

2025 届湖南省株洲市重点中学高考数学四模试卷

考生须知：

1. 全卷分选择题和非选择题两部分，全部在答题纸上作答。选择题必须用 2B 铅笔填涂；非选择题的答案必须用黑色字迹的钢笔或答字笔写在“答题纸”相应位置上。
2. 请用黑色字迹的钢笔或答字笔在“答题纸”上先填写姓名和准考证号。
3. 保持卡面清洁，不要折叠，不要弄破、弄皱，在草稿纸、试题卷上答题无效。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的焦距是虚轴长的 2 倍，则双曲线的渐近线方程为 ()

- A. $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}x$ B. $y = \pm \sqrt{3}x$ C. $y = \pm \frac{1}{2}x$ D. $y = \pm 2x$

2. 已知抛物线 $C: y^2 = 2px$ ($p > 0$) 的焦点为 F ， $M\left(\frac{1}{2}, y_0\right)$ 为该抛物线上一点，以 M 为圆心的圆与 C 的准线相切于点 A ， $\angle AMF = 120^\circ$ ，则抛物线方程为 ()

- A. $y^2 = 2x$ B. $y^2 = 4x$ C. $y^2 = 6x$ D. $y^2 = 8x$

3. 已知 $a, b, c \in \mathbf{R}$ ， $a > b > c$ ， $a + b + c = 0$ 。若实数 x, y 满足不等式组 $\begin{cases} x \geq 0 \\ x + y \leq 4 \\ bx + ay + c \geq 0 \end{cases}$ ，则目标函数

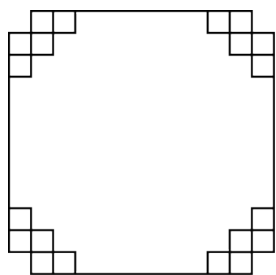
$z = 2x + y$ ()

- A. 有最大值，无最小值 B. 有最大值，有最小值
C. 无最大值，有最小值 D. 无最大值，无最小值

4. 已知 $a = \left(\frac{1}{2}\right)^{0.2}$ ， $b = \log_{\frac{1}{2}} 0.2$ ， $c = a^b$ ，则 a, b, c 的大小关系是 ()

- A. $a < b < c$ B. $c < a < b$ C. $a < c < b$ D. $b < c < a$

5. 窗花是贴在窗纸或窗户玻璃上的剪纸，是中国古老的传统民间艺术之一，它历史悠久，风格独特，神兽人们喜爱。下图即是一副窗花，是把一个边长为 12 的大正方形在四个角处都剪去边长为 1 的小正方形后剩余的部分，然后在剩余部分中的四个角处再剪出边长全为 1 的一些小正方形。若在这个窗花内部随机取一个点，则该点不落在任何一个正方形内的概率是 ()



- A. $\frac{3}{7}$ B. $\frac{4}{7}$ C. $\frac{5}{7}$ D. $\frac{6}{7}$

6. 设函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 10x + 1, & x \leq 0 \\ |\lg x|, & x > 0 \end{cases}$ 若关于 x 的方程 $f(x) = a$ ($a \in \mathbb{R}$) 有四个实数解 x_i ($i = 1, 2, 3, 4$), 其中

$x_1 < x_2 < x_3 < x_4$, 则 $(x_1 + x_2)(x_3 - x_4)$ 的取值范围是 ()

- A. $(0, 101]$ B. $(0, 99]$ C. $(0, 100]$ D. $(0, +\infty)$

7. 数学中有许多形状优美、寓意美好的曲线, 例如: 四叶草曲线就是其中一种, 其方程为 $(x^2 + y^2)^3 = x^2 y^2$. 给出下列四个结论:

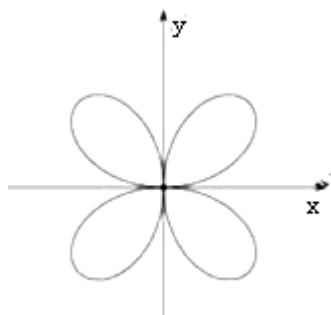
① 曲线 C 有四条对称轴;

② 曲线 C 上的点到原点的最大距离为 $\frac{1}{4}$;

③ 曲线 C 第一象限上任意一点作两坐标轴的垂线与两坐标轴围成的矩形面积最大值为 $\frac{1}{8}$;

④ 四叶草面积小于 $\frac{\pi}{4}$.

其中, 所有正确结论的序号是 ()



- A. ①② B. ①③ C. ①③④ D. ①②④

8. 设 $x \in \mathbb{R}$, 则“ $|x - 1| < 2$ ”是“ $x^2 < x$ ”的 ()

- A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

9. 某个命题与自然数 n 有关, 且已证得“假设 $n = k (k \in N^*)$ 时该命题成立, 则 $n = k + 1$ 时该命题也成立”. 现已知当 $n = 7$ 时, 该命题不成立, 那么 ()

- A. 当 $n = 8$ 时, 该命题不成立 B. 当 $n = 8$ 时, 该命题成立
C. 当 $n = 6$ 时, 该命题不成立 D. 当 $n = 6$ 时, 该命题成立

10. 已知 F_1, F_2 是双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左右焦点, 过点 F_2 与双曲线的一条渐近线平行的直线交双曲线另一条渐近线于点 M , 若点 M 在以线段 F_1F_2 为直径的圆外, 则双曲线离心率的取值范围是 ()

- A. $(2, +\infty)$ B. $(\sqrt{3}, 2)$ C. $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ D. $(1, \sqrt{2})$

11. 给甲、乙、丙、丁四人安排泥工、木工、油漆三项工作, 每项工作至少一人, 每人做且仅做一项工作, 甲不能安排木工工作, 则不同的安排方法共有 ()

- A. 12 种 B. 18 种 C. 24 种 D. 64 种

12. 函数 $y = \sin x (3 \sin x + 4 \cos x) (x \in R)$ 的最大值为 M , 最小正周期为 T , 则有序数对 (M, T) 为 ()

- A. $(5, \pi)$ B. $(4, \pi)$ C. $(-1, 2\pi)$ D. $(4, 2\pi)$

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 在平面直角坐标系 xOy 中, 点 $P(x_0, y_0)$ 在单位圆 O 上, 设 $\angle xOP = \alpha$, 且 $\alpha \in (\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})$. 若 $\cos(\alpha + \frac{\pi}{4}) = -\frac{12}{13}$, 则 x_0 的值为_____.

14. 设集合 $A = \{1, 3\}$, $B = \{x | x^2 - 2x - 3 < 0\}$, 则 $A \cap B =$ _____.

15. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n = 2^{n+1} + m$, 且 $a_1, a_4, a_5 - 2$ 成等差数列, $b_n = \frac{a_n}{(a_n - 1)(a_{n+1} - 1)}$, 数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n , 则满足 $T_n > \frac{2017}{2018}$ 的最小正整数 n 的值为_____.

16. 有甲、乙、丙、丁四位歌手参加比赛, 其中只有一位获奖, 有人走访了四位歌手, 甲说“是乙或丙获奖.”乙说“甲、丙都未获奖.”丙说: “我获奖了”. 丁说: “是乙获奖.”四位歌手的话只有两句是对的, 则获奖的歌手是_____.

三、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (12 分) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的上顶点为 B , 圆 $C': x^2 + y^2 = 4$ 与 y 轴的正半轴交于点 A , 与 C

有且仅有两个交点且都在 C 轴上, $\frac{|OB|}{|OA|} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (O 为坐标原点).

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 已知点 $D\left(-1, \frac{3}{2}\right)$, 不过 D 点且斜率为 $-\frac{1}{2}$ 的直线 l 与椭圆 C 交于 M, N 两点, 证明: 直线 DM 与直线 DN 的斜率互为相反数.

18. (12 分) $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c 已知 $a^2 + c^2 + \sqrt{2}ac = b^2$, $\sqrt{5} \sin A + \cos B = 0$.

(1) 求 $\cos C$;

(2) 若 $\triangle ABC$ 的面积 $S = \frac{5}{2}$, 求 b .

19. (12 分) 已知函数 $f(x) = x^2 + (t-2)x - t \ln x + 2$.

(1) 若 $x = 2$ 是 $f(x)$ 的极值点, 求 $f(x)$ 的极大值;

(2) 求实数 t 的范围, 使得 $f(x) \geq 2$ 恒成立.

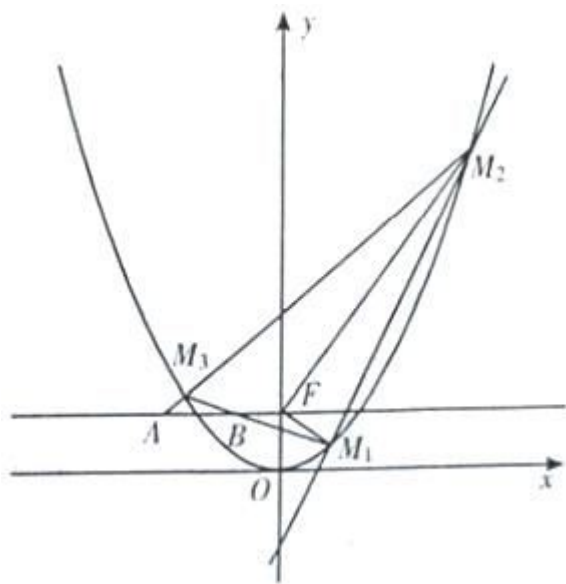
20. (12 分) 已知函数 $f(x) = \frac{1}{2}m(x^2 - 1) - \ln x (m \in \mathbf{R})$.

(1) 若 $m = 1$, 求证: $f(x) \geq 0$.

(2) 讨论函数 $f(x)$ 的极值;

(3) 是否存在实数 m , 使得不等式 $f(x) > \frac{1}{x} - \frac{1}{e^{x-1}}$ 在 $(1, +\infty)$ 上恒成立? 若存在, 求出 m 的最小值; 若不存在, 请说明理由.

21. (12 分) 如图, 直线 $y = 2x - 2$ 与抛物线 $x^2 = 2py (p > 0)$ 交于 M_1, M_2 两点, 直线 $y = \frac{p}{2}$ 与 y 轴交于点 F , 且直线 $y = \frac{p}{2}$ 恰好平分 $\angle M_1FM_2$.



(1) 求 p 的值;

(2) 设 A 是直线 $y = \frac{p}{2}$ 上一点, 直线 AM_2 交抛物线于另一点 M_3 , 直线 M_1M_3 交直线 $y = \frac{p}{2}$ 于点 B , 求 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ 的值.

22. (10 分) 已知函数 $f(x) = |x-1| - 2|x+3|$.

(1) 求不等式 $f(x) < 1$ 的解集;

(2) 若存在实数 x , 使得不等式 $m^2 - 3m - f(x) < 0$ 成立, 求实数 m 的取值范围.

参考答案

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1、A

【解析】

根据双曲线的焦距是虚轴长的 2 倍, 可得出 $c = 2b$, 结合 $c^2 = 4b^2 = a^2 + b^2$, 得出 $a^2 = 3b^2$, 即可求出双曲线的渐近线方程.

【详解】

解: 由双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 可知, 焦点在 x 轴上,

则双曲线的渐近线方程为: $y = \pm \frac{b}{a}x$,

由于焦距是虚轴长的 2 倍, 可得: $c = 2b$,

$$\therefore c^2 = 4b^2 = a^2 + b^2,$$

$$\text{即: } a^2 = 3b^2, \quad \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

所以双曲线的渐近线方程为: $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}x$.

故选: A.

【点睛】

本题考查双曲线的简单几何性质, 以及双曲线的渐近线方程.

2、C

【解析】

根据抛物线方程求得 M 点的坐标, 根据 $MA \parallel x$ 轴、 $\angle AMF = 120^\circ$ 列方程, 解方程求得 p 的值.

【详解】

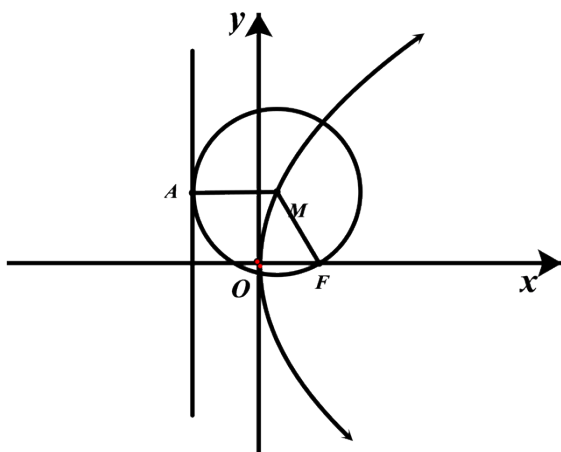
不妨设 M 在第一象限, 由于 M 在抛物线上, 所以 $M\left(\frac{1}{2}, \sqrt{p}\right)$, 由于以 M 为圆心的圆与 C 的准线相切于点 A , 根据

抛物线的定义可知, $|MA| = |MF|$ 、 $MA \parallel x$ 轴, 且 $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$. 由于 $\angle AMF = 120^\circ$, 所以直线 MF 的倾斜角 α 为

120° , 所以 $k_{MF} = \tan 120^\circ = \frac{\sqrt{p}-0}{\frac{1}{2}-\frac{p}{2}} = -\sqrt{3}$, 解得 $p=3$, 或 $p=\frac{1}{3}$ (由于 $\frac{1}{2}-\frac{p}{2} < 0, p > 1$, 故舍去). 所以抛物线

的方程为 $y^2 = 6x$.

故选: C



【点睛】

本小题主要考查抛物线的定义, 考查直线的斜率, 考查数形结合的数学思想方法, 属于中档题.

3、B

【解析】

判断直线 $bx + ay + c = 0$ 与纵轴交点的位置, 画出可行解域, 即可判断出目标函数的最值情况.

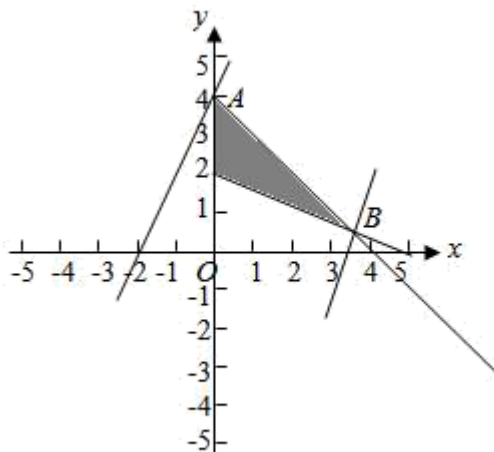
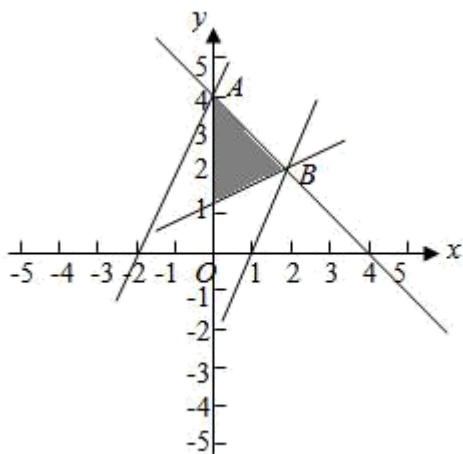
【详解】

由 $a + b + c = 0$, $a > b > c$, 所以可得 $a > 0, c < 0$.

$$a > b \Rightarrow a > -a - c \Rightarrow \frac{c}{a} > -2, b > c \Rightarrow -a - c > c \Rightarrow \frac{c}{a} < -\frac{1}{2} \therefore -2 < \frac{c}{a} < -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} < -\frac{c}{a} < 2,$$

所以由 $bx + ay + c = 0 \Rightarrow y = -\frac{b}{a}x - \frac{c}{a}$, 因此该直线在纵轴的截距为正, 但是斜率有两种可能, 因此可行解域如下图

所示:



由此可以判断该目标函数一定有最大值和最小值.

故选: B

【点睛】

本题考查了目标函数最值是否存在问题, 考查了数形结合思想, 考查了不等式的性质应用.

4、 B

【解析】

利用函数 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 与函数 $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ 互为反函数, 可得 $0 < a < b < 1$, 再利用对数运算性质比较 a, c 进而可得结论.

【详解】

依题意, 函数 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 与函数 $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ 关于直线 $y = x$ 对称, 则 $0 < \left(\frac{1}{2}\right)^{0.2} < \log_{\frac{1}{2}} 0.2$,

即 $0 < a < b < 1$, 又 $c = a^b = \left(\frac{1}{2}\right)^{0.2 \times \log_{\frac{1}{2}} 0.2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{2}} 0.2^{0.2}} = 0.2^{0.2} = \left(\frac{1}{5}\right)^{0.2} < \left(\frac{1}{2}\right)^{0.2} = a$,

所以, $c < a < b$.

故选: B.

【点睛】

本题主要考查对数、指数的大小比较, 属于基础题.

5、 D

【解析】

由几何概型可知, 概率应是非小正方形面积与窗花面积的比, 即可求解.

【详解】

由题, 窗花的面积为 $12^2 - 4 \times 1 = 140$, 其中小正方形的面积为 $5 \times 4 = 20$,

所以所求概率 $P = \frac{140-20}{140} = \frac{6}{7}$,

故选:D

【点睛】

本题考查几何概型的面积公式的应用,属于基础题.

6、B

【解析】

画出函数图像, 根据图像知: $x_1 + x_2 = -10$, $x_3 x_4 = 1$, $\frac{1}{10} \leq x_3 < 1$, 计算得到答案.

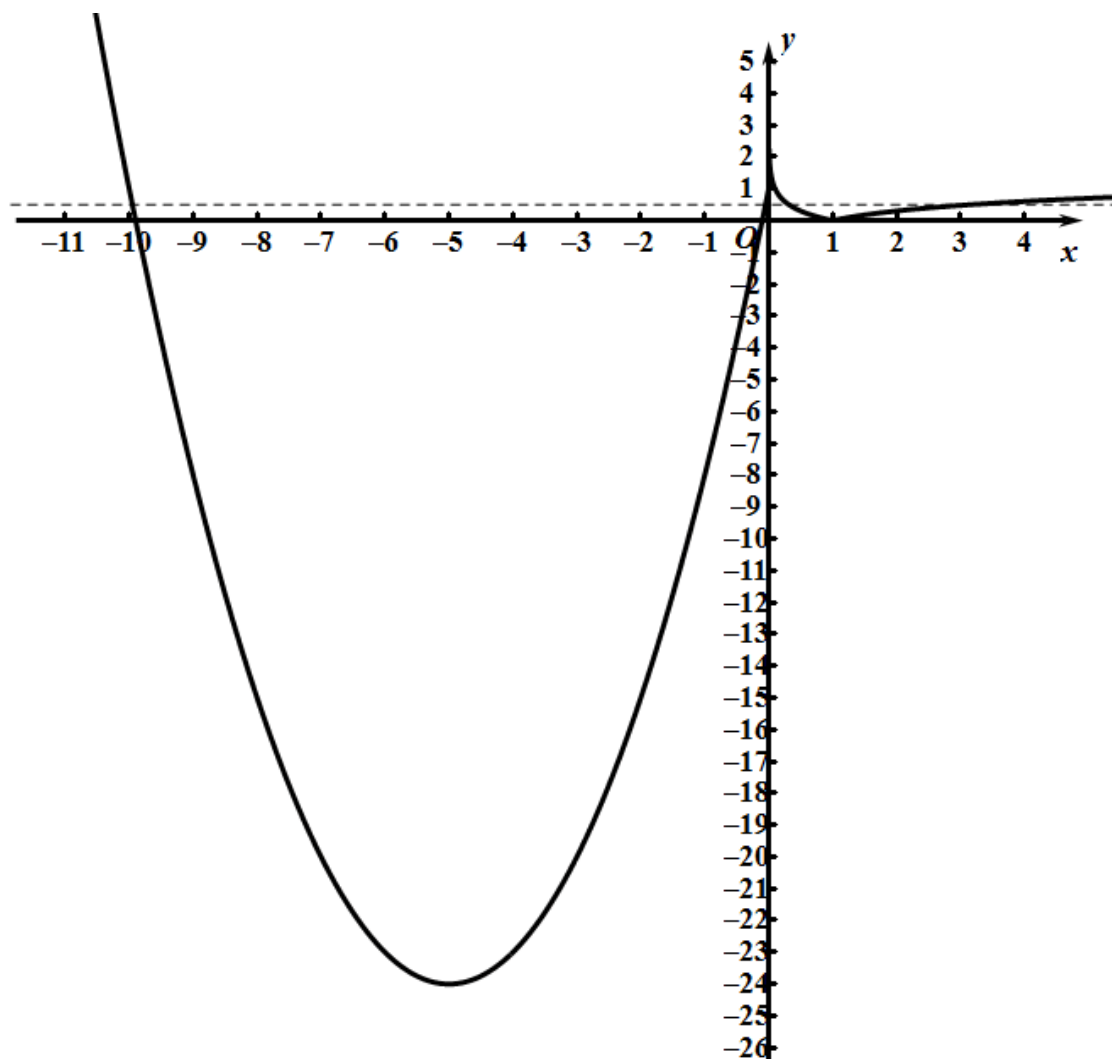
【详解】

$f(x) = \begin{cases} x^2 + 10x + 1, & x \leq 0 \\ |\lg x|, & x > 0 \end{cases}$, 画出函数图像, 如图所示:

根据图像知: $x_1 + x_2 = -10$, $\lg x_3 = -\lg x_4$, 故 $x_3 x_4 = 1$, 且 $\frac{1}{10} \leq x_3 < 1$.

故 $(x_1 + x_2)(x_3 - x_4) = -10 \left(x_3 - \frac{1}{x_3} \right) \in (0, 99]$.

故选: B.



【点睛】

本题考查了函数零点问题，意在考查学生的计算能力和应用能力，画出图像是解题的关键.

7、C

【解析】

①利用 x, y 之间的代换判断出对称轴的条数；②利用基本不等式求解出到原点的距离最大值；③将面积转化为 x, y 的关系式，然后根据基本不等式求解出最大值；④根据 x, y 满足的不等式判断出四叶草与对应圆的关系，从而判断出面积是否小于 $\frac{\pi}{4}$.

【详解】

①：当 x 变为 $-x$ 时， $(x^2 + y^2)^3 = x^2 y^2$ 不变，所以四叶草图象关于 y 轴对称；

当 y 变为 $-y$ 时， $(x^2 + y^2)^3 = x^2 y^2$ 不变，所以四叶草图象关于 x 轴对称；

当 y 变为 x 时， $(x^2 + y^2)^3 = x^2 y^2$ 不变，所以四叶草图象关于 $y = x$ 轴对称；

当 y 变为 $-x$ 时, $(x^2 + y^2)^3 = x^2 y^2$ 不变, 所以四叶草图象关于 $y = -x$ 轴对称;

综上所述: 有四条对称轴, 故正确;

②: 因为 $(x^2 + y^2)^3 = x^2 y^2$, 所以 $(x^2 + y^2)^3 = x^2 y^2 \leq \left(\frac{x^2 + y^2}{2}\right)^2$,

所以 $x^2 + y^2 \leq \frac{1}{4}$, 所以 $\sqrt{x^2 + y^2} \leq \frac{1}{2}$, 取等号时 $x^2 = y^2 = \frac{1}{8}$,

所以最大距离为 $\frac{1}{2}$, 故错误;

③: 设任意一点 $P(x, y)$, 所以围成的矩形面积为 xy ,

因为 $(x^2 + y^2)^3 = x^2 y^2$, 所以 $x^2 y^2 = (x^2 + y^2)^3 \geq (2xy)^3$, 所以 $xy \leq \frac{1}{8}$,

取等号时 $x = y = \frac{\sqrt{2}}{4}$, 所以围成矩形面积的最大值为 $\frac{1}{8}$, 故正确;

④: 由②可知 $x^2 + y^2 \leq \frac{1}{4}$, 所以四叶草包含在圆 $x^2 + y^2 = \frac{1}{4}$ 的内部,

因为圆的面积为: $S = \pi \cdot \frac{1}{4} = \frac{\pi}{4}$, 所以四叶草的面积小于 $\frac{\pi}{4}$, 故正确.

故选: C.

【点睛】

本题考查曲线与方程的综合运用, 其中涉及到曲线的对称性分析以及基本不等式的运用, 难度较难. 分析方程所表示曲线的对称性, 可通过替换方程中 x, y 去分析证明.

8、B

【解析】

解出两个不等式的解集, 根据充分条件和必要条件的定义, 即可得到本题答案.

【详解】

由 $|x-1| < 2$, 得 $-1 < x < 3$, 又由 $x^2 < x$, 得 $0 < x < 1$,

因为集合 $\{x | 0 < x < 1\} \subset \{x | -1 < x < 3\}$,

所以“ $|x-1| < 2$ ”是“ $x^2 < x$ ”的必要不充分条件.

故选: B

【点睛】

本题主要考查必要不充分条件的判断, 其中涉及到绝对值不等式和一元二次不等式的解法.

9、C

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/607110100124010035>