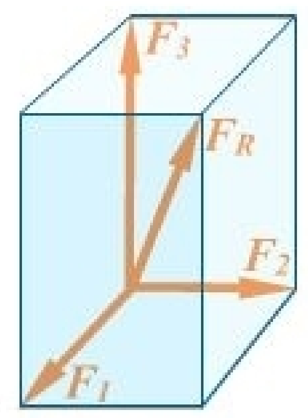
空间力系

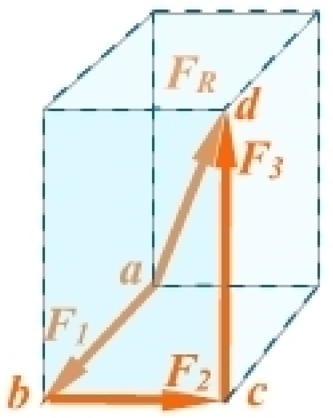
空间力系：空间汇交（共点）力系，空间力偶系，
空间任意力系，空间平行力系。

§4－1空间汇交力系

平面汇交力系合成的力多变形法则对空间汇交力系是否适用？



(a)



(b)

对空间多个汇交力是否好用？ 用解析法

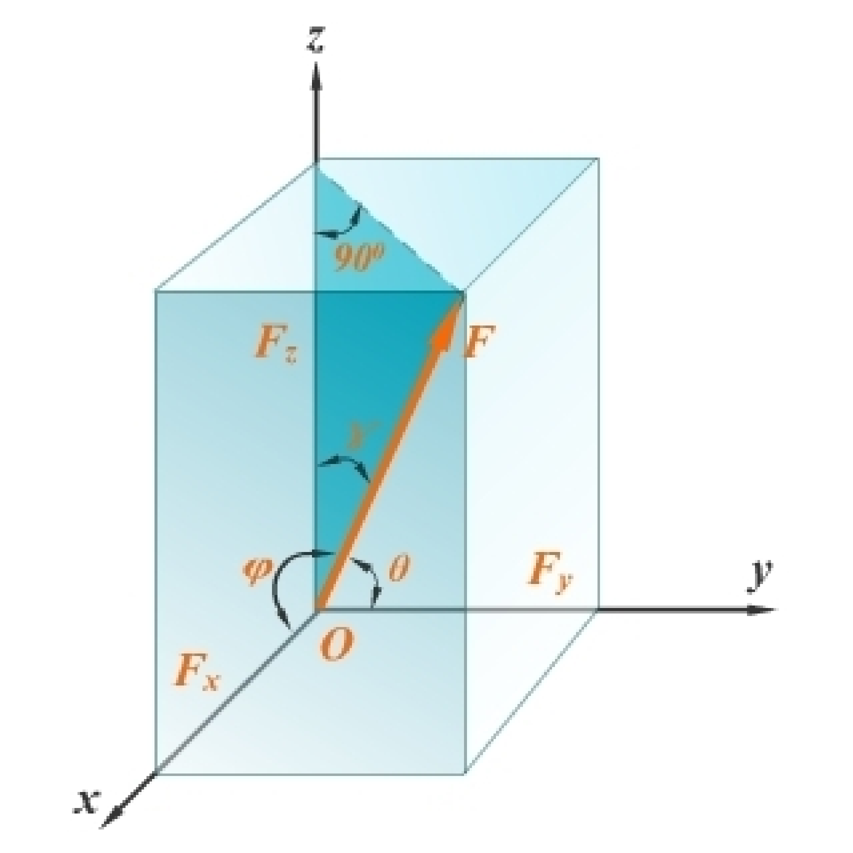
1、力在直角坐标轴上的投影

直接投影法

$$F_x = F\cos\varphi$$

$$F_y = F\cos\theta$$

$$F_z = F\cos\gamma$$



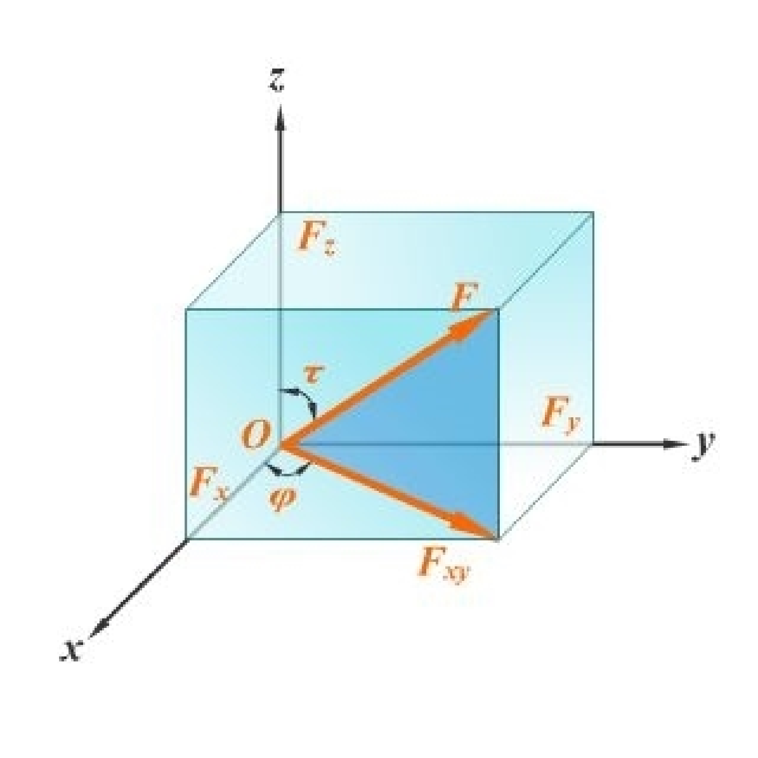
间接（二次）投影法

$$F_{xy} = F\sin\gamma$$

$$F_x = F\sin\gamma\cos\varphi$$

$$F_y = F\sin\gamma\sin\varphi$$

$$F_z = F\cos\gamma$$



2、空间汇交力系的合力与平衡条件

空间汇交力系的合力 $\overline{F}_R = \sum \overline{F}_i$

合矢量（力）投影定理

$$F_{Rx} = \sum F_{ix} = \sum F_x \quad F_{Ry} = \sum F_{iy} = \sum F_y \quad F_{Rz} = \sum F_{iz} = \sum F_z$$

合力的大小 $F_R=\sqrt{(\sum F_x)^2+(\sum F_y)^2+(\sum F_z)^2}$ （4－1）

方向余弦 $\cos(\bar{F}_R,\bar{i})=\dfrac{\sum F_x}{F_R}$ $\cos(\bar{F}_R,\bar{j})=\dfrac{\sum F_y}{F_R}$ $\cos(\bar{F}_R,\bar{k})=\dfrac{\sum F_z}{F_R}$

空间汇交力系平衡的充分必要条件是:

该力系的合力等于零，即 $\bar{F}_R=0$ 由式（4－1）

$$\sum F_x=0 \qquad \sum F_y=0 \qquad \sum F_z=0 \qquad (4\text{-}2)$$

称为空间汇交力系的平衡方程。

§4－2　力对点的矩和力对轴的矩

1、　力对点的矩以矢量表示 ——力矩矢

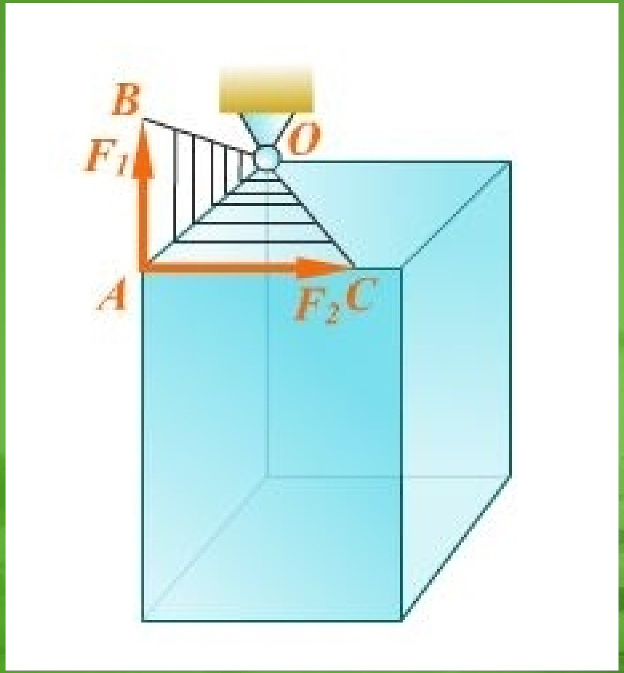
三要素：

（1）大小:力F与力臂的乘积

(2)方向:转动方向

(3)作用面：力矩作用面。

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F} \qquad (4-3)$$



又 $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

$$\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}$$

则 $\vec{M}_O(\vec{F}) = (\vec{r} \times \vec{F}) = (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) \times (F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k})$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_x & F_x \end{vmatrix}$$

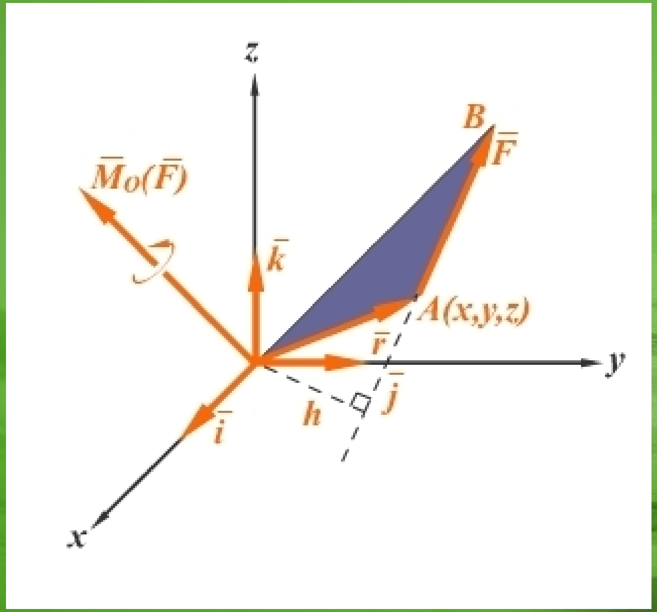
$$= (yF_x - zF_y)\vec{i} + (zF_x - xF_z)\vec{j} + (xF_y - yF_x)\vec{k} \quad (4-4)$$

力对点O的矩 $\vec{M}_O(\vec{F})$ 在三个坐标轴上的投影为

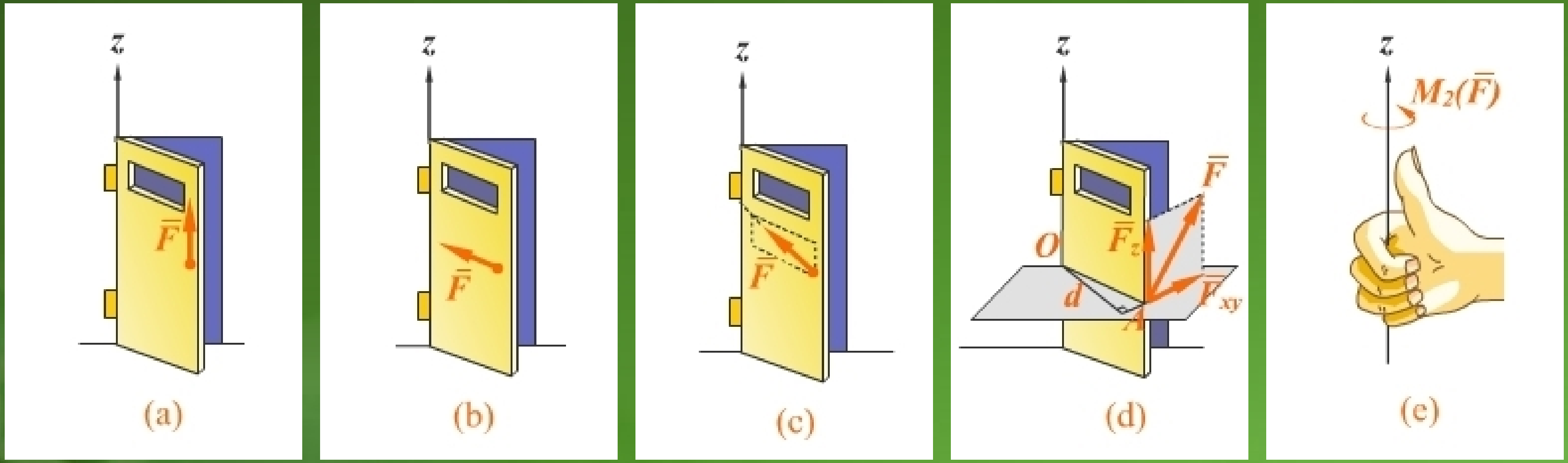
$$\left[\vec{M}_o(\vec{F})\right]_x = yF_z - zF_y$$

$$\left[\vec{M}_o(\vec{F})\right]_y = zF_x - xF_z$$

$$\left[\vec{M}_o(\vec{F})\right]_z = xF_y - yF_z \quad (4-5)$$



2. 力对轴的矩



$$M_z(\vec{F}) = M_o(\vec{F}_{xy}) = \pm F_{xy} \cdot h \quad （4－6）$$

力与轴相交或与轴平行（力与轴在同一平面内），力对该轴的矩为零。

3、 力对点的矩与力对过该点的轴的矩的关系

已知：力$\vec{F}$，力$\vec{F}$在三根轴上的分力$\vec{F}_x$，$\vec{F}_y$，$\vec{F}_z$，力$\vec{F}$作用点的坐标 x, y, z

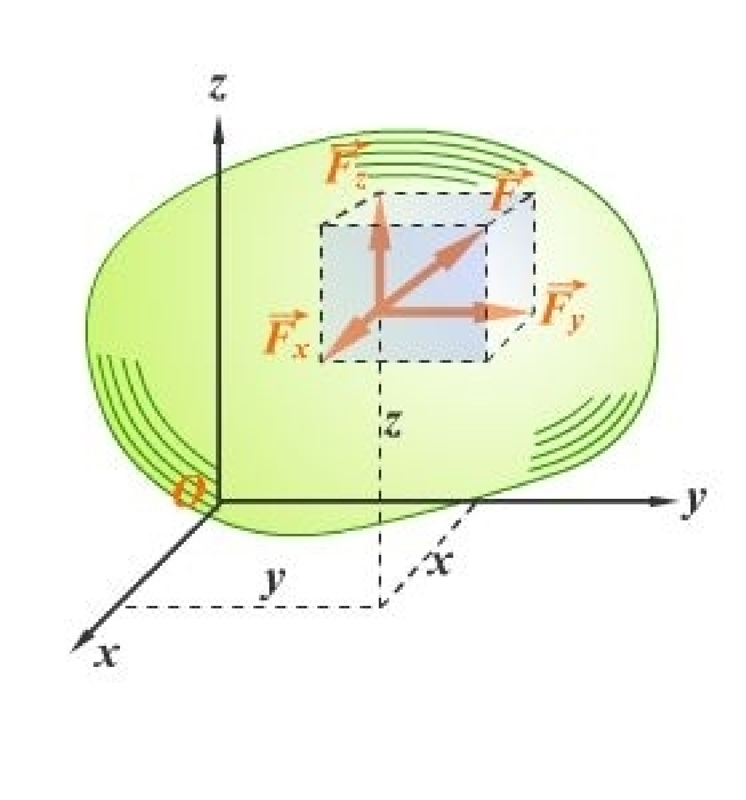
求：力$\vec{F}$对 x, y, z轴的矩

$$M_x(\vec{F}) = M_x(\vec{F}_x) + M_x(\vec{F}_y) + M_x(\vec{F}_z)$$

$$=0 \; -F_y \cdot z \quad +F_y \cdot x$$

$$= F_z \cdot y - F_y \cdot z \qquad (4\text{–}7)$$

$$M_y(\vec{F}) = M_y(\vec{F}_x) + M_y(\vec{F}_y) + M_y(\vec{F}_z)$$



$$= F_x \cdot z + 0 - F_z \cdot x$$

$$= F_x \cdot z - F_z x \qquad （4\text{-}8）$$

$$M_z(\vec{F}) = M_z(\vec{F}_x) + M_z(\vec{F}_y) + M_z(\vec{F}_z)$$

$$= - F_x \cdot y + F_y \cdot x + 0$$

$$= F_y \cdot x - F_x \cdot y \qquad （4\text{-}9）$$

比较（4-5）、（4-7）、（4-8）、（4-9）式可得

$$\left[\vec{M}_o(\vec{F})\right]_x = yF_z - zF_y = M_x(\vec{F})$$

$$\left[\vec{M}_o(\vec{F})\right]_y = zF_x - xF = M_y(\vec{F})$$

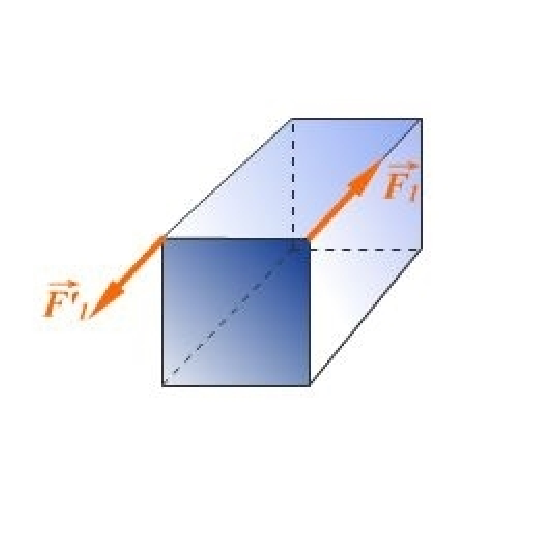
$$\left[\vec{M}_o(\vec{F})\right]_z = xF_y - yF_z = M_z(\vec{F})$$

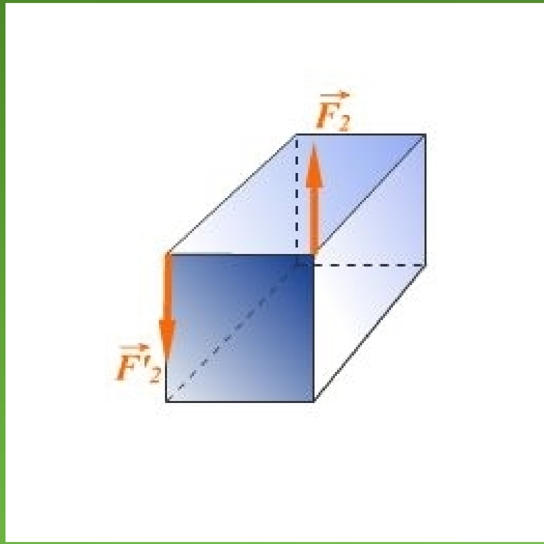
即，力对点的矩矢在过该点的某轴上的投影，等于力对该轴的矩。

§4－3　　空间力偶

1、力偶矩以矢量表示　　力偶矩矢

$$F_1 = F_2 = F_1' = F_2'$$



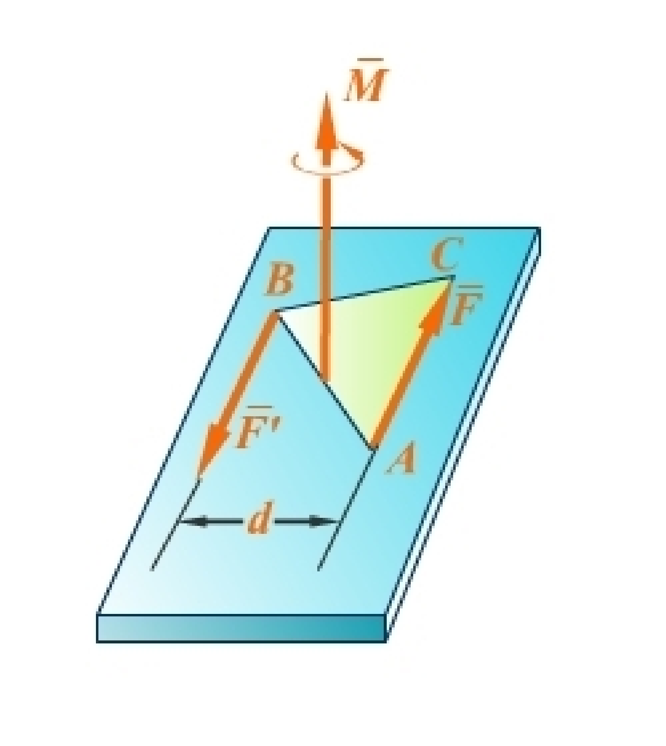


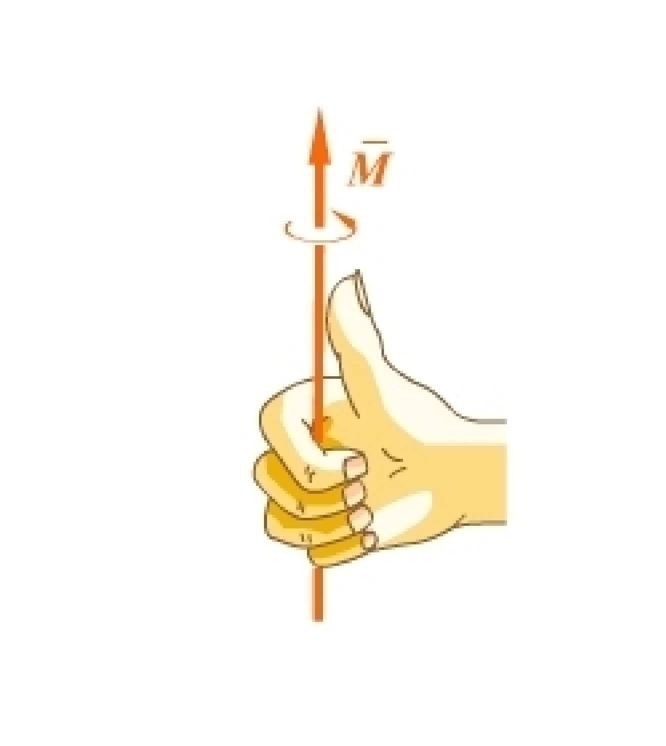
空间力偶的三要素

（1）　大小：力与力偶臂的乘积；

（2）　方向：转动方向；

（3）　作用面：力偶作用面





力偶矩矢 $\vec{M}=\vec{r}_{BA}\times\vec{F}$ （4－10）

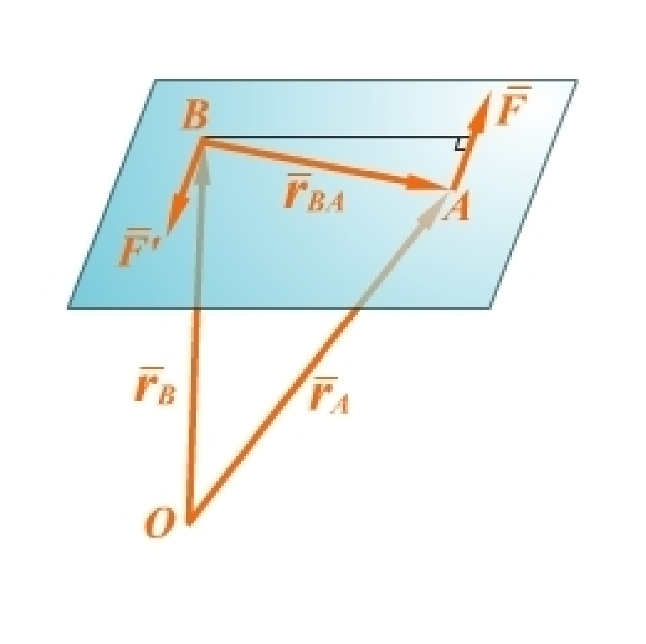
2、力偶的性质

（1）力偶中两力在任意坐标轴上投影的代数和为零 。

（2）力偶对任意点取矩都等于力偶矩，不因矩心的改变而改变。

力偶矩 $\vec{M}=\vec{r}_{BA}\times\vec{F}$

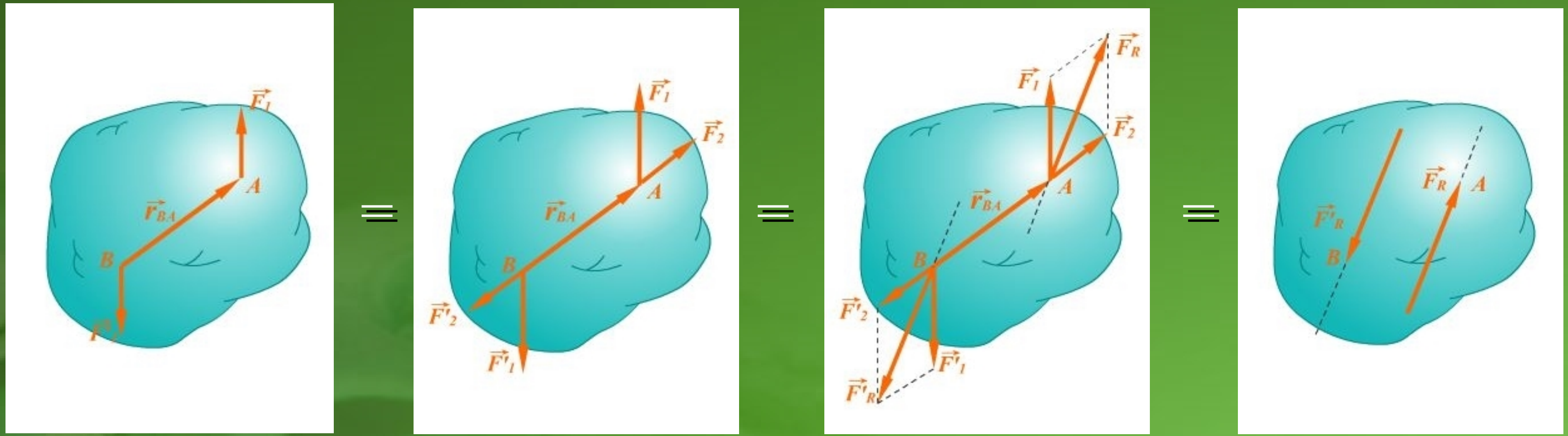
$$\vec{M}_o(\vec{F},\vec{F}')=\vec{M}_o(\vec{F}')+\vec{M}_o(\vec{F}')=\vec{r}_A\times\vec{F}+\vec{r}_B\times\vec{F}'$$



因 $\vec{F}'=-\vec{F}$

$$\vec{M}_o(\vec{F},\vec{F}')=(\vec{r}_A-\vec{r}_B)\times\vec{F}=\vec{M}$$

（3）只要保持力偶矩不变，力偶可在其作用面内任意移转，且可以同时改变力偶中力的大小与力偶臂的长短，对刚体的作用效果不变。

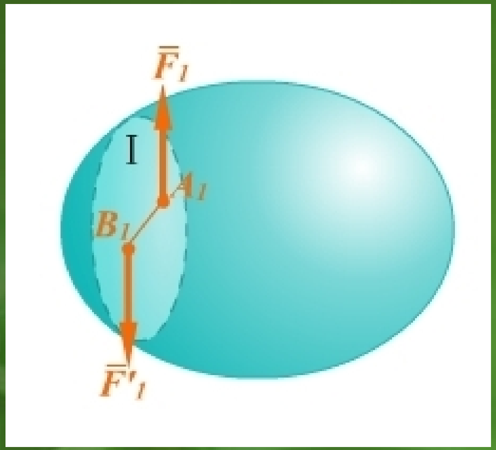


$$\vec{M}(\vec{F}_1,\vec{F}_1')=\vec{r}_{BA}\times\vec{F}_1$$

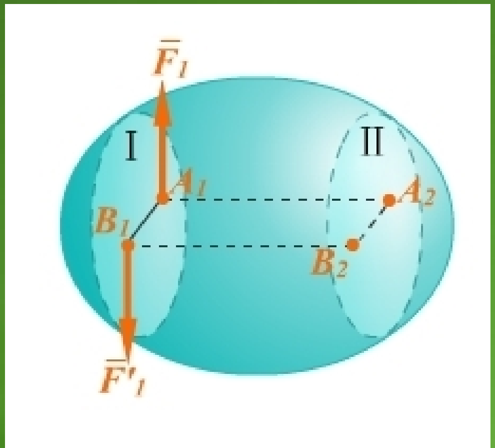
$$\vec{M}(\vec{F}_R,\vec{F}_R')=\vec{r}_{BA}\times\vec{F}_R=\vec{r}_{BA}\times(\vec{F}_1+\vec{F}_2)$$

$$=\vec{r}_{BA}\times\vec{F}_1+\vec{r}_{BA}\times\vec{F}_2=\vec{r}_{BA}\times\vec{F}_1=\vec{M}(\vec{F}_1,\vec{F}_1')$$

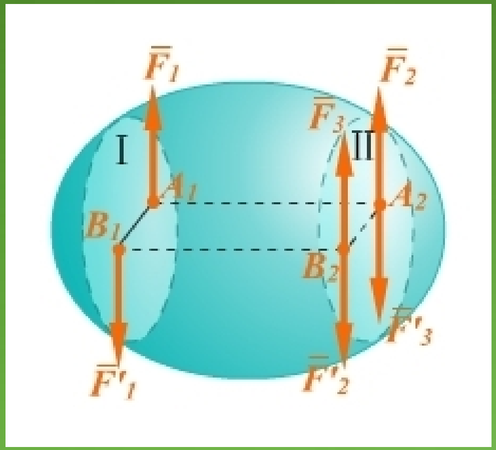
(4) 只要保持力偶矩不变，力偶可从其所在平面移至另一与此平面平行的任一平面，对刚体的作用效果不变。



=



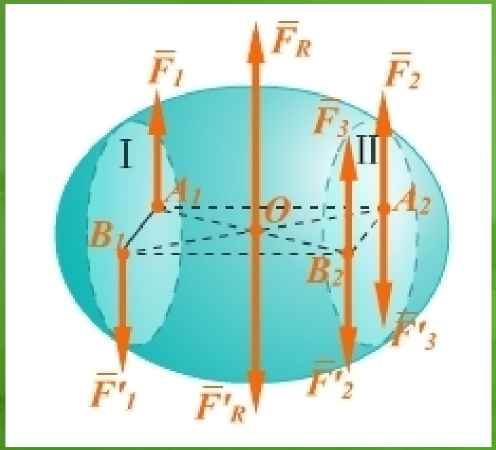
=



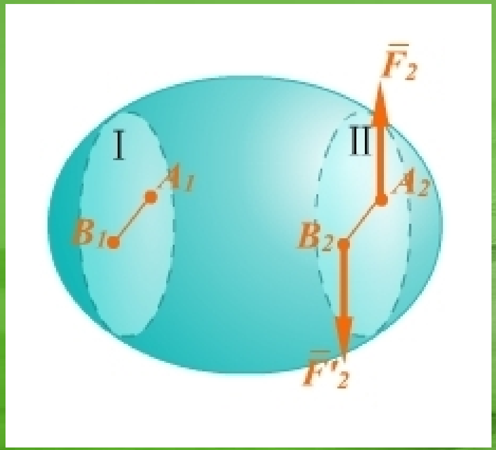
$$F_1 = F_1' = F_2$$

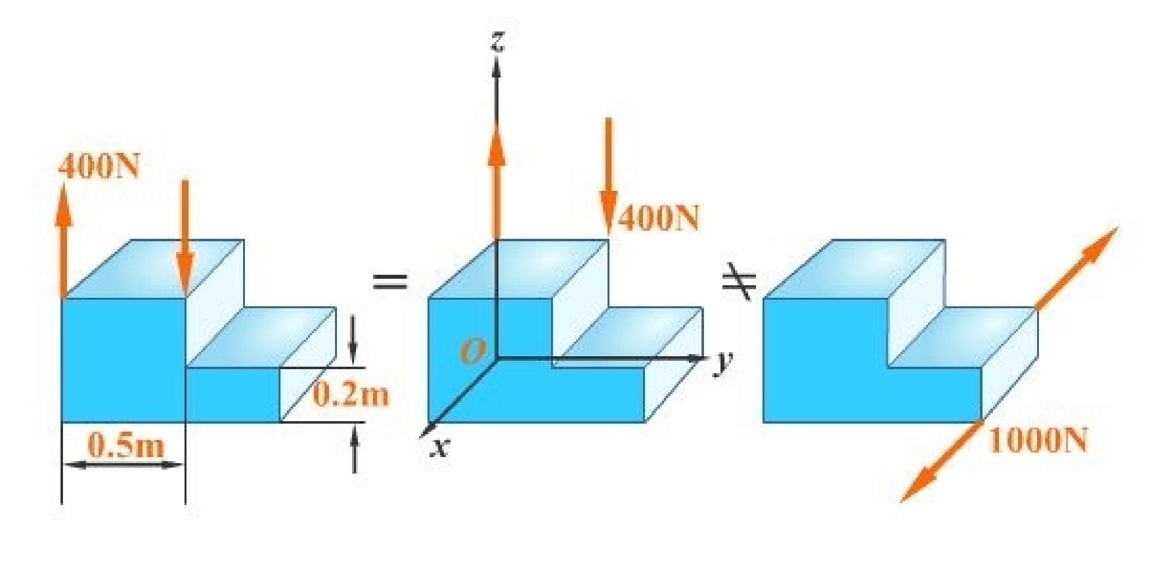
$$= F_2' = F_3 = F_3'$$

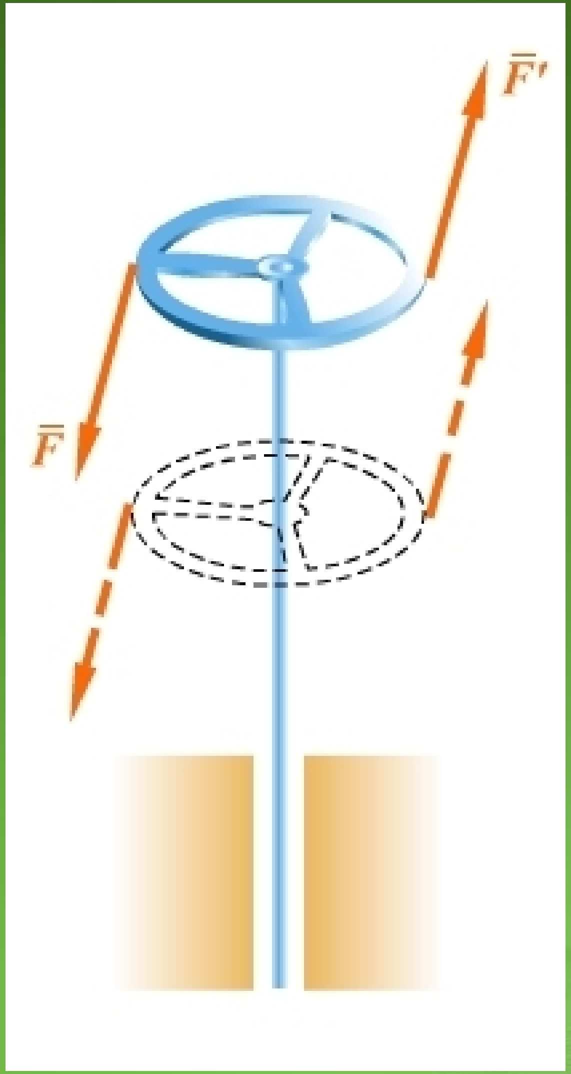
=



=







定位矢量

滑移矢量

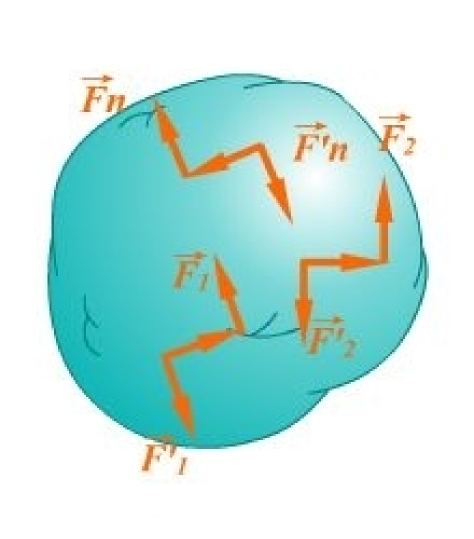
自由矢量（搬来搬去，滑来滑去）

力偶矩矢是自由矢量

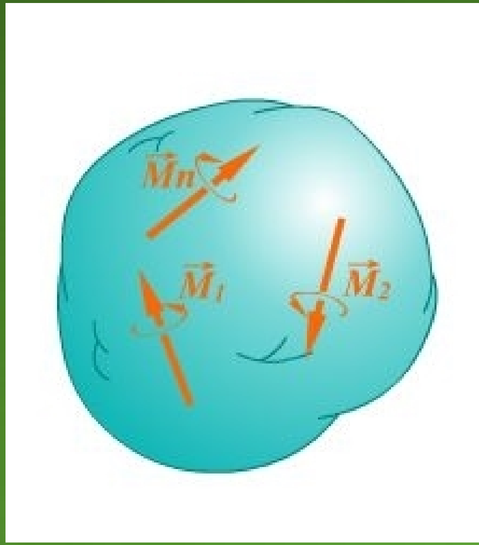
力偶矩相等的力偶等效

(5) 力偶没有合力，力偶平衡只能由力偶来平衡。

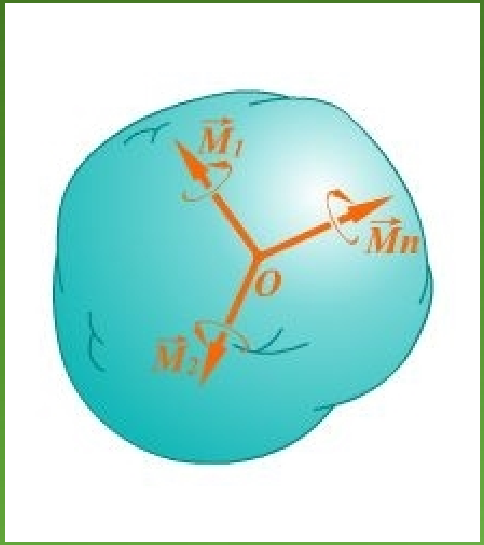
3．力偶系的合成与平衡条件



＝



＝

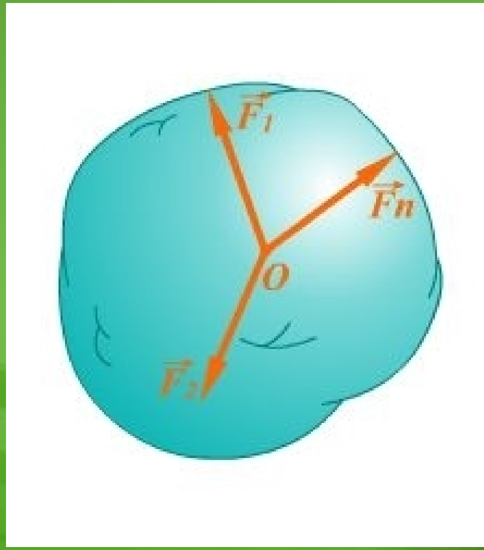


$$\vec{M}_1=\vec{r}_1\times\vec{F}_1,\vec{M}_2=\vec{r}_2\times\vec{F}_2,\ldots\ldots,\vec{M}_n=\vec{r}_n\times\vec{F}_n$$

如同右图 $\vec{F}_R=\sum\vec{F}_i$

有 $\vec{M}=\sum\vec{M}_i$

$\vec{M}$为合力偶矩矢，等于各分力偶矩矢的矢量和。



$$M_x=\sum M_{ix}, M_y=\sum M_{iy}, M_z=\sum M_{iz}$$

合力偶矩矢的大小和方向余弦

$$M_x=\sqrt{(\sum M_{ix})^2+(\sum M_{iy})^2+(\sum M_{iz})^2}$$

$$\cos\theta=\frac{\sum M_{ix}}{M} \quad \cos\beta=\frac{\sum M_{iy}}{M} \quad \cos\gamma=\frac{\sum M_{iz}}{M}$$

空间力偶系平衡的充分必要条件是 :合力偶矩矢等于零，即 $\vec{M}=0$

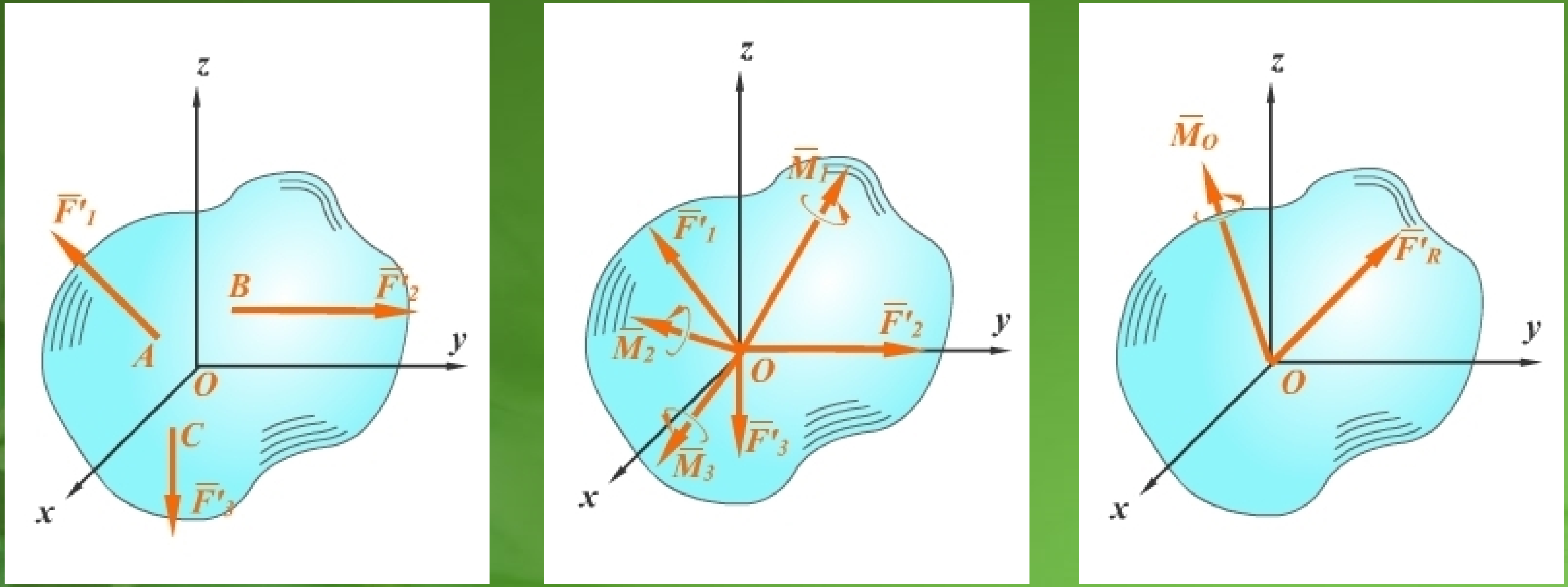
有 $\sum M_{ix}=0 \quad \sum M_{iy}=0 \quad \sum M_{iz}=0$

简写为 $\sum M_x=0 \quad \sum M_y=0 \quad \sum M_z=0 \qquad (4-11)$

称为空间力偶系的平衡方程。

§4－4 空间任意力系向一点的简化·主矢和主矩

1.　　空间任意力系向一点的简化



其中，各 $\vec{F}_i' = \vec{F}_i$ ，各 $\vec{M}_i = \vec{M}_o(\vec{F}_i)$

一空间汇交与空间力偶系等效代替一空间任意力系。

空间汇交力系的合力

$$\vec{F}'_R=\sum\vec{F}_i=\sum F_{ix}\vec{i}+\sum F_{iy}\vec{j}+\sum F_{ix}\vec{k}$$

称为力系的主矢

空间力偶系的合力偶矩

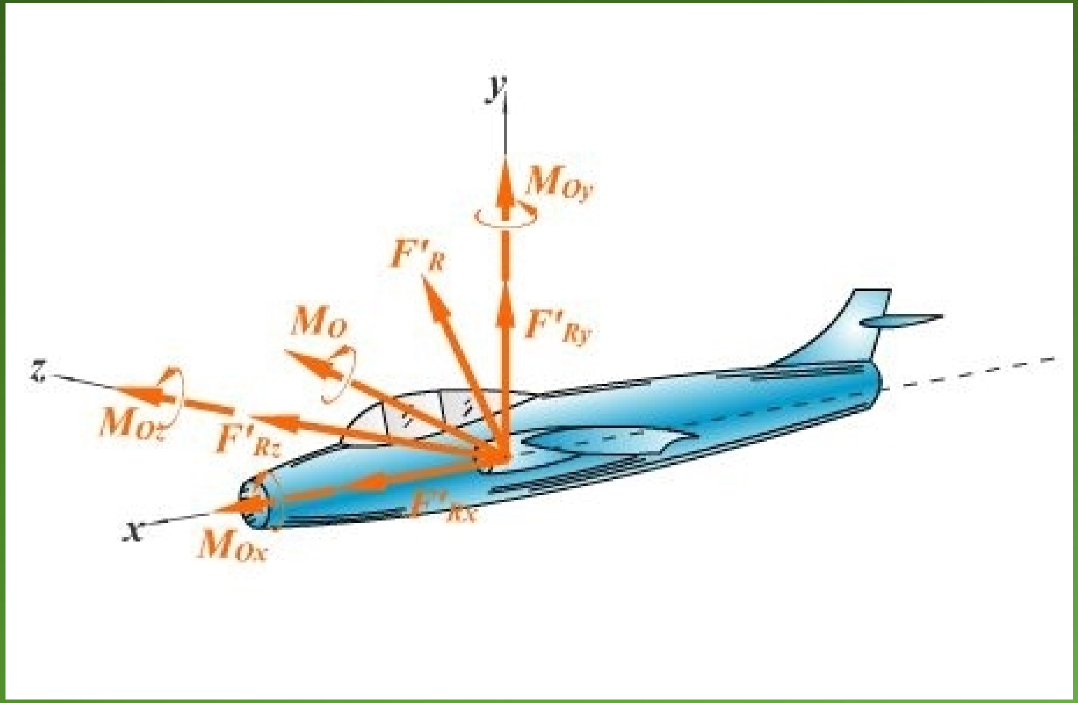
$$\vec{M}_o=\sum M_i=\sum M_o(\vec{F}_i)$$

称为空间力偶系的主矩

由力对点的矩与力对轴的矩的关系，有

$$\vec{M}_o=\sum M_x(\vec{F})\vec{i}+\sum M_y(\vec{F})\vec{j}+\sum M_z(\vec{F})\vec{k}$$

式中，各分别表示各 $M_x(\vec{F})$， $M_y(\vec{F})$， $M_z(\vec{F})$ 力对 z , x , y , 轴的矩。



F'_{Rx} —有效推进力　飞机向前飞行

F'_{Ry} —有效升力　飞机上升

F'_{Rz} —侧向力　飞机侧移

M_{Ox} —滚转力矩　飞机绕x轴滚转

M_{Oy} —偏航力矩　飞机转弯

M_{Oz} —俯仰力矩　飞机仰头

2.　空间任意力系的简化结果分析（最后结果）

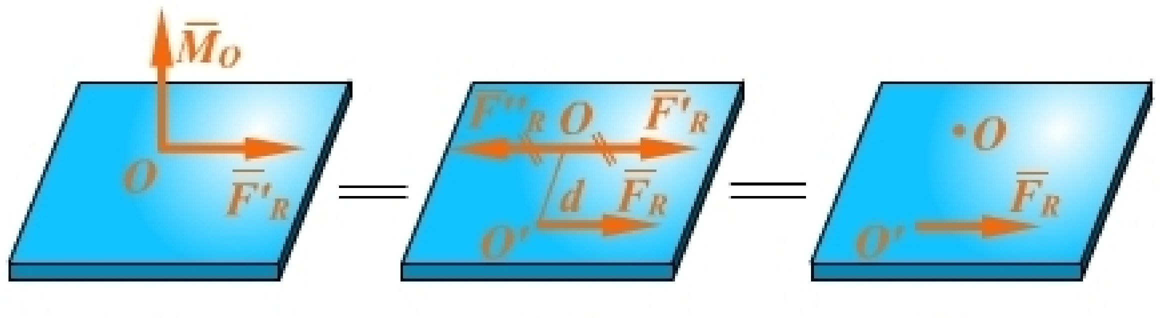
1）合力

当 $\vec{F}'_R \neq 0, \vec{M}_O = 0$ 最后结果为一个合力。

合力作用点过简化中心。

当 $\vec{F}'_R \neq 0, \vec{M}_O \neq 0, \vec{F}'_R \perp \vec{M}_O$ 时，$d = \dfrac{|\vec{M}_O|}{F'_R}$

最后结果为一合力。合力作用线距简化中心为 $d = \dfrac{|\vec{M}_O|}{F'_R}$



(a)　(b)　(c)

$$\vec{M}_O = \vec{d} \times \vec{F}_R = \vec{M}_O(\vec{F}_R) = \sum \vec{M}_O(\vec{F})$$

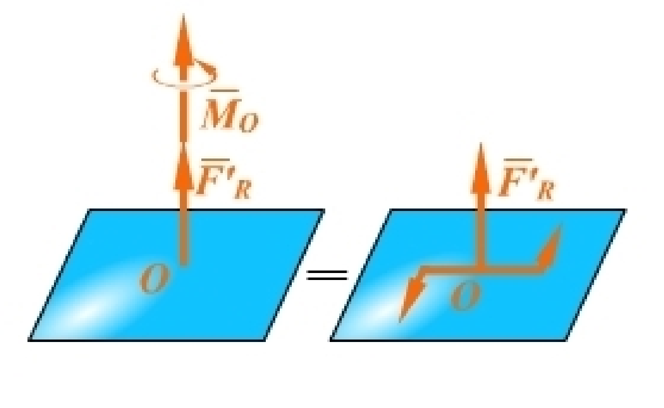
合力矩定理：合力对某点之矩等于各分力对同一点之矩的矢量和。

合力对某轴之矩等于各分力对同一轴之矩的代数和。

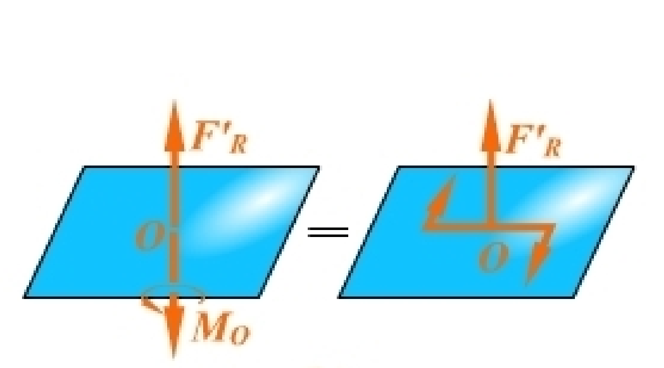
（2）合力偶

当 $\vec{F}'_R = 0, \vec{M}_O \neq 0$ 时，最后结果为一个合力偶。此时与简化中心无关。

（3）力螺旋　　当 $\vec{F}'_R \neq 0, \vec{M}_O \neq 0, \vec{F}'_R // \vec{M}_O$ 时



(a)



(b)

力螺旋中心轴过简化中心