆面积. 半圆面积减去 7 平方厘米，就可求出三角形 ABC 的面积，进而求出三角形的底 BC 的长.

解：BC 的长 = $\left[3.14 \times \left(\frac{20}{2} \right)^2 \div 2 - 7 \right] \times 2 \div 20$

$$\begin{aligned}
 &= (157 - 7) \times 2 \div 20 \\
 &= 15 \text{ (厘米)} 。
 \end{aligned}$$



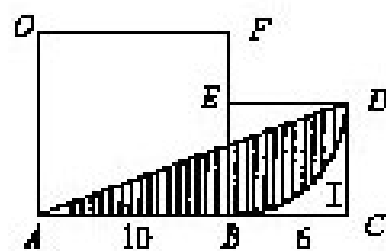
二、巩固训练

1. 如右图，两个正方形边长分别是 10 厘米和 6 厘米，求阴影部分的面积。

分析 阴影部分的面积，等于底为 16、高为 6 的直角三角形面积与图中（I）的面积之差。

而（I）的面积等于边长为 6 的正方形的面积减去 $\frac{1}{4}$ 以 6 为半径的圆的面积。

$$\begin{aligned} \text{解：} S_{\text{阴影}} &= S_{\text{三角形ACD}} - (S_{\text{正方形BCDE}} - S_{\text{扇形BED}}) \\ &= \frac{1}{2} \times (10+6) \times 6 - \left(6 \times 6 - \frac{1}{4} \times \pi \times 6^2 \right) \\ &= 48 - 9 \quad (\text{取 } \pi = 3) = 39 \quad (\text{平方厘米})。 \end{aligned}$$



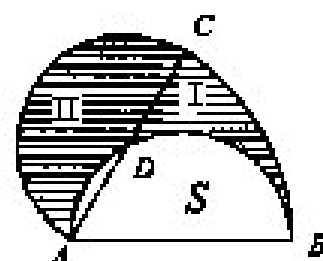
2. 如右图，将直径AB 为 3 的半圆绕A 逆时针旋转 60° ，此时AB 到达AC 的位置，求阴影部分的面积（取 $\pi = 3$ ）。

解：整个阴影部分被线段CD 分为 I 和 II 两部分，以AB 为直径的半圆被 弦AD 分成两部分，设其中AD 右侧的部分面积为S，由于弓形AD 是两个半圆的公共部分，去掉 AD 弓形后，两个半圆的剩余部分面积相等. 即 $II = S$ ，由于：

$$I + S = 60^\circ \text{ 圆心角扇形ABC面积}$$

$$I + II = \frac{9}{2}。$$

$$\therefore \text{阴影部分面积是 } \frac{9}{2}。$$



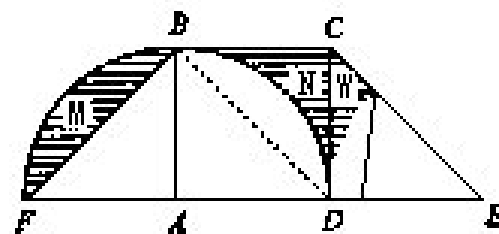
3. 如右图，ABCD 是正方形，且FA=AD=DE=1，求阴影部分的面积。

解：阴影M的面积 + 阴影N的面积 = $\triangle BCD$ 的面积 = $\frac{1}{2}$ ，

$$\begin{aligned} \text{阴影W的面积} &= \left(\text{正方形面积} - \frac{1}{4} \times \text{圆面积} \right) \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} \times \left(1 \times 1 - \frac{1}{4} \times \pi \times 1^2 \right) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8} \quad (\text{取 } \pi = 3)。$$

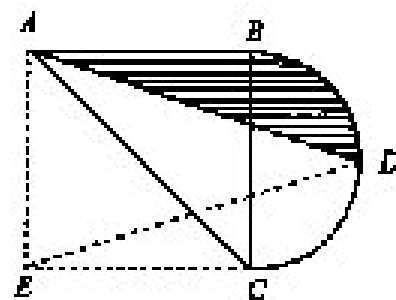
$$\therefore \text{阴影部分的总面积} = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$$



1. 如下页右上图，ABC 是等腰直角三角形，D 是半圆周上的中点，BC 是半圆的直径，且 AB=BC=10，求阴影部分面积（ π 取 3.14）。

解：∵ 三角形 ABC 是等腰直角三角形，以 AC 为对角线再作一个全等的等腰直角三角形 ACE，则 ABCE 为正方形（利用对称性质）。

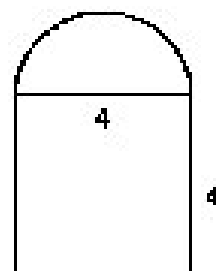
$$\begin{aligned}
 \therefore S_{\text{阴影}} &= (S_{\text{正方形ABCE}} + S_{\text{半圆}} - S_{\triangle ADE}) \div 2 \\
 &= (10 \times 10 + \pi \times 5^2 \div 2 - \frac{1}{2} \times 10 \times 15) \div 2 \\
 &= (100 + 39.25 - 75) \div 2 \\
 &= 64.25 \div 2 \\
 &= 32.125.
 \end{aligned}$$



总结： 对于不规则图形面积的计算问题一般将它转化为若干基本规则图形的组合，分析整体与部分的和、差关系，问题便得到解决。**常用的基本方法**有：

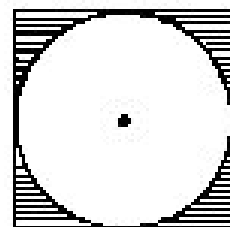
一、 相加法：

这种方法是将不规则图形分解转化成几个基本规则图形，分别计算它们的面积，然后相加求出整个图形的面积。例如，右图中，要求整个图形的面积，只要先求出上面半圆的面积，再求出下面正方形的面积，然后把它们相加就可以了。

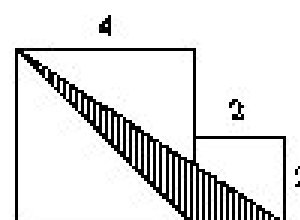


二、 相减法：

这种方法是将所求的不规则图形的面积看成是若干个基本规则图形的面积之差。例如，右图，若求阴影部分的面积，只需先求出正方形面积再减去里面圆的面积即可。



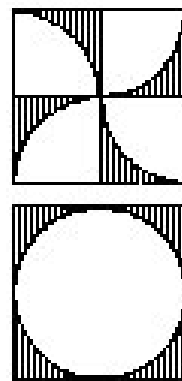
三、 直接求法：



这种方法是根据已知条件，从整体出发直接求出不规则图形面积. 如下页右上图，欲求阴影部分的面积，通过分析发现它就是一个底是2，高为 4 的三角形，面积可直接求出来。

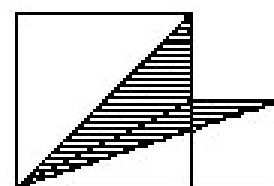
四、 重新组合法：

这种方法是将不规则图形拆开，根据具体情况和计算上的需要，重新组合成一个新的图形，设法求出这个新图形面积即可. 例如，欲求右图中阴影部分面积，可以把它拆开使阴影部分分布在正方形的 4 个角处，这时采用相减法就可求出其面积了。



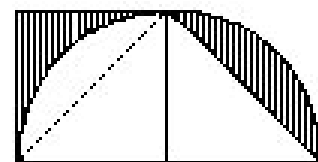
五、 辅助线法：

这种方法是根据具体情况在图形中添一条或若干条辅助线，使不规则图形转化成若干个基本规则图形，然后再采用相加、相减法解决即可. 如右图，求两个正方形中阴影部分的面积. 此题虽然可以用相减法解决，但不如添加一条辅助线后用直接法作更简便。



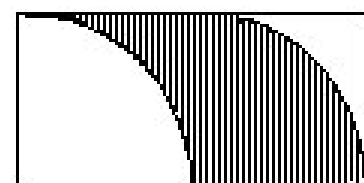
六、 割补法：

这种方法是把原图形的一部分切割下来补在图形中的另一部分使之成为基本规则图形，从而使问题得到解决. 例如，如右图，欲求阴影部分的面积，只需把右边弓形切割下来补在左边，这样整个阴影部分面积恰是正方形面积的一半。



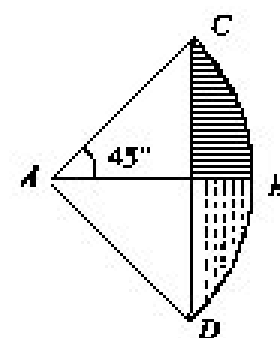
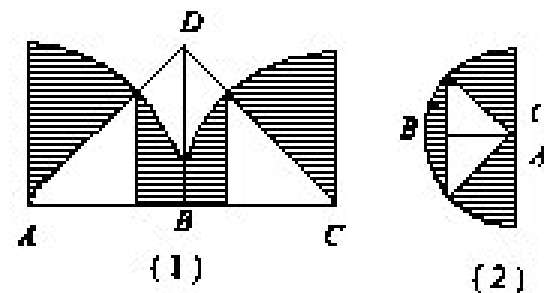
七、 平移法：

这种方法是将图形中某一部分切割下来平行移动到一恰当位置，使之组合成一个新的基本规则图形，便于求出面积. 例如，如右图，欲求阴影部分面积，可先沿中间切开把左边正方形内的阴影部分平行移到右边正方形内，这样整个阴影部分恰是一个正方形。



八、 旋转法：

这种方法是将图形中某一部分切割下来之后，使之沿某一点或某一轴旋转一定角度贴补在另一图形的一侧，从而组合成一个新的基本规则的图形，便于求出面积. 例如，欲求图（1）中阴影部分的面积，可将左半图形绕B 点逆时针方向旋转 180° ，使



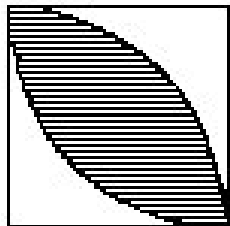
A 与 C 重合，从而构成如右图（2）的样子，此时阴影部分的面积可以看成半圆面积减去中间等腰直角三角形的面积。

九、 对称添补法：

这种方法是作出原图形的对称图形，从而得到一个新的基本规则图形. 原来图形面积就是这个新图形面积的一半. 例如，欲求右图中阴影部分的面积，沿AB 在原图下方作关于AB 为对称轴的对称扇形ABD. 弓形 CBD 的面积的一半就是所求阴影部分的面积。

十、重叠法：

这种方法是将所求的图形看成是两个或两个以上图形的重叠部分，然后运用“容斥原理”（ $S_{A \cup B} = S_A + S_B - S_{A \cap B}$ ）解决。例如，欲求右图中阴影部分的面积，可先求两个扇形面积的和，减去正方形面积，因为阴影部分的面积恰好是两个扇形重叠的部分。



（五） 抽屉问题

如果将 5 个苹果放到 3 个抽屉中去，那么不管怎么放，至少有一个抽屉中放的苹果不少于 2 个。道理很简单，如果每个抽屉中放的苹果都少于 2 个，即放 1 个或不放，那么 3 个抽屉中放的苹果的总数将少于或等于 3，这与有 5 个苹果的已知条件相矛盾，因此至少有一个抽屉中放的苹果不少于 2 个。

同样，有 5 只鸽子飞进 4 个鸽笼里，那么一定有一个鸽笼至少飞进了 2 只鸽子。

以上两个简单的例子所体现的数学原理就是“抽屉原理”，也叫“鸽笼原理”。
抽屉原理 1：将多于 n 件的物品任意放到 n 个抽屉中，那么至少有一个抽屉中的物品不少于 2 件。

说明这个原理是不难的。假定这 n 个抽屉中，每一个抽屉内的物品都不到 2 件，那么每一个抽屉中的物品或者是一件，或者没有。这样， n 个抽屉中所放物品的总数就不会超过 n 件，这与有多于 n 件物品的假设相矛盾，所以前面假定“这 n 个抽屉中，每一个抽屉内的物品都不到 2 件”不能成立，从而抽屉原理 1 成立。

从最不利原则也可以说明抽屉原理 1。为了使抽屉中的物品不少于 2 件，最不利的情况就是 n 个抽屉中每个都放入 1 件物品，共放入 n 件物品，此时再放入 1 件物品，无论放入哪个抽屉，都至少有 1 个抽屉不少于 2 件物品。这就说明了抽屉原理 1。

一、例题与方法指导

例 1. 某幼儿园有 367 名 1996 年出生的小朋友，是否有生日相同的小朋友？

分析与解：1996 年是闰年，这年应有 366 天。把 366 天看作 366 个抽屉，将 367 名小朋友看作 367 个物品。这样，把 367 个物品放进 366 个抽屉里，至少有一个抽屉里不止放一个物品。因此至少有 2 名小朋友的生日相同。

例 2. 在任意的四个自然数中，是否其中必有两个数，它们的差能被 3 整除？

分析与解：因为任何整数除以 3，其余数只可能是 0, 1, 2 三种情形。我们将余数的这三种情形看成是三个“抽屉”。一个整数除以 3 的余数属于哪种情形，就将此整数放在那个“抽屉”里。

将四个自然数放入三个抽屉，至少有一个抽屉里放了不止一个数，也就是说至少有两个数除以 3 的余数相同。这两个数的差必能被 3 整除。

例 3. 在任意的五个自然数中，是否其中必有三个数的和是 3 的倍数？

分析与解：根据例 2 的讨论，任何整数除以 3 的余数只能是 0, 1, 2。现在，对于任意的五个自然数，根据抽屉原理，至少有一个抽屉里有两个或两个以上的数，于是可分下面两种情形来加以讨论。

第一种情形。有三个数在同一个抽屉里，即这三个数除以 3 后具有相同的余数。因为这三个数的余数之和是其中一个余数的 3 倍，故能被 3 整除，所以这三个数之和能被 3 整除。

第二种情形。至多有两个数在同一个抽屉里，那么每个抽屉里都有数，在每个抽屉里各取一个数，这三个数被 3 除的余数分别为 0, 1, 2。因此这三个数之和能被 3 整除。

综上所述，在任意的五个自然数中，其中必有三个数的和是 3 的倍数。

二、巩固训练

1. 有苹果和桔子若干个，任意分成 5 堆，能否找到这样两堆，使苹果的总数与桔子的总数都是偶数？

分析与解：由于题目只要求判断两堆水果的个数关系，因此可以从水果个数的奇、偶性上来考虑抽屉的设计。

对于每堆水果中的苹果、桔子的个数分别都有奇数与偶数两种可能，所以每堆水果中苹果、桔子个数的搭配就有 4 种情形：

(奇, 奇), (奇, 偶), (偶, 奇), (偶, 偶),

其中括号中的第一个字表示苹果数的奇偶性，第二个字表示桔子数的奇偶性。

将这 4 种情形看成 4 个抽屉，现有 5 堆水果，根据抽屉原理可知，这 5 堆水果里至少有 2 堆属于上述 4 种情形的同一种情形。由于奇数加奇数为偶数，偶数

加偶数仍为偶数，所以在同一个抽屉中的两堆水果，其苹果的总数与桔子的总数都是偶数。

1. 用红、蓝两种颜色将一个 2×5 方格图中的小方格随意涂色（见右图），每个小方格涂一种颜色。是否存在两列，它们的小方格中涂的颜色完全相同？

	第 一 列	第 二 列	第 三 列	第 四 列	第 五 列
第一行					
第二行					

分析与解：用红、蓝两种颜色给每列中两个小方格随意涂色，只有下面四种情形：

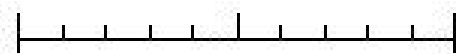
红	红	蓝	蓝
红	蓝	红	蓝

将上面的四种情形看成四个“抽屉”。根据抽屉原理，将五列放入四个抽屉，至少有一个抽屉中有不少于两列，这两列的小方格中涂的颜色完全相同。

在上面的几个例子中，例 1 用一年的 366 天作为 366 个抽屉；例 2 与例 3 用整数被 3 除的余数的三种情形 0, 1, 2 作为 3 个抽屉；例 4 将一条线段的 10 等份作为 10 个抽屉；例 5 把每堆水果中，苹果数与桔子数的奇偶搭配情形作为 4 个抽屉；例 6 将每列中两个小方格涂色的 4 种情形作为 4 个抽屉。由此可见，利用抽屉原理解题的关键，在于恰当地构造抽屉。

2. 在长度是 10 厘米的线段上任意取 11 个点，是否至少有两个点，它们之间的距离不大于 1 厘米？

分析与解：把长度 10 厘米的线段 10 等分，那么每段线段的长度是 1 厘米（见下图）。



将每段线段看成是一个“抽屉”，一共有 10 个抽屉。现在将这 11 个点放到这 10 个抽屉中去。根据抽屉原理，至少有一个抽屉里有两个或两个以上的点（包括这些线段的端点）。由于这两个点在同一个抽屉里，它们之间的距离当然不会大于 1 厘米。

所以，在长度是 10 厘米的线段上任意取 11 个点，至少存在两个点，它们之间的距离不大于 1 厘米。

三、拓展提升

1. 有 5 个小朋友，每人都从装有许多黑白围棋子的布袋中任意摸出 3 枚棋子。请你证明，这 5 个人中至少有两个小朋友摸出的棋子的颜色的配组是一样的。

分析与解答 首先要确定 3 枚棋子的颜色可以有多少种不同的情况，可以有：3 黑，2 黑 1 白，1 黑 2 白，3 白共 4 种配组情况，看作 4 个抽屉。把每人的 3 枚棋

作为一组当作一个苹果，因此共有 5 个苹果. 把每人所拿 3 枚棋子按其颜色配组情况放入相应的抽屉. 由于有 5 个苹果，比抽屉个数多，所以根据抽屉原理，至少有两个苹果在同一个抽屉里，也就是他们所拿棋子的颜色配组是一样的。

1. 一副扑克牌（去掉两张王牌），每人随意摸两张牌，至少有多少人才能保证他们当中一定有两人所摸两张牌的花色情况是相同的？

分析与解答 扑克牌中有方块、梅花、黑桃、红桃 4 种花色，2 张牌的花色可以有：2 张方块，2 张梅花，2 张红桃，2 张黑桃，1 张方块 1 张梅花，1 张方块 1 张黑桃，1 张方块 1 张红桃，1 张梅花 1 张黑桃，1 张梅花 1 张红桃，1 张黑桃 1 张红桃共计 10 种情况. 把这 10 种花色配组看作 10 个抽屉，只要苹果的个数比抽屉的个数多 1 个就可以有题目所要的结果. 所以至少有 11 个人。

2. 从 2、4、6、...、30 这 15 个偶数中，任取 9 个数，证明其中一定有两个数之和是 34。

分析与解答 我们用题目中的 15 个偶数制造 8 个抽屉：

4	6	8	10	12	14	16	2
30	28	26	24	22	20	18	

凡是抽屉中有两个数的，都具有一个共同的特点：这两个数的和是 34。

现从题目中的 15 个偶数中任取 9 个数，由抽屉原理（因为抽屉只有 8 个），必有两个数在同一个抽屉中. 由制造的抽屉的特点，这两个数的和是 34。

（六） 逻辑推理

曾经爱因斯坦出过一道测试题，他说世界上有 98%的人回答不出!! 让我们一起来看看是什么题呢。

在一条街上有 5 座颜色不同的房子，住着 5 个不同国家的人，他们抽着 5 种不同的烟，喝着 5 种不同的饮料，养着 5 种不同的宠物。有下面 15 个已知条件，求解。

- 1、英国人住红色房子。
- 2、瑞典人养狗。
- 3、丹麦人喝茶。
- 4、绿色房子在白色房子左面。
- 5、绿色房子主人喝咖啡。
- 6、抽 Pall Mall 香烟的人养鸟。

- 7、黄色房子主人抽 Dunhill 香烟。
- 8、住在中间房子的人喝牛奶。
- 9、挪威人住第一间房。
- 10、抽 Blends 香烟的人住在养猫的人隔壁。
- 11、养马的人住抽 Dunhill 香烟的人隔壁。
- 12、抽 Blue Master 的人喝啤酒。
- 13、德国人抽 Prince 香烟。
- 14、挪威人住蓝色房子隔壁。
- 15、抽 Blends 香烟的人有一个喝水的邻居。

问：哪个国家的人养鱼？

这道题为什么会难倒这么多人呢，首先，我们就来研究一下关于他的最基本的逻辑问题吧。

一、例题与方法指导

例 1. 某地质学院的学生对一种矿石进行观察和鉴别：

甲判断：不是铁，也不是铜。

乙判断：不是铁，而是锡。

丙判断：不是锡，而是铁。

经化验证明：有一个人的判断完全正确，有一个人说对了一半，而另一个人完全说错了。你知道三人中谁是对的，谁是错的，谁是只对一半的吗？

思路导航：

丙全说对了，甲说对了一半，乙全说错了。先设甲全对，推出矛盾后，再设乙全对，又推出矛盾，则说明丙全对，甲说对了一半，乙全说错了。

例 2. 数学竞赛后，小明、小华和小强各获得一枚奖牌，其中一人得金牌，一人得银牌，一人得铜牌。老师猜测：“小明得金牌，小华不得金牌，小强不得铜牌。”结果老师只猜对了——一个，那么谁得金牌，谁得银牌，谁得铜牌？

思路导航：

小华得金牌，小强得银牌，小明得铜牌。

(1) 若小明得金牌，小华一定“不得金牌”，这与“老师只猜对了——一个”相矛盾，不合题意。

(2) 若小华得金牌，那么“小明得金牌”与“小华不得金牌”这两句都是错的，那么“小强不得铜牌”应是正确的，那么小强得银牌，小明得铜牌。

例 3. 一位法官在审理一起盗窃案中，对涉及到的四名嫌疑犯甲、乙、丙、丁进行了审问。四人分别供述如下：

甲说：“罪犯在乙、丙、丁三人之中。”

乙说：“我没有做案，是丙偷的。”

丙说：“在甲和丁中间有一人是罪犯。”

丁说：“乙说的是事实。”

经过充分的调查，证实这四人中有两人说了真话，另外两人说的是假话。

同学们，请你做一名公正的法官，对此案进行裁决，确认谁是罪犯？

思路导航：

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：
<https://d.book118.com/607005023051006060>