

2024 届新疆维吾尔自治区下学期高三数学试题第一次摸底考试试卷

考生请注意：

1. 答题前请将考场、试室号、座位号、考生号、姓名写在试卷密封线内，不得在试卷上作任何标记。
2. 第一部分选择题每小题选出答案后，需将答案写在试卷指定的括号内，第二部分非选择题答案写在试卷题目指定的位置上。
3. 考生必须保证答题卡的整洁。考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 函数 $y = f(x)$ 满足对任意 $x \in \mathbf{R}$ 都有 $f(x+2) = f(-x)$ 成立，且函数 $y = f(x-1)$ 的图象关于点 $(1, 0)$ 对称， $f(1) = 4$ ，则 $f(2016) + f(2017) + f(2018)$ 的值为 ()

A. 0 B. 2 C. 4 D. 1

2. 已知 i 为虚数单位，若复数 $z = \frac{1+2i}{2-i} + 1$ ，则 $\bar{z} =$

A. $\frac{9}{5} + i$ B. $1 - i$

C. $1 + i$ D. $-i$

3. 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n + a_{n+2} = 2a_{n+1}$ ($n \in \mathbf{N}^*$)，且 $a_1 + a_2 + a_3 = 9$ ， $a_4 = 8$ ，则 $a_5 =$ ()

A. $\frac{21}{2}$ B. 9 C. $\frac{17}{2}$ D. 7

4. 已知 m, n 是两条不同的直线， α, β 是两个不同的平面，给出四个命题：

- ①若 $\alpha \perp \beta = m$ ， $n \subset \alpha$ ， $n \perp m$ ，则 $\alpha \perp \beta$ ；②若 $m \perp \alpha$ ， $m \perp \beta$ ，则 $\alpha \parallel \beta$ ；
③若 $m \parallel n$ ， $m \subset \alpha$ ， $\alpha \parallel \beta$ ，则 $n \parallel \beta$ ；④若 $m \perp \alpha$ ， $n \perp \beta$ ， $m \perp n$ ，则 $\alpha \perp \beta$

其中正确的是 ()

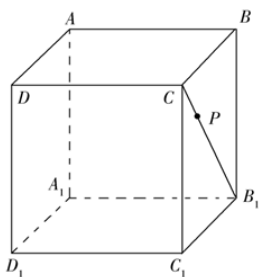
A. ①② B. ③④ C. ①④ D. ②④

5. 已知命题 $p: \exists x_0 > 2, x_0^3 - 8 > 0$ ，那么 $\neg p$ 为 ()

A. $\exists x_0 > 2, x_0^3 - 8 \leq 0$ B. $\forall x > 2, x^3 - 8 \leq 0$

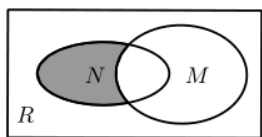
C. $\exists x_0 \leq 2, x_0^3 - 8 \leq 0$ D. $\forall x \leq 2, x^3 - 8 \leq 0$

6. 已知正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2，点 P 在线段 CB_1 上，且 $B_1P = 2PC$ ，平面 α 经过点 A, P, C_1 ，则正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 被平面 α 截得的截面面积为 ()



- A. $3\sqrt{6}$ B. $2\sqrt{6}$ C. 5 D. $\frac{5\sqrt{3}}{4}$

7. 已知集合 $M = \{x | x^2 - 3x - 10 < 0\}$, $N = \{x | y = \sqrt{9 - x^2}\}$, 且 M 、 N 都是全集 R (R 为实数集) 的子集, 则如图所示韦恩图中阴影部分所表示的集合为 ()



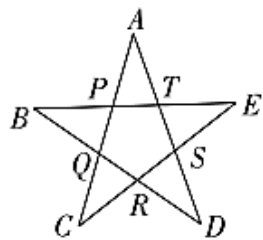
- A. $\{x | 3 < x \leq 5\}$ B. $\{x | x < -3 \text{ 或 } x > 5\}$
C. $\{x | -3 \leq x \leq -2\}$ D. $\{x | -3 \leq x \leq 5\}$

8. 下列函数中, 既是奇函数, 又在 $(0,1)$ 上是增函数的是 ().

- A. $f(x) = x \ln x$ B. $f(x) = e^x - e^{-x}$
C. $f(x) = \sin 2x$ D. $f(x) = x^3 - x$

9. 中国的国旗和国徽上都有五角星, 正五角星与黄金分割有着密切的联系, 在如图所示的正五角星中, 以 A 、 B 、

C 、 D 、 E 为顶点的多边形为正五边形, 且 $PT = \frac{\sqrt{5}-1}{2} AP$, 则 $\frac{AT}{ES} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ()



- A. $\frac{\sqrt{5}+1}{2} \frac{AT}{QR}$ B. $\frac{\sqrt{5}+1}{2} \frac{AT}{RQ}$ C. $\frac{\sqrt{5}-1}{2} \frac{AT}{RD}$ D. $\frac{\sqrt{5}-1}{2} \frac{AT}{RC}$

10. 双曲线 $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ 的渐近线方程是 ()

- A. $x \pm 2y = 0$ B. $2x \pm y = 0$ C. $4x \pm y = 0$ D. $x \pm 4y = 0$

11. 设 $a = \log_3 0.5$, $b = \log_{0.2} 0.3$, $c = 2^{0.3}$, 则 a, b, c 的大小关系是 ()

- A. $a < b < c$ B. $a < c < b$ C. $c < a < b$ D. $c < b < a$

12. 已知 $\triangle ABC$ 的面积是 $\frac{1}{2}$, $AB=1$, $BC=\sqrt{2}$, 则 $AC=$ ()

- A. 5 B. $\sqrt{5}$ 或 1 C. 5 或 1 D. $\sqrt{5}$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知 $f(x) = \log_a(x^2 + 4)$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 有最小值，且最小值不小于 1，则 a 的取值范围为_____.

14. 已知 $\{a_n\}$ 是等比数列，若 $\vec{a} = (a_2, 2)$, $\vec{b} = (a_3, 3)$, 且 $\vec{a} \parallel \vec{b}$, 则 $\frac{a_2 + a_4}{a_3 + a_5} =$ _____.

15. 平面区域 $\begin{cases} 3y + 2x - 1 \geq 0 \\ y + 4x - 7 \leq 0 \\ y - x - 2 \leq 0 \end{cases}$ 的外接圆的方程是_____.

16. 若 $x > 0$, $y > 0$, 且 $\frac{2}{x} + \frac{1}{y} = 1$, 则 $x + 2y$ 的最小值是_____.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 已知函数 $f(x) = ax - (a+1)\ln x - \frac{1}{x} + 2$ ($a \in \mathbf{R}$).

(1) 讨论函数 $f(x)$ 单调性;

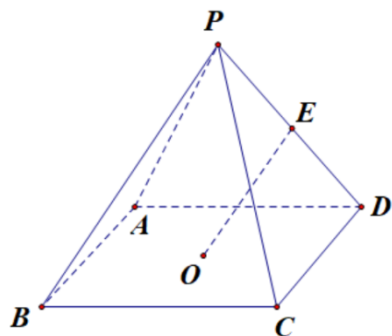
(2) 当 $a = -2$ 时，求证： $f(x) < e^x - 2x - \frac{1}{x}$.

18. (12 分) 已知函数 $g(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - x$

(1) 讨论 $g(x)$ 的单调性;

(2) 当 $x \geq -1$ 时， $g(x) + \frac{3}{2}x^2 - x + 1 \geq 0$, 求 x 的取值范围.

19. (12 分) 在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是平行四边形， O 为其中心， $\triangle PAD$ 为锐角三角形，且平面 $PAD \perp$ 底面 $ABCD$ ， E 为 PD 的中点， $CD \perp DP$.



(1) 求证: $OE \perp$ 平面 PAB ;

(2) 求证: $CD \perp PA$.

20. (12 分) 已知函数 $f(x) = x^2 + 2x - m \ln(x+1)$, 其中 $m \in R$.

(I) 若 $m > 0$, 求函数 $f(x)$ 的单调区间;

(II) 设 $g(x) = f(x) + \frac{1}{e^x}$. 若 $g(x) > \frac{1}{x+1}$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立, 求实数 m 的最大值.

21. (12 分) 椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 它的四个顶点构成的四边形面积为 $2\sqrt{2}$.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 设 P 是直线 $x = a^2$ 上任意一点, 过点 P 作圆 $x^2 + y^2 = a^2$ 的两条切线, 切点分别为 M, N , 求证: 直线 MN 恒过一个定点.

22. (10 分) 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 的左顶点为 A , 右焦点为 F , P, Q 为椭圆 C 上两

点, 圆 $O: x^2 + y^2 = r^2$ ($r > 0$).

(1) 若 $PF \perp x$ 轴, 且满足直线 AP 与圆 O 相切, 求圆 O 的方程;

(2) 若圆 O 的半径为 $\sqrt{3}$, 点 P, Q 满足 $k_{OP} \cdot k_{OQ} = -\frac{3}{4}$, 求直线 PQ 被圆 O 截得弦长的最大值.

参考答案

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1、C

【解析】

根据函数 $y = f(x-1)$ 的图象关于点 $(1, 0)$ 对称可得 $f(x)$ 为奇函数, 结合 $f(x+2) = f(-x)$ 可得 $f(x)$ 是周期为 4 的周期函数, 利用 $f(0) = 0$ 及 $f(1) = 4$ 可得所求的值.

【详解】

因为函数 $y = f(x-1)$ 的图象关于点 $(1, 0)$ 对称, 所以 $y = f(x)$ 的图象关于原点对称,

所以 $f(x)$ 为 R 上的奇函数.

由 $f(x+2) = f(-x)$ 可得 $f(x+2) = -f(x)$, 故 $f(x+4) = -f(x+2) = f(x)$,

故 $f(x)$ 是周期为 4 的周期函数.

因为 $2016 = 4 \times 504$, $2017 = 4 \times 504 + 1$, $2018 = 4 \times 504 + 2$,

所以 $f(2016) + f(2017) + f(2018) = f(0) + f(1) + f(2) = 4 + f(2)$.

因为 $f(x+2) = f(-x)$, 故 $f(0+2) = f(-0) = -f(0) = 0$,

所以 $f(2016) + f(2017) + f(2018) = 4$.

故选: C.

【点睛】

本题考查函数的奇偶性和周期性, 一般地, 如果 R 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x+a) = -f(x)$ ($a \neq 0$), 那么 $f(x)$ 是周期为 $2a$ 的周期函数, 本题属于中档题.

2、B

【解析】

因为 $z = \frac{1+2i}{2-i} + 1 = \frac{(1+2i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} + 1 = \frac{2+i+4i+2i^2}{5} + 1 = 1+i$, 所以 $\bar{z} = 1-i$, 故选 B.

3、A

【解析】

先由题意可得数列 $\{a_n\}$ 为等差数列, 再根据 $a_1 + a_2 + a_3 = 9$, $a_4 = 8$, 可求出公差, 即可求出 a_5 .

【详解】

数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n + a_{n+2} = 2a_{n+1}$ ($n \in N^*$), 则数列 $\{a_n\}$ 为等差数列,

Q $a_1 + a_2 + a_3 = 9$, $a_4 = 8$,

$\therefore 3a_1 + 3d = 9$, $a_1 + 3d = 8$,

$\therefore d = \frac{5}{2}$,

$\therefore a_5 = a_4 + d = 8 + \frac{5}{2} = \frac{21}{2}$,

故选: A.

【点睛】

本题主要考查了等差数列的性质和通项公式的求法，意在考查学生对这些知识的理解掌握水平，属于基础题.

4、D

【解析】

根据面面垂直的判定定理可判断①；根据空间面面平行的判定定理可判断②；根据线面平行的判定定理可判断③；根据面面垂直的判定定理可判断④.

【详解】

对于①，若 $\alpha \perp \beta = m$ ， $n \subset \alpha$ ， $n \perp m$ ， α ， β 两平面相交，但不一定垂直，故①错误；

对于②，若 $m \perp \alpha$ ， $m \perp \beta$ ，则 $\alpha \parallel \beta$ ，故②正确；

对于③，若 $m \parallel n$ ， $m \subset \alpha$ ， $\alpha \parallel \beta$ ，当 $n \subset \beta$ ，则 n 与 β 不平行，故③错误；

对于④，若 $m \perp \alpha$ ， $n \perp \beta$ ， $m \perp n$ ，则 $\alpha \perp \beta$ ，故④正确；

故选：D

【点睛】

本题考查了线面平行的判定定理、面面平行的判定定理以及面面垂直的判定定理，属于基础题.

5、B

【解析】

利用特称命题的否定分析解答得解.

【详解】

已知命题 $p: \exists x_0 > 2$ ， $x_0^3 - 8 > 0$ ，那么 $\neg p$ 是 $\forall x > 2, x^3 - 8 \leq 0$.

故选：B.

【点睛】

本题主要考查特称命题的否定，意在考查学生对该知识的理解掌握水平，属于基础题.

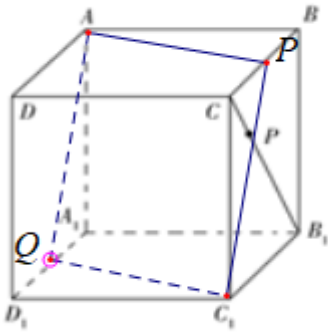
6、B

【解析】

先根据平面的基本性质确定平面，然后利用面面平行的性质定理，得到截面的形状再求解.

【详解】

如图所示：



A, P, C_1 确定一个平面 α ,

因为平面 $AA_1DD_1 \parallel$ 平面 BB_1CC_1 ,

所以 $AQ \parallel PC_1$, 同理 $AP \parallel QC_1$,

所以四边形 APC_1Q 是平行四边形.

即正方体被平面截的截面.

因为 $B_1P = 2PC$,

所以 $C_1B_1 = 2PC$,

即 $PC = PB = 1$

所以 $AP = PC_1 = \sqrt{5}, AC_1 = 2\sqrt{3}$

由余弦定理得: $\cos \angle APC_1 = \frac{AP^2 + PC_1^2 - AC_1^2}{2AP \times PC_1} = \frac{1}{5}$

所以 $\sin \angle APC_1 = \frac{2\sqrt{6}}{5}$

所以 $S_{\text{四边形}APQC_1} = 2 \times \frac{1}{2} AP \times PC_1 \times \sin \angle APC_1 = 2\sqrt{6}$

故选: B

【点睛】

本题主要考查平面的基本性质, 面面平行的性质定理及截面面积的求法, 还考查了空间想象和运算求解的能力, 属于中档题.

7、C

【解析】

根据韦恩图可确定所表示集合为 $N \cap (\complement_R M)$, 根据一元二次不等式解法和定义域的求法可求得集合 M, N

，根据补集和交集定义可求得结果.

【详解】

由韦恩图可知：阴影部分表示 $N \cap (\complement_R M)$ ，

$$Q M = \{x | (x-5)(x+2) < 0\} = \{x | -2 < x < 5\}, N = \{x | 9 - x^2 \geq 0\} = \{x | -3 \leq x \leq 3\},$$

$$\therefore N \cap (\complement_R M) = \{x | -3 \leq x \leq -2\}.$$

故选：C.

【点睛】

本题考查集合运算中的补集和交集运算，涉及到一元二次不等式和函数定义域的求解；关键是能够根据韦恩图确定所求集合.

8、B

【解析】

奇函数满足定义域关于原点对称且 $f(x) + f(-x) = 0$ ，在 $(0,1)$ 上 $f'(x) \geq 0$ 即可.

【详解】

A：因为 $f(x) = x \ln x$ 定义域为 $x > 0$ ，所以不可能为奇函数，错误；

B： $f(x) = e^x - e^{-x}$ 定义域关于原点对称，且 $f(x) + f(-x) = e^x - e^{-x} + e^{-x} - e^x = 0$

满足奇函数，又 $f'(x) = e^x + e^{-x} > 0$ ，所以在 $(0,1)$ 上 $f'(x) \geq 0$ ，正确；

C： $f(x) = \sin 2x$ 定义域关于原点对称，且 $f(x) + f(-x) = \sin 2x + \sin -2x = 0$

满足奇函数， $f'(x) = 2 \cos 2x$ ，在 $(0,1)$ 上，因为 $f'(0)f'(1) = 2 \times 2 \cos 2 < 0$ ，所以在 $(0,1)$ 上不是增函数，错误；

D： $f(x) = x^3 - x$ 定义域关于原点对称，且 $f(x) + f(-x) = x^3 - x + (-x^3 + x) = 0$ ，

满足奇函数， $f'(x) = 3x^2 - 1$ 在 $(0,1)$ 上很明显存在变号零点，所以在 $(0,1)$ 上不是增函数，错误；

故选：B

【点睛】

此题考查判断函数奇偶性和单调性，注意奇偶性的前提定义域关于原点对称，属于简单题目.

9、A

【解析】

利用平面向量的概念、平面向量的加法、减法、数乘运算的几何意义，便可解决问题.

【详解】

$$\text{解: } \overrightarrow{AT} - \frac{\sqrt{5}-1}{2} \overrightarrow{ES} = \overrightarrow{SD} - \overrightarrow{SR} = \overrightarrow{RD} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \overrightarrow{QR}.$$

故选：A

【点睛】

本题以正五角星为载体，考查平面向量的概念及运算法则等基础知识，考查运算求解能力，考查化归与转化思想，属于基础题.

10、A

【解析】

试题分析：渐近线方程是 $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ ，整理后就得到双曲线的渐近线.

$$\text{解: 双曲线 } \frac{x^2}{4} - y^2 = 1$$

$$\text{其渐近线方程是 } \frac{x^2}{4} - y^2 = 1$$

$$\text{整理得 } x \pm 2y = 1.$$

故选 A.

点评：本题考查了双曲线的渐进方程，把双曲线的标准方程中的“1”转化成“-1”即可求出渐进方程. 属于基础题.

11、A

【解析】

选取中间值 0 和 1，利用对数函数 $y = \log_3 x$ ， $y = \log_{0.2} x$ 和指数函数 $y = 2^x$ 的单调性即可求解.

【详解】

因为对数函数 $y = \log_3 x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增，

$$\text{所以 } \log_3 0.5 < \log_3 1 = 0,$$

因为对数函数 $y = \log_{0.2} x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减，

$$\text{所以 } 0 = \log_{0.2} 1 < \log_{0.2} 0.3 < \log_{0.2} 0.2 = 1,$$

因为指数函数 $y = 2^x$ 在 R 上单调递增，

$$\text{所以 } 2^{0.3} > 2^0 = 1,$$

综上所述, $a < b < c$.

故选:A

【点睛】

本题考查利用对数函数和指数函数的单调性比较大小;考查逻辑思维能力和知识的综合运用能力;选取合适的中间值是求解本题的关键;属于中档题、常考题型.

12、B

【解析】

$$\because S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC \cdot \sin B = \frac{1}{2}, \quad AB = 1, BC = \sqrt{2}$$

$$\therefore \sin B = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\textcircled{1} \text{ 若 } B \text{ 为钝角, 则 } \cos B = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ 由余弦定理得 } AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cos B \cdot AB \cdot BC,$$

$$\text{解得 } AC = \sqrt{5};$$

$$\textcircled{2} \text{ 若 } B \text{ 为锐角, 则 } \cos B = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ 同理得 } AC = 1.$$

故选 B.

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13、(1,4]

【解析】

真数 $x^2 + 4$ 有最小值, 根据已知可得 a 的范围, 求出函数 $f(x)$ 的最小值, 建立关于 a 的不等量关系, 求解即可.

【详解】

$\because x^2 + 4 \geq 4$, 且 $f(x) = \log_a(x^2 + 4)$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 有最小值,

$$\therefore a > 1, f(x)_{\min} = \log_a 4 \geq 1, a \leq 4, \therefore 1 < a \leq 4,$$

$\therefore a$ 的取值范围为 (1,4].

故答案为: (1,4].

【点睛】

本题考查对数型复合函数的性质, 熟练掌握基本初等函数的性质是解题关键, 属于基础题.

14、 $\frac{2}{3}$

【解析】

若 $\vec{a} = (a_2, 2)$, $\vec{b} = (a_3, 3)$, 且 $\vec{a} \parallel \vec{b}$, 则 $3a_2 = 2a_3$, 由 $\{a_n\}$ 是等比数列, 可知公比为 $q = \frac{a_3}{a_2} = \frac{3}{2}$.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/607016030044006142>