

2024 届云南省呈贡一中高三第一次调研考试（一模）数学试题

注意事项

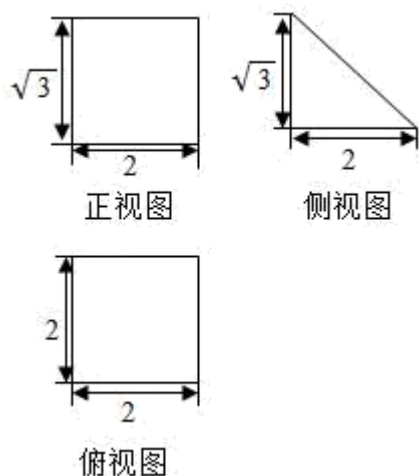
1. 考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回。
2. 答题前，请务必将自己的姓名、准考证号用 0.5 毫米黑色墨水的签字笔填写在试卷及答题卡的规定位置。
3. 请认真核对监考员在答题卡上所粘贴的条形码上的姓名、准考证号与本人是否相符。
4. 作答选择题，必须用 2B 铅笔将答题卡上对应选项的方框涂满、涂黑；如需改动，请用橡皮擦干净后，再选涂其他答案。作答非选择题，必须用 0.5 毫米黑色墨水的签字笔在答题卡上的指定位置作答，在其他位置作答一律无效。
5. 如需作图，须用 2B 铅笔绘、写清楚，线条、符号等须加黑、加粗。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 在正项等比数列 $\{a_n\}$ 中， $a_5 - a_1 = 15$ ， $a_4 - a_2 = 6$ ，则 $a_3 =$ ()

A. 2 B. 4 C. $\frac{1}{2}$ D. 8

2. 如图是一个几何体的三视图，则该几何体的体积为()



A. $2\sqrt{3}$ B. $4\sqrt{3}$ C. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ D. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

3. 若函数 $y = 2\sin(2x + \varphi)$ 的图象过点 $(\frac{\pi}{6}, 1)$ ，则它的一条对称轴方程可能是 ()

A. $x = \frac{\pi}{6}$ B. $x = \frac{\pi}{3}$ C. $x = \frac{\pi}{12}$ D. $x = \frac{5\pi}{12}$

4. 设 $a \in \mathbb{R}$ ， $b > 0$ ，则“ $3^a > 2b$ ”是“ $a > \log_3 b$ ”的

A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

5. 已知函数 $f(x) = \sin\left(x + \frac{5\pi}{12}\right)$ ，要得到函数 $g(x) = \cos x$ 的图象，只需将 $y = f(x)$ 的图象()

A. 向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度 B. 向右平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度

- C. 向左平移 $\frac{5\pi}{12}$ 个单位长度
- D. 向右平移 $\frac{5\pi}{12}$ 个单位长度

6. 已知随机变量 X 的分布列如下表：

X	-1	0	1
P	a	b	c

其中 $a, b, c > 0$.若 X 的方差 $D(X) \leq \frac{1}{3}$ 对所有 $a \in (0,1-b)$ 都成立，则（ ）

- A. $b \leq \frac{1}{3}$
- B. $b \leq \frac{2}{3}$
- C. $b \geq \frac{1}{3}$
- D. $b \geq \frac{2}{3}$

7. 已知 $\triangle ABC$ 中内角 A, B, C 所对应的边依次为 a, b, c ，若 $2a=b+1, c=\sqrt{7}, C=\frac{\pi}{3}$ ，则 $\triangle ABC$ 的面积为（ ）

- A. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$
- B. $\sqrt{3}$
- C. $3\sqrt{3}$
- D. $2\sqrt{3}$

8. 已知函数 $g(x)=f(2x)+x^2$ 为奇函数，且 $f(2)=3$ ，则 $f(-2)=$ （ ）

- A. 2
- B. 5
- C. 1
- D. 3

9. 设全集 $U=\mathbf{R}$ ，集合 $A=\{x|x<2\}$ ， $B=\{x|x^2-3x<0\}$ ，则 $(\complement_U A) \cap B=$ （ ）

- A. $(0,3)$
- B. $[2,3)$
- C. $(0,2)$
- D. $(0,+\infty)$

10. 在 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c ，已知 $C=\frac{2\pi}{3}$ ， $c=1$ ．当 a, b 变化时，若 $z=b+\lambda a$ 存在最大值，则正数 λ 的取值范围为

- A. $(0,1)$
- B. $(0,2)$
- C. $(\frac{1}{2},2)$
- D. $(1,3)$

11. 为实现国民经济新“三步走”的发展战略目标，国家加大了扶贫攻坚的力度．某地区在 2015 年以前的年均脱贫率（脱离贫困的户数占当年贫困户总数的比）为 70%．2015 年开始，全面实施“精准扶贫”政策后，扶贫效果明显提高，其中 2019 年度实施的扶贫项目，各项目参加户数占比（参加该项目户数占 2019 年贫困户总数的比）及该项目的脱贫率见下表：

实施项目	种植业	养殖业	工厂就业	服务业
参加用户比	40%	40%	10%	10%
脱贫率	95%	95%	90%	90%

那么 2019 年的年脱贫率是实施“精准扶贫”政策前的年均脱贫率的（ ）

- A. $\frac{27}{28}$ 倍 B. $\frac{47}{35}$ 倍 C. $\frac{48}{35}$ 倍 D. $\frac{7}{5}$ 倍

12. 一场考试需要 2 小时, 在这场考试中钟表的时针转过的弧度数为 ()

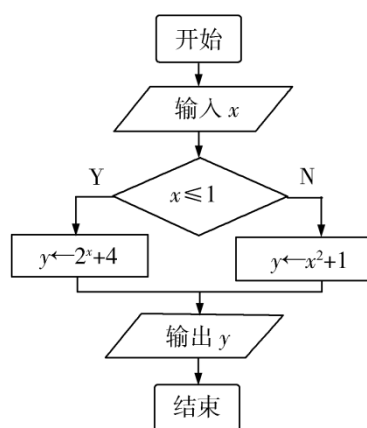
- A. $\frac{\pi}{3}$ B. $-\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{2\pi}{3}$ D. $-\frac{2\pi}{3}$

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 已知函数 $y = f(x)$ 为 R 上的奇函数, 满足 $f'(x) > -2$. 则不等式 $f(x-1) < x^2(3-2\ln x) + 3(1-2x)$ 的解集为 _____.

14. 已知等边三角形 ABC 的边长为 1. $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{MB}$, 点 N 、 T 分别为线段 BC 、 CA 上的动点, 则 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{NT} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{TM} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{MN}$ 取值的集合为 _____.

15. (5 分) 如图是一个算法的流程图, 若输出 y 的值是 5, 则输入 x 的值为 _____.



16. 已知 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x - y - 1 \geq 0 \\ x + y - 3 \leq 0 \\ 2x + 1 \geq 0 \end{cases}$, 则 $z = 2x - y$ 的最小值为 _____.

三、解答题: 共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 已知函数 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - ax + (a-1)\ln x$, $g(x) = b - x\ln x$ 的最大值为 $\frac{1}{e}$.

(1) 求实数 b 的值;

(2) 当 $a > 1$ 时, 讨论函数 $f(x)$ 的单调性;

(3) 当 $a = 0$ 时, 令 $F(x) = 2f(x) + g(x) + 2\ln x + 2$, 是否存在区间 $[m, n] \subseteq (1, +\infty)$, 使得函数 $F(x)$ 在区间 $[m, n]$ 上的值域为 $[k(m+2), k(n+2)]$? 若存在, 求实数 k 的取值范围; 若不存在, 请说明理由.

18. (12 分) 设椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的右焦点为 F , 右顶点为 A , 已知椭圆离心率为 $\frac{1}{2}$, 过点 F 且与 x 轴垂直的直线被椭圆截得的线段长为 3.

(I) 求椭圆 C 的方程;

(II) 设过点 A 的直线 l 与椭圆 C 交于点 B (B 不在 x 轴上), 垂直于 l 的直线与 l 交于点 M , 与 y 轴交于点 H , 若 $BF \perp HF$, 且 $\angle MOA \leq \angle MAO$, 求直线 l 斜率的取值范围.

19. (12 分) 2019 年是五四运动 100 周年.五四运动以来的 100 年, 是中国青年一代又一代接续奋斗、凯歌前行的 100 年, 是中口青年用青春之我创造青春之中国、青春之民族的 100 年.为继承和发扬五四精神在青年节到来之际, 学校组织“五四运动 100 周年”知识竞赛, 竞赛的一个环节由 10 道题目组成, 其中 6 道 A 类题、4 道 B 类题, 参赛者需从 10 道题目中随机抽取 3 道作答, 现有甲同学参加该环节的比赛.

(1) 求甲同学至少抽到 2 道 B 类题的概率;

(2) 若甲同学答对每道 A 类题的概率都是 $\frac{2}{3}$, 答对每道 B 类题的概率都是 $\frac{3}{5}$, 且各题答对与否相互独立.现已知甲同学恰好抽中 2 道 A 类题和 1 道 B 类题, 用 X 表示甲同学答对题目的个数, 求随机变量 X 的分布列和数学期望.

20. (12 分) 已知 $f(x) = a \sin(1-x) + \ln x$, 其中 $a \in R$.

(1) 当 $a = 0$ 时, 设函数 $g(x) = f(x) - x^2$, 求函数 $g(x)$ 的极值.

(2) 若函数 $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 上递增, 求 a 的取值范围;

(3) 证明: $\sum_{k=1}^n \sin \frac{1}{(2+k)^2} < \ln 3 - \ln 2$.

21. (12 分) 在直角坐标系 xOy 中, 直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}t \\ y = 2 - \frac{\sqrt{2}}{2}t \end{cases}$ (t 为参数), 以坐标原点 O 为极点, 以 x 轴正

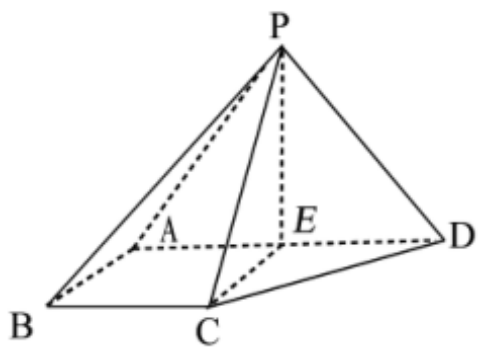
半轴为极轴, 建立极坐标系, 曲线 C 的极坐标方程为 $\rho = 4 \cos \theta$.

(1) 写出直线 l 的普通方程和曲线 C 的直角坐标方程;

(2) 设直线 l 与曲线 C 相交于 A, B 两点, $\triangle PAB$ 的顶点 P 也在曲线 C 上运动, 求 $\triangle PAB$ 面积的最大值.

22. (10 分) 如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为直角梯形,

$AB \perp AD$, $\angle ADC = 45^\circ$, $AD \parallel BC$, $AD = 2AB = 2$, $\triangle ADP$ 为等边三角形, 平面 $PAD \perp$ 底面 $ABCD$, E 为 AD 的中点.



(1) 求证：平面 $PBC \perp$ 平面 PCE ；

(2) 点 F 在线段 CD 上，且 $\frac{CF}{FD} = \frac{3}{2}$ ，求平面 PAD 与平面 PBF 所成的锐二面角的余弦值。

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、B

【解析】

根据题意得到 $a_5 - a_1 = a_1 q^4 - a_1 = 15$ ， $a_4 - a_2 = a_1 q^3 - a_1 q = 6$ ，解得答案。

【详解】

$$a_5 - a_1 = a_1 q^4 - a_1 = 15, \quad a_4 - a_2 = a_1 q^3 - a_1 q = 6, \quad \text{解得} \begin{cases} a_1 = 1 \\ q = 2 \end{cases} \text{或} \begin{cases} a_1 = -16 \\ q = \frac{1}{2} \end{cases} \text{ (舍去)}.$$

$$\text{故 } a_3 = a_1 q^2 = 4.$$

故选：B.

【点睛】

本题考查了等比数列的计算，意在考查学生的计算能力。

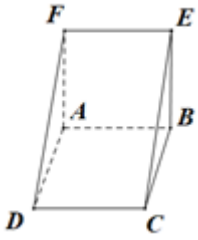
2、A

【解析】

根据三视图可得几何体为直三棱柱，根据三视图中的数据直接利用公式可求体积。

【详解】

由三视图可知几何体为直三棱柱，直观图如图所示：



其中，底面为直角三角形， $AD = 2$ ， $AE = \sqrt{3}$ ，高为 $AB = 2$ 。

∴该几何体的体积为 $V = \frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{3} \times 2 = 2\sqrt{3}$

故选：A.

【点睛】

本题考查三视图及棱柱的体积，属于基础题.

3、B

【解析】

把已知点坐标代入求出 φ ，然后验证各选项.

【详解】

由题意 $2\sin(\frac{\pi}{3} + \varphi) = 1$ ， $\sin(\frac{\pi}{3} + \varphi) = \frac{1}{2}$ ， $\varphi = 2k\pi - \frac{\pi}{6}$ 或 $\varphi = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ ， $k \in \mathbb{Z}$ ，

不妨取 $\varphi = -\frac{\pi}{6}$ 或 $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ，

若 $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ，则函数为 $y = \sin(2x + \frac{\pi}{2}) = \cos 2x$ ，四个选项都不合题意，

若 $\varphi = -\frac{\pi}{6}$ ，则函数为 $y = 2\sin(2x - \frac{\pi}{6})$ ，只有 $x = \frac{\pi}{3}$ 时， $\sin(2 \times \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}) = 1$ ，即 $x = \frac{\pi}{3}$ 是对称轴.

故选：B.

【点睛】

本题考查正弦型复合函数的对称轴，掌握正弦函数的性质是解题关键.

4、A

【解析】

根据对数的运算分别从充分性和必要性去证明即可.

【详解】

若 $3^a > 2b$ ， $b > 0$ ，则 $a > \log_3 2b$ ，可得 $a > \log_3 b$ ；

若 $a > \log_3 b$ ，可得 $3^a > b$ ，无法得到 $3^a > 2b$ ，

所以“ $3^a > 2b$ ”是“ $a > \log_3 b$ ”的充分而不必要条件.

所以本题答案为 A.

【点睛】

本题考查充要条件的定义, 判断充要条件的方法是:

- ① 若 $p \Rightarrow q$ 为真命题且 $q \Rightarrow p$ 为假命题, 则命题 p 是命题 q 的充分不必要条件;
- ② 若 $p \Rightarrow q$ 为假命题且 $q \Rightarrow p$ 为真命题, 则命题 p 是命题 q 的必要不充分条件;
- ③ 若 $p \Rightarrow q$ 为真命题且 $q \Rightarrow p$ 为真命题, 则命题 p 是命题 q 的充要条件;
- ④ 若 $p \Rightarrow q$ 为假命题且 $q \Rightarrow p$ 为假命题, 则命题 p 是命题 q 的即不充分也不必要条件.
- ⑤ 判断命题 p 与命题 q 所表示的范围, 再根据“谁大谁必要, 谁小谁充分”的原则, 判断命题 p 与命题 q 的关系.

5、A

【解析】

根据函数图像平移原则, 即可容易求得结果.

【详解】

因为 $f\left(x + \frac{\pi}{12}\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$,

故要得到 $g(x)$, 只需将 $f(x)$ 向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度.

故选: A.

【点睛】

本题考查函数图像平移前后解析式的变化, 属基础题.

6、D

【解析】

根据 X 的分布列列式求出期望, 方差, 再利用 $a + b + c = 1$ 将方差变形为 $D(X) = -4\left(a - \frac{1-b}{2}\right)^2 + 1 - b$, 从而可以利用二次函数的性质求出其最大值为 $1 - b \leq \frac{1}{3}$, 进而得出结论.

【详解】

由 X 的分布列可得 X 的期望为 $E(X) = -a + c$,

又 $a + b + c = 1$,

所以 X 的方差 $D(X) = (-1 + a - c)^2 a + (a - c)^2 b + (1 + a - c)^2 c$

$$= (a-c)^2(a+b+c) - 2(a-c)^2 + a + c$$

$$= -(a-c)^2 + a + c$$

$$= -(2a-1+b)^2 + 1 - b$$

$$= -4\left(a - \frac{1-b}{2}\right)^2 + 1 - b,$$

因为 $a \in (0, 1-b)$, 所以当且仅当 $a = \frac{1-b}{2}$ 时, $D(X)$ 取最大值 $1-b$,

又 $D(X) \leq \frac{1}{3}$ 对所有 $a \in (0, 1-b)$ 成立,

所以 $1-b \leq \frac{1}{3}$, 解得 $b \geq \frac{2}{3}$,

故选: D.

【点睛】

本题综合考查了随机变量的期望、方差的求法, 结合了概率、二次函数等相关知识, 需要学生具备一定的计算能力, 属于中档题.

7、A

【解析】

由余弦定理可得 $a^2 + b^2 - ab = 7$, 结合 $2a = b + 1$ 可得 a, b , 再利用面积公式计算即可.

【详解】

由余弦定理, 得 $7 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C = a^2 + b^2 - ab$, 由 $\begin{cases} 7 = a^2 + b^2 - ab \\ 2a = b + 1 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \end{cases}$,

所以, $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{1}{2} \times 2 \times 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

故选: A.

【点睛】

本题考查利用余弦定理解三角形, 考查学生的基本计算能力, 是一道容易题.

8、B

【解析】

由函数 $g(x) = f(2x) + x^2$ 为奇函数, 则有 $g(-1) + g(1) = 0 \Rightarrow f(-2) + 1 + f(2) + 1 = 0$, 代入已知即可求得.

【详解】

$$g(-1)+g(1)=0 \Rightarrow f(-2)+1+f(2)+1=0 \Rightarrow f(-2)=-5.$$

故选: B.

【点睛】

本题考查奇偶性在抽象函数中的应用,考查学生分析问题的能力,难度较易.

9、B

【解析】

可解出集合 B , 然后进行补集、交集的运算即可.

【详解】

$$Q B = \{x | x^2 - 3x < 0\} = (0, 3), A = \{x | x < 2\}, \text{ 则 } \complement_U A = [2, +\infty), \text{ 因此, } (\complement_U A) \cap B = [2, 3).$$

故选: B.

【点睛】

本题考查补集和交集的运算, 涉及一元二次不等式的求解, 考查运算求解能力, 属于基础题.

10、C

【解析】

因为 $C = \frac{2\pi}{3}$, $c = 1$, 所以根据正弦定理可得 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{2}{\sqrt{3}}$, 所以 $a = \frac{2}{\sqrt{3}} \sin A$, $b = \frac{2}{\sqrt{3}} \sin B$, 所以

$$z = b + \lambda a = \frac{2}{\sqrt{3}} \sin B + \frac{2\lambda}{\sqrt{3}} \sin A = \frac{2}{\sqrt{3}} [\sin B + \lambda \sin(\frac{\pi}{3} - B)] = \frac{2}{\sqrt{3}} [(1 - \frac{\lambda}{2}) \sin B +$$

$$\frac{\sqrt{3}\lambda}{2} \cos B] = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{(1 - \frac{\lambda}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}\lambda}{2})^2} \sin(B + \phi), \text{ 其中 } \tan \phi = \frac{\sqrt{3}\lambda}{2 - \lambda}, 0 < B < \frac{\pi}{3},$$

因为 $z = b + \lambda a$ 存在最大值, 所以由 $B + \phi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 可得 $2k\pi + \frac{\pi}{6} < \phi < 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$,

所以 $\tan \phi > \frac{\sqrt{3}}{3}$, 所以 $\frac{\sqrt{3}\lambda}{2 - \lambda} > \frac{\sqrt{3}}{3}$, 解得 $\frac{1}{2} < \lambda < 2$, 所以正数 λ 的取值范围为 $(\frac{1}{2}, 2)$, 故选 C.

11、B

【解析】

设贫困户总数为 a , 利用表中数据可得脱贫率 $P = 2 \times 40\% \times 95\% + 2 \times 10\% \times 90\%$, 进而可求解.

【详解】

$$\text{设贫困户总数为 } a, \text{ 脱贫率 } P = \frac{2 \times 40\% \times 95\% a + 2 \times 10\% \times 90\% a}{a} = 94\%,$$

$$\text{所以 } \frac{94\%}{70\%} = \frac{47}{35}.$$

故 2019 年的年脱贫率是实施“精准扶贫”政策前的年均脱贫率的 $\frac{47}{35}$ 倍.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/607041020044006142>