

# 第三章 函数及其应用

第2课时 函数的奇偶性与  
周期性

内容概览

必备知识 · 逐点夯实



核心考点 · 分类突破



## 【课标解读】

## 【课程标准】

- 1.了解函数奇偶性的概念和几何意义.
- 2.会运用基本初等函数的图象分析函数的奇偶性.
- 3.了解函数周期性、最小正周期的含义,会判断、应用简单函数的周期性.

## 【核心素养】

数学抽象、逻辑推理、直观想象.

## 【命题说明】

<p>考向 考法</p>	<p>高考命题常以基本初等函数为载体,考查函数的奇偶性、周期性和图象的对称性及其应用.函数的奇偶性与单调性、周期性的综合问题是高考热点,常以选择题的形式出现.</p>
<p>预测</p>	<p>预计2025年高考仍会考查函数的单调性、单调区间及函数最值的确定与应用;题型既有选择题、填空题,又有解答题.</p>

# 必备知识 · 逐点夯实

[返回](#)

## 知识梳理·归纳

### 1. 函数的奇偶性

奇偶性	定义	图象
偶函数	设函数 $f(x)$ 的定义域为 $D$ ,如果 $\forall x \in D$ ,都有 $-x \in D$ , 且 <u><math>f(-x)=f(x)</math></u> ,那么函数 $f(x)$ 就叫做偶函数	关于 <u><math>y</math>轴</u> 对称
奇函数	设函数 $f(x)$ 的定义域为 $D$ ,如果 $\forall x \in D$ ,都有 $-x \in D$ , 且 <u><math>f(-x)=-f(x)</math></u> ,那么函数 $f(x)$ 就叫做奇函数	关于 <u>原点</u> 对称

**微点拨** 奇、偶函数定义域的特点是关于原点对称,函数的定义域关于原点对称是函数具有奇偶性的必要不充分条件.

## 2. 函数的周期性

(1) 周期函数: 设函数  $f(x)$  的定义域为  $D$ , 如果存在一个非零常数  $T$ , 使得对每一个  $x \in D$  都有  $x+T \in D$ , 且  $f(x+T) = \underline{f(x)}$ , 那么函数  $f(x)$  就叫做周期函数. 非零常数  $\underline{T}$  叫做这个函数的周期.

(2) 最小正周期: 如果在周期函数  $f(x)$  的所有周期中存在一个 最小 的正数, 那么这个最小的正数就叫做  $f(x)$  的最小正周期 (若不特别说明,  $T$  一般就是指最小正周期).

**微点拨** 存在一个非零常数  $T$ , 使  $f(x+T) = f(x)$  为恒等式, 即自变量  $x$  每增加一个  $T$  后, 函数值就会重复出现一次.

## 常用结论

### 1. 函数周期性的常用结论

对 $f(x)$ 定义域内任一自变量的值 $x$ :

(1) 若 $f(x+a)=-f(x)$ , 则 $T=2a(a>0)$ .

(2) 若 $f(x+a)=\frac{1}{f(x)}$ , 则 $T=2a(a>0)$ .

(3) 若 $f(x+a)=-\frac{1}{f(x)}$ , 则 $T=2a(a>0)$ .

## 2.对称性的四个常用结论

(1)若函数 $y=f(x+a)$ 是偶函数,则函数 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=a$ 对称.

(2)若函数 $y=f(x+b)$ 是奇函数,则函数 $y=f(x)$ 的图象关于点 $(b,0)$ 中心对称.

(3)若函数 $y=f(x)$ 满足 $f(a+x)=f(b-x)$ ,则 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{a+b}{2}$ 对称;特别地,当 $a=b$ 时,即 $f(a+x)=f(a-x)$ 或 $f(x)=f(2a-x)$ 时,则 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=a$ 对称.

(4)若函数 $y=f(x)$ 满足 $f(x)+f(2a-x)=2b$ ,则 $y=f(x)$ 的图象关于点 $(a,b)$ 对称.特别地,当 $b=0$ 时,即 $f(a+x)+f(a-x)=0$ 或 $f(x)+f(2a-x)=0$ 时,则 $y=f(x)$ 的图象关于点 $(a,0)$ 对称.

基础诊断·自测

类型	辨析	改编	易错	高考
题号	1	4	3	2

1.(思考辨析)(正确的打“√”,错误的打“×”)

(1)函数 $y=x^2$ 在 $x \in (0, +\infty)$ 上是偶函数.( × )

(2)若函数 $f(x)$ 为奇函数,则一定有 $f(0)=0$ .( × )

(3)若 $T$ 是函数 $f(x)$ 的一个周期,则 $nT(n \in \mathbf{Z}, n \neq 0)$ 也是函数 $f(x)$ 的周期.( √ )

(4)若函数 $f(x)$ 满足关系 $f(a+x)=-f(b-x)$ ,则函数 $f(x)$ 的图象关于点 $(\frac{a+b}{2}, 0)$ 对称.

( √ )

提示:

(1)	由于偶函数的定义域关于原点对称,故 $y=x^2$ 在 $(0,+\infty)$ 上不具有奇偶性.	×
(2)	由奇函数定义可知,若 $f(x)$ 为奇函数,且在 $x=0$ 处有意义时才满足 $f(0)=0$ ,故错误.	×

2.(2023·上海高考)下列函数是偶函数的是( )

A.  $y=\sin x$

B.  $y=\cos x$

C.  $y=x^3$

D.  $y=2^x$

**【解析】**选B.对于A,由正弦函数的性质可知, $y=\sin x$ 为奇函数;对于B,由余弦函数的性质可知, $y=\cos x$ 为偶函数;对于C,由幂函数的性质可知, $y=x^3$ 为奇函数;对于D,由指数函数的性质可知, $y=2^x$ 为非奇非偶函数.

3. (忽略奇偶函数定义域关于原点对称) 已知  $f(x) = ax^2 + bx$  是定义在  $[a-1, 2a]$  上的偶函数, 那么  $a+b$  的值是( )

- A.  $-\frac{1}{3}$       B.  $\frac{1}{3}$       C.  $\frac{1}{2}$       D.  $-\frac{1}{2}$

**【解析】** 选B. 因为  $f(x) = ax^2 + bx$  是定义在  $[a-1, 2a]$  上的偶函数,

所以  $a-1+2a=0$ , 所以  $a=\frac{1}{3}$ . 又  $f(-x)=f(x)$ , 所以  $b=0$ , 所以  $a+b=\frac{1}{3}$ .

4. (必修第一册P86习题T11·变设问) 已知函数  $f(x)$  是定义域为  $\mathbf{R}$  的奇函数, 当  $x \geq 0$  时,  $f(x) = x(1+x)$ , 则  $f(-1) = \underline{\quad -2 \quad}$ .

**【解析】**  $f(1) = 1 \times 2 = 2$ , 又  $f(x)$  为奇函数, 所以  $f(-1) = -f(1) = -2$ .

# 核心考点 · 分类突破

[返回](#)

## 考点一函数奇偶性的判断

**[例1]**判断下列函数的奇偶性.

$$(1) f(x) = x^3 - \frac{1}{x};$$

**【解析】** (1)函数的定义域为  $\{x|x \neq 0\}$ , 关于原点对称, 并且对于定义域内的任意一个  $x$  都有

$$f(-x) = (-x)^3 - \frac{1}{-x} = -(x^3 - \frac{1}{x}) = -f(x), \text{ 所以 } f(x) \text{ 为奇函数.}$$

$$(2) f(x) = \sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{1 - x^2};$$

**【解析】** (2) $f(x)$ 的定义域为  $\{-1, 1\}$ , 关于原点对称.

又  $f(-1) = f(1) = 0, f(-1) = -f(1) = 0$ , 所以  $f(x)$  既是奇函数又是偶函数.

$$(3) f(x) = x^2 - |x| + 1, x \in [-1, 4];$$

**【解析】** (3)因为  $f(x) = x^2 - |x| + 1, x \in [-1, 4]$  的定义域不关于原点对称, 所以  $f(x)$  是非奇非偶函数.

$$(4)f(x)=\begin{cases} -x^2+2x+1, & x>0, \\ x^2+2x-1, & x<0 \end{cases},$$

**【解析】** (4)方法一(定义法):

当 $x>0$ 时, $f(x)=-x^2+2x+1$ , $-x<0$ , $f(-x)=(-x)^2+2(-x)-1=x^2-2x-1=-f(x)$ ;

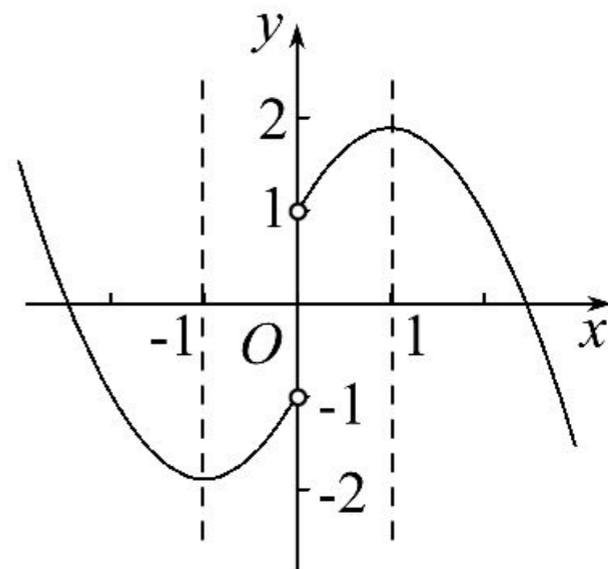
当 $x<0$ 时, $f(x)=x^2+2x-1$ , $-x>0$ , $f(-x)=-(-x)^2+2(-x)+1=-x^2-2x+1=-f(x)$ .

所以 $f(x)$ 为奇函数.

方法二(图象法):

作出函数 $f(x)$ 的图象,

由奇函数的图象关于原点对称的特征知函数 $f(x)$ 为奇函数.



$$(5) f(x) = (x-1) \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}, x \in (-1, 1).$$

**【解析】** (5) 已知  $f(x)$  的定义域为  $(-1, 1)$ , 关于原点对称.

$$\text{因为 } f(x) = (x-1) \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = -\sqrt{(1-x)(1+x)},$$

所以  $f(-x) = -\sqrt{(1+x)(1-x)} = f(x)$ , 所以  $f(x)$  是偶函数.

## 解题技法

### 1. 判断函数的奇偶性的方法

(1) 定义法: 若函数的定义域不是关于原点对称的区间, 则可立即判断该函数既不是奇函数也不是偶函数; 若函数的定义域是关于原点对称的区间, 再判断  $f(-x)$  是否等于  $\pm f(x)$ .

(2) 图象法: 奇(或偶)函数的充要条件是它的图象关于原点(或 $y$ 轴)对称.

(3) 性质法: 偶函数的和、差、积、商(分母不为零)仍为偶函数; 奇函数的和、差仍为奇函数; 奇(偶)数个奇函数的积、商(分母不为零)为奇(偶)函数; 一个奇函数与一个偶函数的积为奇函数. (注: 利用上述结论时要注意各函数的定义域)

## 2. 一些重要类型的奇偶函数模型

(1) 函数  $f(x) = a^x + a^{-x}$  ( $a > 0$  且  $a \neq 1$ ) 是偶函数.

(2) 函数  $f(x) = a^x - a^{-x}$  ( $a > 0$  且  $a \neq 1$ ) 是奇函数.

(3) 函数  $f(x) = \frac{a^x + 1}{a^x - 1}$  ( $a > 0$  且  $a \neq 1$ ) 是奇函数.

(4) 函数  $f(x) = \log_a \frac{x-b}{x+b}$  ( $a > 0$  且  $a \neq 1$ ) 是奇函数.

## 对点训练

1.(多选题)下列命题中正确的是( )

A. 奇函数的图象一定过坐标原点

B. 函数 $y=x\sin x$ 是偶函数

C. 函数 $y=|x+1|-|x-1|$ 是奇函数

D. 函数 $y=\frac{x^2-x}{x-1}$ 是奇函数

**【解析】** 选BC. 对于A, 只有奇函数在 $x=0$ 处有意义时, 函数的图象过原点, 所以A不正确;

对于B, 因为函数 $y=x\sin x$ 的定义域为 $\mathbf{R}$ 且 $f(-x)=(-x)\sin(-x)=f(x)$ , 所以该函数为偶函数, 所以B正确;

对于C, 函数 $y=|x+1|-|x-1|$ 的定义域为 $\mathbf{R}$ , 关于原点对称, 且满足 $f(-x)=-x+1-|-x-1|=-(|x+1|-|x-1|)=-f(x)$ , 即 $f(-x)=-f(x)$ , 所以函数为奇函数, 所以C正确;

对于D, 函数 $y=\frac{x^2-x}{x-1}$ 满足 $x-1\neq 0$ , 即 $x\neq 1$ , 所以函数的定义域不关于原点对称, 所以该函数为非奇非偶函数, 所以D不正确.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：  
<https://d.book118.com/607025035020006121>