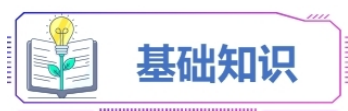


第 20 讲 探索三角形相似的条件及证明

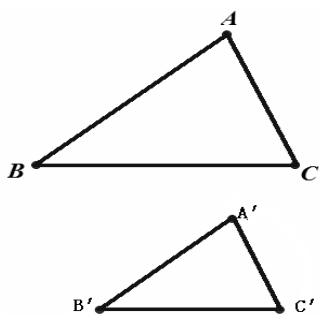


1. 相似三角形的概念.
2. 相似三角形的判定定理.
3. 进一步探索相似三角形的判定及其应用, 提高运用“类比”思想的自觉性, 提高推理能力.



一、相似三角形

在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 中, 如果 $\angle A = \angle A'$, $\angle B = \angle B'$, $\angle C = \angle C'$, $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'} = k$, 我们就说 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 相似, 记作 $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$. k 就是它们的相似比, “ $\sim$ ”读作“相似于”.



要点:

- (1) 书写两个三角形相似时, 要注意对应点的位置要一致, 即 $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$, 则说明点 A 的对应点是 A' , 点 B 的对应点是 B' , 点 C 的对应点是 C' ;
- (2) 对于相似比, 要注意顺序和对应的问题, 如果两个三角形相似, 那么第一个三角形的一边和第二个三角形的对应边的比叫做第一个三角形和第二个三角形的相似比. 当相似比为 1 时, 两个三角形全等.

二、相似三角形的判定定理

1. **判定定理 (一)**: 如果一个三角形的两个角与另一个三角形的两个角对应相等, 那么这两个三角形相似.

2. **判定定理 (二)**: 如果两个三角形的两组对应边的比相等, 并且相应的夹角相等, 那么这两个三角形相似.

要点: 此方法要求用三角形的两边及其夹角来判定两个三角形相似, 应用时必须注意这个角必需是两边的夹角, 否则, 判断的结果可能是错误的.

3. **判定定理 (三)**: 如果一个三角形的两个角与另一个三角形的两个角对应相等, 那么这两个三角形相似. (简述为: 三边对应成比例, 两个三角形相似)

要点: 要判定两个三角形是否相似, 只需找到这两个三角形的两个对应角相等即可, 对于直角三角形而言, 若有一个锐角对应相等, 那么这两个三角形相似.

4. **直角三角形相似的判定定理**: 如果一个直角三角形的斜边及一条直角边与另一个直角三角形的斜边及一条直角边对应成比例, 那么这两个直角三角形相似. (简述为: 斜边和直角边对应成比例, 两个直角

三角形相似)



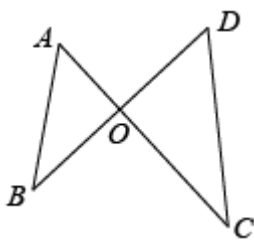
考点剖析

考点 1: 利用两角相等证明相似



例 1. 已知: 如图所示, AC, BD 相交于点 O , 连接 AB, CD , 且 $\angle ABD = \angle ACD$, 求证:

$\triangle AOB \sim \triangle DOC$.



【答案】 见解析

【分析】 根据 AA 判断两个三角形相似.

【解析】 证明: $\because \angle ABD = \angle ACD, \angle AOB = \angle COD$,

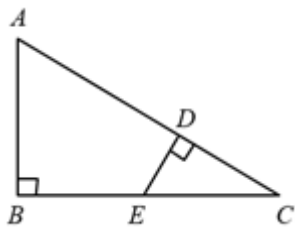
$\therefore \triangle AOB \sim \triangle DOC$.

【点睛】 本题主要考查了相似三角形的判定, 熟练掌握相似三角形的判定定理是解题的关键.



例 2. 如图, 在 $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle B = 90^\circ$, 点 D 在 AC 边上, $DE \perp AC$ 交 BC 于点 E . 求证:

$\triangle CDE \sim \triangle CBA$.



【答案】 证明见解析

【分析】 由 $DE \perp AC, \angle B = 90^\circ$ 可得出 $\angle CDE = \angle B$, 再由公共角相等, 即可证得 $\triangle CDE \sim \triangle CBA$.

【解析】 $\because DE \perp AC, \angle B = 90^\circ$,

$\therefore \angle CDE = \angle B = 90^\circ$.

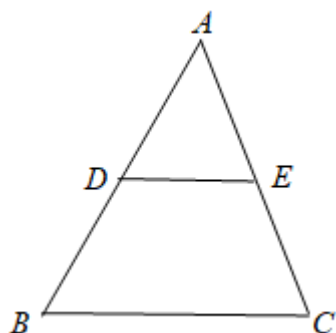
又 $\because \angle C = \angle C$,

$\therefore \triangle CDE \sim \triangle CBA$.

【点睛】本题考查了相似三角形的判定，常用的判定两个三角形相似的方法有 1、定义法 三个角分别相等，三条边成比例的两个三角形相似. 2、平行于三角形一边的直线截其他两边（或其他两边的延长线）所构成的三角形和原三角形相似. 3、两角分别相等的两个三角形相似. 4、两边成比例且夹角相等的两个三角形相似.



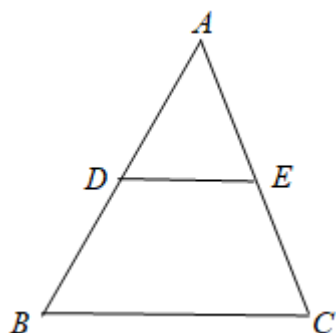
例 3. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $DE \parallel BC$ ，且 $AD = 3$ ， $DB = 2$. 写出图中的相似三角形，并指出其相似比.



【答案】 $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ ，相似比为 $\frac{3}{5}$

【分析】先利用平行线的性质得到 $\angle ADE = \angle B$ ， $\angle AED = \angle C$ ，即可证明 $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ ，从而得到相似比 $= \frac{AD}{AB} = \frac{AD}{AD + BD} = \frac{3}{5}$.

【解析】解： $\because DE \parallel BC$ ，
 $\therefore \angle ADE = \angle B$ ， $\angle AED = \angle C$ ，
 $\therefore \triangle ADE \sim \triangle ABC$ ，
 $\therefore$ 相似比 $= \frac{AD}{AB} = \frac{AD}{AD + BD} = \frac{3}{5}$.

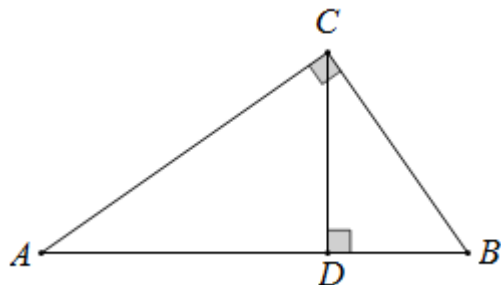


【点睛】本题主要考查了相似三角形的判定和平行线的性质，解题的关键在于能够熟练掌握相似三角形的判定方法.



例 4. 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $CD \perp AB$ 于 D 。

求证： $\triangle ACD \sim \triangle ABC$ 。



【答案】 见解析

【分析】 根据两个角相等的两个三角形相似进行证明即可。

【解析】 证明： $\because CD \perp AB$ 于 D ，

$$\therefore \angle ADC = \angle ACB = 90^\circ,$$

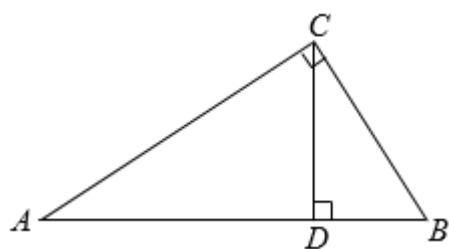
$$\because \angle A = \angle A,$$

$$\therefore \triangle ACD \sim \triangle ABC.$$

【点睛】 本题考查了相似三角形的判定，解题关键是熟练掌握相似三角形的判定定理，准确运用进行推理证明。



例 5. 如图， $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， CD 是斜边 AB 上的高。求证：



$$(1) \triangle ACD \sim \triangle ABC;$$

$$(2) \triangle CBD \sim \triangle ABC.$$

【答案】 (1) 见解析；(2) 见解析

【分析】 (1) 根据有两组角对应相等的两个三角形相似进行证明即可。

(2) 根据有两组角对应相等的两个三角形相似进行证明即可。

【解析】 证明：(1) $\because CD$ 是斜边 AB 上的高，

$$\therefore \angle ADC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ADC = \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\because \angle A = \angle A,$$

$$\therefore \triangle ACD \sim \triangle ABC.$$

(2) $\because CD$ 是斜边 AB 上的高,

$$\therefore \angle BDC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BDC = \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\because \angle B = \angle B,$$

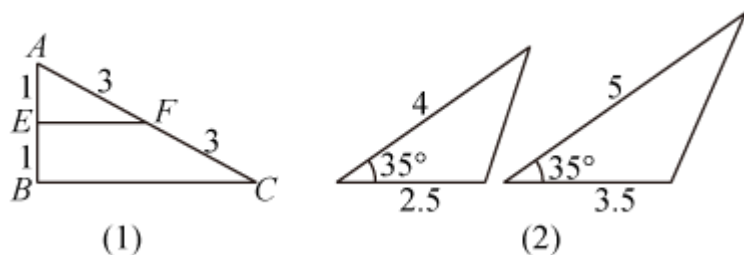
$$\therefore \triangle CBD \sim \triangle ABC.$$

【点睛】本题考查了相似三角形的判定定理；熟记有两组角对应相等的两个三角形相似是解决问题的关键.

考点 2：利用两边对应成比例及其夹角相等证明相似



例 6. 如图，每组中的两个三角形是否相似？为什么？



【答案】(1) 中 $\triangle AEF \sim \triangle ABC$ ；(2) 中两三角形不相似

【分析】根据相似三角形的判定定理判断即可.

【解析】解：(1) $\because \frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} = \frac{1}{2}, \angle A = \angle A$

$$\therefore \triangle AEF \sim \triangle ABC;$$

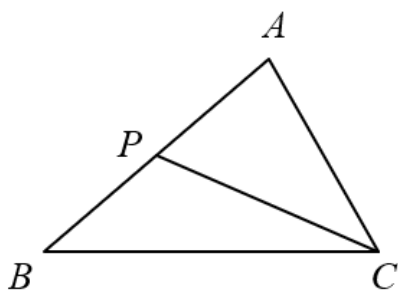
$$(2) \because \frac{4}{5} \neq \frac{2.5}{3.5},$$

$\therefore$ 两三角形不相似.

【点睛】本题考查了相似三角形的判定，熟知其判定定理是解题的关键.



例 7. 如图， P 是 $\triangle ABC$ 的边 AB 上的一点.



(1) 如果 $\angle ACP = \angle B$, $\triangle ACP$ 与 $\triangle ABC$ 是否相似? 为什么?

(2) 如果 $\frac{AP}{AC} = \frac{AC}{AB}$, $\triangle ACP$ 与 $\triangle ABC$ 是否相似? 为什么? 如果 $\frac{AC}{CP} = \frac{BC}{AC}$ 呢?

【答案】 (1) 相似. 因为 $\angle ACP = \angle B$, $\angle PAC = \angle CAB$; (2) 相似, 因为 $\frac{AP}{AC} = \frac{AC}{AB}$, $\angle PAC = \angle CAB$; 不相似. 因为虽然两边成比例, 但它们的夹角不相等.

【分析】 (1) 直接根据有两角对应相等的两个三角形相似, 即可求证;

(2) 直接根据两边成比例且夹角相等的两个三角形相似, 即可求解.

【解析】 解: (1) 相似, 理由如下:

$$\because \angle ACP = \angle B, \angle PAC = \angle CAB,$$

$$\therefore \triangle ACP \sim \triangle ABC;$$

(2) 相似, 理由如下:

$$\because \frac{AP}{AC} = \frac{AC}{AB}, \angle PAC = \angle CAB,$$

$$\therefore \triangle ACP \sim \triangle ABC;$$

不相似, 理由如下:

因为虽然 $\frac{AC}{CP} = \frac{BC}{AC}$, 但它们的夹角 $\angle ACB$ 与 $\angle ACP$ 不相等,

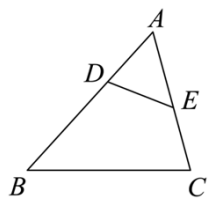
所以 $\triangle ACP$ 与 $\triangle ABC$ 不相似.

【点睛】 本题主要考查了相似三角形的判定, 熟练掌握相似三角形的判定定理是解题的关键.



例 8. 已知: D 、 E 是 $\triangle ABC$ 的边 AB 、 AC 上的点, $AB = 8, AD = 3, AC = 6, AE = 4$, 求证:

$$\triangle ABC \sim \triangle AED.$$



【答案】 见解析

【分析】根据已知线段长度求出 $\frac{AB}{AE} = \frac{AC}{AD}$ ，再根据 $\angle A = \angle A$ 推出相似即可。

【解析】证明：在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle AED$ 中，

$$\because AB = 8, AD = 3, AC = 6, AE = 4,$$

$$\therefore \frac{AB}{AE} = \frac{8}{4} = 2, \quad \frac{AC}{AD} = \frac{6}{3} = 2,$$

$$\therefore \frac{AB}{AE} = \frac{AC}{AD},$$

$$\text{又} \because \angle A = \angle A,$$

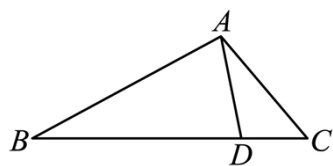
$$\therefore \triangle ABC \sim \triangle AED.$$

【点睛】本题考查了相似三角形的判定定理的应用，注意：有两边的对应成比例，且夹角相等的两三角形相似。

考点 3：利用三边对应成比例证明相似



例 9. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $BC = 8, AC = 4$ ， D 是 BC 边上一点， $CD = 2$ 。求证 $\triangle ABC \sim \triangle DAC$ 。



【答案】详见解析

【分析】由题中线段长度得出 $\frac{BC}{AC} = \frac{AC}{CD}$ ，结合相似三角形的判定定理即可证明。

【解析】证明： $\because BC = 8, AC = 4, CD = 2$ ，

$$\therefore \frac{AC}{CD} = \frac{4}{2} = 2 = \frac{8}{4} = \frac{BC}{AC}.$$

$$\therefore \frac{BC}{AC} = \frac{AC}{CD}.$$

$$\because \angle C = \angle C,$$

$$\therefore \triangle ABC \sim \triangle DAC.$$

【点睛】本题考查了相似三角形的判定定理，熟练掌握相似三角形的判定定理是解题关键。



例 10. 根据下列条件，判断 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 是否相似，并说明理由：

(1) $AB = 8\text{cm}$ ， $AC = 15\text{cm}$ ， $\angle A = 40^\circ$

$\angle A' = 40^\circ$ ， $A'B' = 16\text{cm}$ ， $A'C' = 30\text{cm}$ ；

(2) $AB = 10\text{cm}$ ， $BC = 8\text{cm}$ ， $AC = 16\text{cm}$ ，

$$A'B'=16\text{cm}, B'C'=12.8\text{cm}, A'C'=25.6\text{cm}.$$

【答案】 (1) 相似, 因为两边成比例, 夹角相等; (2) 相似, 因为三边成比例.

【分析】 (1) 根据两组边对应成比例且夹角相等判定三角形相似的方法求解即可;

(2) 根据三组边对应成比例判定三角形相似的方法求解即可.

【解析】 解: (1) $\because \frac{AB}{A'B'} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}, \frac{AC}{A'C'} = \frac{15}{30} = \frac{1}{2},$

$$\therefore \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'},$$

$$\text{又} \because \angle A = \angle A',$$

$$\therefore \triangle ABC \sim \triangle A'B'C';$$

$$(2) \because \frac{AB}{A'B'} = \frac{10}{16} = \frac{5}{8}, \frac{AC}{A'C'} = \frac{16}{25.6} = \frac{5}{8}, \frac{BC}{B'C'} = \frac{8}{12.8} = \frac{5}{8},$$

$$\therefore \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'},$$

$$\therefore \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'.$$

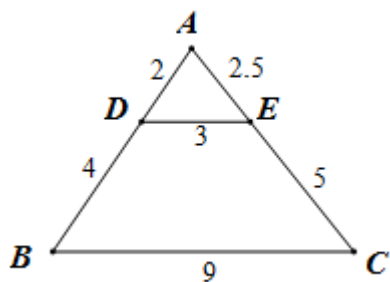
【点睛】 此题考查了相似三角形的判定, 解题的关键是熟练掌握相似三角形的判定方法: 1. 三组边对应成比例的两个三角形相似; 两组边对应成比例且夹角相等的两个三角形相似; 两组角对应相等的两个三角形相似.



例 11. 如图, $DE \parallel BC$.

(1) 求 $\frac{AD}{AB}$, $\frac{AE}{AC}$, $\frac{DE}{BC}$ 的值;

(2) 证明 $\triangle ADE$ 与 $\triangle ABC$ 相似.



【答案】 (1) $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC} = \frac{1}{3}$; (2) 见解析

【分析】 (1) 由图可知 AB 、 AC 的长度, 分别代入 $\frac{AD}{AB}$, $\frac{AE}{AC}$, $\frac{DE}{BC}$ 计算即可得本题答案;

(2) 由 (1) 知 $\triangle ADE$ 和 $\triangle ABC$ 对应边成比例, 由 $DE \parallel BC$ 可知 $\angle ADE = \angle B$, $\angle AED = \angle C$, $\angle A = \angle A$; 再根据相似三角形的判定定理, 对应边成比例, 对应角分别相等的两个三角形相似, 即可判定 $\triangle ADE$ 与 $\triangle ABC$

相似.

【解析】(1) $\because AB = AD + BD = 6, AC = AE + EC = 7.5$

$$\therefore \frac{AD}{AB} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}, \frac{AE}{AC} = \frac{2.5}{7.5} = \frac{1}{3}, \frac{DE}{BC} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3},$$

$$\text{即 } \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC} = \frac{1}{3}.$$

$$(2) \text{ 由 (1) 知, } \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC},$$

又 $\because DE \parallel BC$

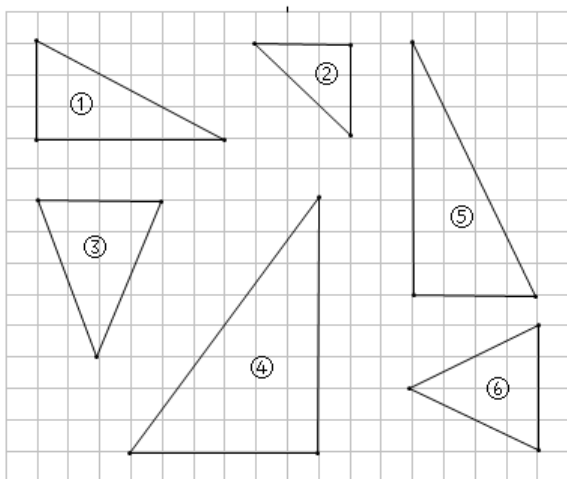
$$\therefore \angle ADE = \angle B, \angle AED = \angle C, \angle A = \angle A,$$

$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ABC$ (对应边成比例, 对应角分别相等的两个三角形相似).

【点睛】本题主要考查了比例线段及相似三角形的判定定理的知识, 熟练掌握相关知识是解题的关键.



例 12. 如图所示的 6 个三角形中, 哪些三角形相似? 为什么?



【答案】①与⑤相似, 因为三边成比例; 其余三角形都不相似, 理由见解析.

【分析】由勾股定理得每个三角形的三条边的边长, 再根据两个三角形三条边对应成比例判断两个三角形相似解题.

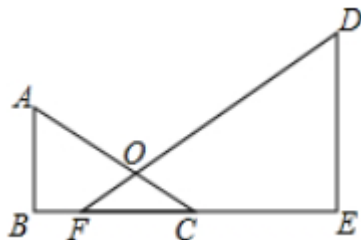
【解析】解: 根据勾股定理, 结合图形可知, ①的三条边分别为: 3, 6, $3\sqrt{5}$; ②的三条边分别为: 3, 3, $3\sqrt{2}$; ③的三条边分别为: 4, $\sqrt{29}$, $\sqrt{29}$; ④的三条边分别为: 6, 8, 10; ⑤的三条边分别为: 4, 8, $4\sqrt{5}$; ⑥的三条边分别为: 4, $2\sqrt{5}$, $2\sqrt{5}$, 只有①与⑤相似, 因为三边成比例; 其余三角形都不相似, $\therefore$ ①与⑤相似, 因为三边成比例; 其余三角形都不相似.

【点睛】本题考查网格与勾股定理、相似三角形的判断等知识, 是重要考点, 掌握相关知识是解题关键.



例 13. 如图, 已知 $\angle B = \angle E = 90^\circ$, $AB = 6$, $BF = 3$, $CF = 5$, $DE = 15$, $DF = 25$. 求证:

$\triangle ABC \sim \triangle DEF$.



【答案】 $\triangle ABC \sim \triangle DEF$

【分析】 利用三边对应成比例的两个三角形相似, 即可得到 $\triangle ABC \sim \triangle DEF$;

【解析】 证明: $\because \angle B = 90^\circ$, $AB = 6$, $BF = 3$, $CF = 5$,

$$\therefore BC = BF + FC = 3 + 5 = 8, AC = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$$

在 $\triangle ABC$ 中, $\therefore AB : BC : AC = 6 : 8 : 10 = 3 : 4 : 5$

$\because \angle E = 90^\circ$, $DE = 15$, $DF = 25$,

$$\therefore EF = \sqrt{DF^2 - DE^2} = \sqrt{25^2 - 15^2} = 20,$$

在 $\triangle DEF$ 中, $DE : EF : DF = 15 : 20 : 25 = 3 : 4 : 5$

在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 中, 三边对应成比例,

$\therefore \triangle ABC \sim \triangle DEF$.

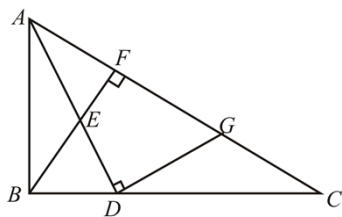
【点睛】 本题考查了相似三角形的判定与性质: 三边对应成比例的两个三角形相似, 熟悉运用相似三角形的判定与性质即可进行证明.

考点 4: 相似的传递性



例 14. 如图, $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ABC = 90^\circ$, $BF \perp AC$ 于 F , AD 是 $\angle BAC$ 的平分线, $DG \perp AD$ 交 AC

于 G , AD 与 BF 交于点 E .



(1) 求证: $\triangle ABE \sim \triangle DCG$

(2) $\triangle ABD \sim \triangle _ \sim \triangle _$, $\triangle ABE \sim \triangle DCG \sim \triangle _$.

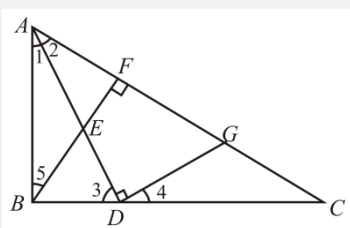
【答案】(1)见解析

(2) ADG , AFE , ACD

【分析】(1) 根据两角对应相等的两个三角形相似证明即可；

(2) 根据两角对应相等的两个三角形相似证明即可.

【解析】(1) 解：证明：如下图，



$$\because \angle ABC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle 1 + \angle 3 = 90^\circ,$$

$$\text{又} \because DG \perp AD,$$

$$\therefore \angle 3 + \angle 4 = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle 1 = \angle 4$$

$$\because BF \perp AC,$$

$$\therefore \angle 5 + \angle BAC = 90^\circ,$$

$$\because \angle ABC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle C + \angle BAC = 90^\circ$$

$$\therefore \angle 5 = \angle C$$

$$\therefore \triangle ABE \sim \triangle DCG.$$

(2) $\because AD$ 平分 $\angle BAC$,

$$\therefore \angle 1 = \angle 2,$$

$$\text{又} \angle ABC = 90^\circ, BF \perp AC, DG \perp AD,$$

$$\therefore \angle ABC = \angle ADG = \angle AFB = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle ABD \sim \triangle ADG \sim \triangle AFE,$$

$$\therefore \angle 3 = \angle AGD = \angle AEF,$$

$$\therefore \angle ADC = \angle CGD = \angle AEB,$$

又根据直角三角形两锐角互余可得 $\angle 5 = \angle C$,

$$\therefore \triangle ABE \sim \triangle DCG \sim \triangle ACD$$

故答案为: ADG, AFE, ACD .

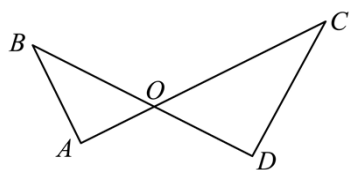
【点睛】本题考查相似三角形的判定，解题的关键是熟练掌握相似三角形的判定方法，属于中考常考题型.

考点 5: 添加一个条件证明相似



例 15. 如图，已知 AC, BD 相交于点 O ，若补充一个条件后，便可得到 $\triangle AOB \sim \triangle DOC$ ，则要补

充的条件可以是_____。（填一个即可）



【答案】 $\angle A = \angle D$ （答案不唯一）

【分析】根据相似三角形的判定解答即可.

【解析】解：补充条件 $\angle A = \angle D$ 即可；

$\because \angle AOB = \angle COD$ （对顶角）， $\angle A = \angle D$ ，

$\therefore \triangle AOB \sim \triangle DOC$ ，

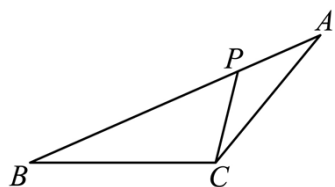
故答案为: $\angle A = \angle D$ （答案不唯一）.

【点睛】本题考查了相似三角形的判定，掌握两角分别对应相等的两个三角形相似，两边成比例且夹角相等的两个三角形相似是解题的关键.



例 16. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， P 为 AB 上的一点，补充条件，能使 $\triangle APC \sim \triangle ACB$ ，这个条件可以是

_____。（写出一个即可）



【答案】 $\angle ACP = \angle B$ （答案不唯一）

【分析】 $\triangle APC$ 和 $\triangle ACB$ 有公共角 $\angle A$ ，则根据有两组角对应相等的两个三角形相似解答即可.

【解析】解： $\because \angle PAC = \angle CAB$ ，

$\therefore$ 当 $\angle ACP = \angle B$ 时， $\triangle APC \sim \triangle ACB$ ，

故答案为: $\angle ACP = \angle B$ （答案不唯一）

【点睛】本题考查了相似三角形的判定：两组对应边的比相等且夹角对应相等的两个三角形相似；有两组角对应相等的两个三角形相似．充分利用 $\triangle APC$ 和 $\triangle ACB$ 的公共角是关键．



例 17．在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 中， $\angle A = \angle D = 105^\circ$ ， $AC = 4\text{cm}$ ， $AB = 6\text{cm}$ ， $DE = 3\text{cm}$ ，则 $DF =$ _____

时， $\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 相似．

【答案】 2cm 或 4.5cm

【分析】由于两相似三角形的对应边不能确定，故应分 $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ 与 $\triangle ABC \sim \triangle DFE$ 两种情况进行讨论．

【解析】解： $\because \angle A = \angle D$ ， $AB = 6\text{cm}$ ， $AC = 4\text{cm}$ ， $DE = 3\text{cm}$ ，

$\therefore$ 当 $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ 时， $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$ ，即 $\frac{6}{3} = \frac{4}{DF}$ ，

解得： $DF = 2$ ；

当 $\triangle ABC \sim \triangle DFE$ 时， $\frac{AB}{DF} = \frac{AC}{DE}$ ，

即 $\frac{6}{DF} = \frac{4}{3}$ ，

解得： $DF = 4.5$ ．

综上所述，当 $DF = 2\text{cm}$ 或 4.5cm 时， $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 相似．

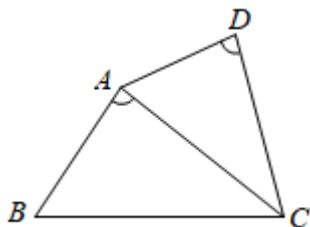
故答案为：2cm 或 4.5cm．

【点睛】本题考查的是相似三角形的判定，在解答此题时要注意进行分类讨论．



例 18．如图，在四边形 $ABCD$ 中，已知 $\angle ADC = \angle BAC$ ，那么补充下列条件后不能判定 $\triangle ADC$ 和 $\triangle BAC$

相似的是（ ）



A. CA 平分 $\angle BCD$

B. $\angle DAC = \angle ABC$

C. $AC^2 = BC \cdot CD$

D. $\frac{AD}{AB} = \frac{DC}{AC}$

【答案】 C

【分析】根据相似三角形的判定定理逐项判断即可．

【解析】解：A 选项，若 CA 平分 $\angle BCD$ ，则 $\angle DCA = \angle ACB$ ，又 $\angle ADC = \angle BAC$ ，满足两组对角相等，可

以判定 $\triangle ADC$ 和 $\triangle BAC$ 相似，不合题意；

B 选项，若 $\angle DAC = \angle ABC$ ，又 $\angle ADC = \angle BAC$ ，满足两组对角相等，可以判定 $\triangle ADC$ 和 $\triangle BAC$ 相似，不合题意；

C 选项，若 $AC^2 = BC \cdot CD$ ，则 $\frac{AC}{BC} = \frac{CD}{AC}$ ，两组对应边成比例，但两边的夹角不相等，不能判定 $\triangle ADC$ 和 $\triangle BAC$ 相似，符合题意；

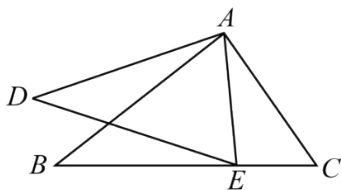
D 选项，若 $\frac{AD}{AB} = \frac{DC}{AC}$ ，又 $\angle ADC = \angle BAC$ ，满足两组对应边成比例且两边的夹角相等，可以判定 $\triangle ADC$ 和 $\triangle BAC$ 相似，不合题意；

故选 C.

【点睛】本题考查相似三角形的判定，熟练掌握相似三角形的判定方法是解题的关键.



例 19. 如图，如果 $\angle BAD = \angle CAE$ ，那么添加下列一个条件后，仍不能确定 $\triangle ADE$ 与 $\triangle ABC$ 相似的是 ()



- A. $\angle B = \angle D$ B. $\angle C = \angle AED$ C. $\frac{AB}{AD} = \frac{DE}{BC}$ D. $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$

【答案】C

【分析】由 $\angle BAD = \angle CAE$ ，得到 $\angle EAD = \angle CAB$ ，然后根据相似三角形的判定定理逐项判断判定即可.

【解析】 $\because \angle BAD = \angle CAE$ ， $\angle BAE = \angle BAE$

$\therefore \angle EAD = \angle CAB$ ，

A. 若添加 $\angle B = \angle D$ ，可用两角对应相等的两个三角形相似，证明 $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ ，故本选项不符合题意；

B. 添加 $\angle C = \angle AED$ ，可用两角对应相等的两个三角形相似，证明 $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ ，故本选项不符合题意；

C. 添加 $\frac{AB}{AD} = \frac{DE}{BC}$ ，已知的角不是成比例的两边的夹角，项符合题意；

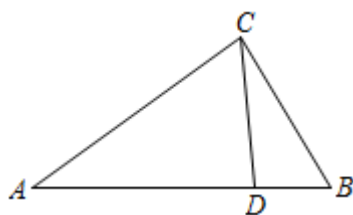
D. 添加 $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$ ，可用两边对应成比例且夹角相等的两个三角形相似，证明 $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ ，故本选项不符合题意.

故选：C.

【点睛】本题主要考查了相似三角形的判定定理，灵活运用相似三角形的判定定理判定两三角形相似是解题的关键.



例 20. 如图，要使 $\triangle ACD \sim \triangle ABC$ ，需要具备的条件是（ ）



A. $\frac{AC}{AD} = \frac{AB}{BC}$

B. $\frac{CD}{AD} = \frac{BC}{AC}$

C. $AC^2 = AD \cdot AB$

D. $CD^2 = AD \cdot BD$

【答案】 C

【分析】 题目中隐含条件 $\angle A = \angle A$ ，根据有两边对应成比例，且夹角相等的两三角形相似，得出添加的条件只能是 $\frac{AC}{AB} = \frac{AD}{AC}$ ，根据比例性质即可推出答案.

【解析】 解： $\because$ 在 $\triangle ACD$ 和 $\triangle ABC$ 中， $\angle A = \angle A$ ，

$\therefore$ 根据有两边对应成比例，且夹角相等的两三角形相似，得出添加的条件是： $\frac{AC}{AB} = \frac{AD}{AC}$ ，

$\therefore AC^2 = AD \cdot AB$.

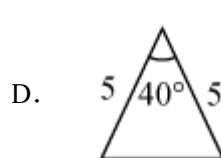
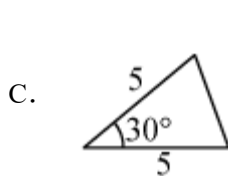
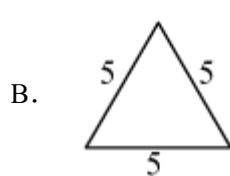
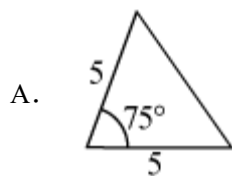
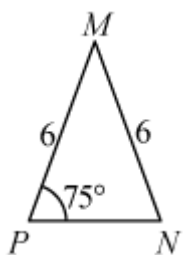
故选： C.

【点睛】 本题考查了相似三角形的判定，注意：有两边对应成比例，且夹角相等的两三角形相似.

考点 6：判断三角形相似



例 21. 如图，已知 $\triangle MNP$ ，下列四个三角形，与 $\triangle MNP$ 相似的是（ ）



【答案】 C

【分析】 根据相似三角形的判定条件分别判断即可；

【解析】根据图形可知， $MN=MP$ ， $\angle P=\angle N=75^\circ$ ，

$$\therefore \angle M=180^\circ-75^\circ-75^\circ=30^\circ,$$

$\therefore$ 根据两边对应成比例且夹角相等的两个三角形相似可得C中的图形与 $\triangle MNP$ 相似；

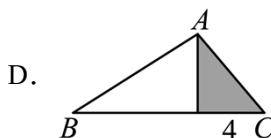
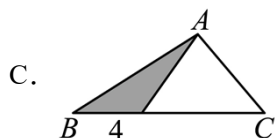
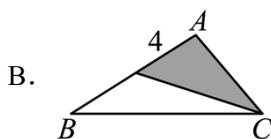
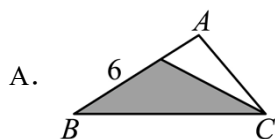
故选C.

【点睛】本题主要考查了相似三角形的判定条件，结合三角形内角和定理计算是解题的关键.



例 22. 如图，在三角形纸片 ABC 中， $AB=9$ ， $AC=6$ ， $BC=12$ ，沿虚线剪下的涂色部分的三角形

与 $\triangle ABC$ 相似的是（ ）



【答案】B

【分析】

根据相似三角形的判定分别进行判断即可得出答案即可.

【解析】解：在三角形纸片 ABC 中， $AB=9$ ， $AC=6$ ， $BC=12$.

A. 因为 $\frac{6}{BC} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$ ，对应边 $\frac{AB}{BC} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$ ， $\frac{1}{2} \neq \frac{3}{4}$ ，故沿虚线剪下的涂色部分的三角形与 $\triangle ABC$ 不相似，故此选项错误；

B. 因为 $\frac{4}{AC} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ ，对应边 $\frac{AC}{AB} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$ ，又 $\angle A = \angle A$ ，故沿虚线剪下的涂色部分的三角形与 $\triangle ABC$ 相似，故此选项正确；

C. 因为 $\frac{4}{AB} = \frac{4}{9}$ ，对应边 $\frac{AB}{BC} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$ ，即： $\frac{4}{9} \neq \frac{3}{4}$ ，故沿虚线剪下的涂色部分的三角形与 $\triangle ABC$ 不相似，故此选项错误；

D. 因为 $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ ，对应边 $\frac{AC}{BC} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$ ， $\frac{2}{3} \neq \frac{1}{2}$ ，故沿虚线剪下的涂色部分的三角形与 $\triangle ABC$ 不相似，故此选项错误；

故选：B.

【点睛】此题主要考查了相似三角形的判定，正确利用相似三角形两边比值相等切夹角相等的两三角形相似是解题关键.



例 23. $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 符合下列条件, 其中使 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 不相似的是 ()

A. $\angle A = \angle A' = 45^\circ$, $\angle B = 26^\circ$, $\angle B' = 109^\circ$

B. $AB = 1$, $AC = 1.5$, $BC = 2$, $A'B' = 12$, $A'C' = 8$, $B'C' = 16$

C. $\angle A = \angle B'$, $AB = 1.5$, $AC = \frac{15}{14}$, $A'B' = \frac{3}{2}$, $B'C' = 2.1$

D. $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, $B'C' = \sqrt{a}$, $A'C' = \sqrt{b}$, $A'B' = \sqrt{c}$

【答案】 D

【分析】 依据选项提供条件, 选择对应的方法进行判断即可.

【解析】 解: A、 $\because \angle A = \angle A' = 45^\circ$, $\angle B = 26^\circ$, $\angle B' = 109^\circ$,

$$\therefore \angle C = 180^\circ - \angle A - \angle B = 109^\circ,$$

$$\therefore \angle C = \angle B' = 109^\circ,$$

$\therefore \triangle ABC \sim \triangle A'C'B'$, 故此选项不符合题意;

B、 $\because AB = 1$, $AC = 1.5$, $BC = 2$, $A'B' = 12$, $A'C' = 8$, $B'C' = 16$,

$$\therefore \frac{A'B'}{AC} = \frac{A'C'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = 8$$

$\therefore \triangle ABC \sim \triangle A'C'B'$, 故此选项不符合题意;

C、 $\because AB = 1.5$, $AC = \frac{15}{14}$, $A'B' = \frac{3}{2}$, $B'C' = 2.1$,

$$\therefore \frac{AB}{AC} = \frac{B'C'}{A'B'} = 1.4,$$

又 $\because \angle A = \angle B'$,

$\therefore \triangle ABC \sim \triangle B'C'A'$, 故此选项不符合题意;

D、三边对应比例不相等, 故两个三角形不相似, 故此选项符合题意;

故选 D.

【点睛】 本题主要考查了相似三角形的判定, 三角形内角和定理, 解题的关键在于能够熟练掌握相似三角形的判定条件.

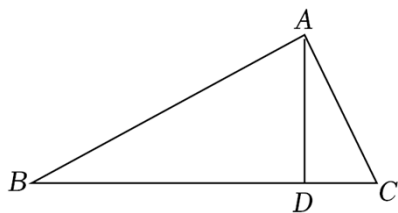
考点 7: 三角形相似有关比例变形式



例 24. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AD \perp BC$, 点 D 为垂足, 为了证明 $\angle BAC = 90^\circ$, 以下添加的等积式中, 正

确的有 ()

① $AD^2 = BD \cdot CD$ ② $AB \cdot CD = AC \cdot AD$ ③ $AC^2 = BC \cdot CD$ ④ $AB^2 = AC \cdot BD$



A. 1 个

B. 2 个

C. 3 个

D. 4 个

【答案】 C

【分析】 ①由题意得出 $\frac{AD}{BD} = \frac{CD}{AD}$ ，证明 $\triangle ADC \sim \triangle BDA$ ，可得出 $\angle DAC = \angle ABD$ ，则可证出结论；②不能证明 $\triangle ABC$ 与 $\triangle ADC$ 相似，得出②不符合题意；证出 $\triangle ACD \sim \triangle BCA$ ，由相似三角形的性质得出 $\angle ADC = \angle BAC = 90^\circ$ ，可得出③符合题意；根据 $AB^2 = AC \cdot BD$ 不能证明 $\triangle ABC$ 与 $\triangle ABD$ 相似，则可得出结论。

【解析】 解：① $\because AD \perp BC$ ，

$$\therefore \angle ADC = \angle ADB = 90^\circ,$$

$$\because AD^2 = BD \cdot CD,$$

$$\therefore \frac{AD}{BD} = \frac{CD}{AD},$$

$$\therefore \triangle ADC \sim \triangle BDA,$$

$$\therefore \angle DAC = \angle ABD,$$

$$\therefore \angle ABD + \angle BAD = \angle DAC + \angle BAD = 90^\circ,$$

$$\text{即 } \angle BAC = 90^\circ,$$

故①符合题意；

$$\text{② } \because AB \cdot CD = AC \cdot AD,$$

$$\therefore \frac{AB}{AC} = \frac{AD}{CD},$$

$$\because \angle ADB = \angle ADC = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle ABD \sim \triangle CAD,$$

$$\therefore \angle ABD = \angle CAD,$$

$$\therefore \angle BAD + \angle CAD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BAC = 90^\circ,$$

故②符合题意；

$$\text{③ } \because AC^2 = BC \cdot CD,$$

$$\therefore \frac{AC}{BC} = \frac{CD}{AC},$$

$$\because \angle ACD = \angle BCA,$$

$$\therefore \triangle ACD \sim \triangle BCA,$$

$$\therefore \angle ADC = \angle BAC = 90^\circ,$$

故③符合题意；

④由 $AB^2 = AC \cdot BD$ 不能证明 $\triangle ABC$ 与 $\triangle ABD$ 相似，

故④不符合题意；

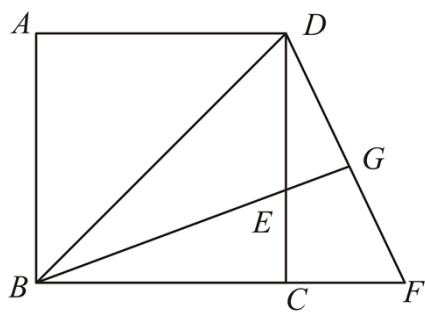
故选：C.

【点睛】本题考查了直角三角形的判定与性质，相似三角形的判定与性质，熟练掌握相似三角形的判定与性质是解题的关键.

考点 8：三角形相似的证明综合题



例 25. 如图，已知正方形 $ABCD$ 中， BE 平分 $\angle DBC$ 且交 CD 边于点 E ，将 $\triangle BCE$ 绕点 C 顺时针旋转到 $\triangle DCF$ 的位置，并延长 BE 交 DF 于点 G 。求证：



(1) $\triangle BDG \sim \triangle DEG$;

(2) $BG \perp DF$.

【答案】(1)见解析

(2)见解析

【分析】(1) 先判断出 $\angle FDC = \angle EBC$ ，再利用角平分线判断出 $\angle FDC = \angle EBC$ ，即可得出结论；

(2) 由三角形的内角和定理可求 $\angle DGE = \angle BCE = 90^\circ$ ，可得结论.

【解析】(1) 证明：由旋转可知： $\triangle BCE \cong \triangle DCF$ ，

$$\therefore \angle FDC = \angle EBC.$$

$$\because BE \text{ 平分 } \angle DBC,$$

$$\therefore \angle DBE = \angle EBC,$$

$$\therefore \angle FDC = \angle DBE,$$

$$\therefore \angle DGE = \angle DGB,$$

$$\therefore \triangle BDG \sim \triangle DEG;$$

(2) 证明: $\because \angle EBC = \angle GDE, \angle BEC = \angle DEG,$

$$\therefore \angle DGE = \angle BCE = 90^\circ.$$

$$\therefore BG \perp DF.$$

【点睛】本题考查了相似三角形的判定和性质，正方形的性质，旋转的性质，灵活运用这些性质解决问题是本题的关键.



例 26. 如图 1, 在 $\triangle ABC$ 中, $AC = BC$, 将线段 CB 绕点 C 逆时针旋转 90° , 得到线段 CD , 连接 AD, BD .

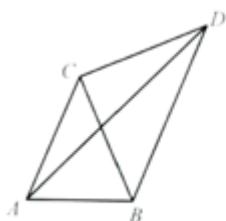


图 1

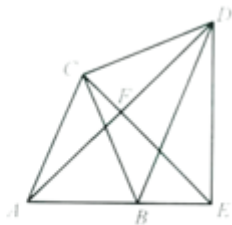


图 2

(1) 求 $\angle BAD$ 的度数;

(2) 如图 2, 若 $\angle ACD$ 的平分线 CE 交 AD 于点 F , 交 AB 的延长线于点 E , 连结 DE .

① 证明: $\triangle BCD \sim \triangle AED$;

② 证明: $\sqrt{2}CE = DE + BE$.

【答案】(1) 45°

(2) ① 见解析; ② 见解析

【分析】(1) 由等腰三角形的性质及旋转的性质得 $\angle BAC = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$, $\angle CAD = 45^\circ - \frac{\alpha}{2}$, 即可得 $\angle BAD$ 的度数;

(2) ① 由题意可得 $\angle CBD = \angle BAD = 45^\circ$, 由等腰三角形的性质可得 $\angle ACE = \angle DCE$, $CE \perp AD$, 进而可得 $\angle AEC = 45^\circ$, 可证 $\triangle ACE \cong \triangle DCE$ (SAS), 易得 $\angle DEC = \angle AEC = 45^\circ$, 可得 $\angle AED = \angle BCD = 90^\circ$, 可证结论;

② 延长 ED 至 G , 使得 $DG = BC$, 先证 $\angle CBE = \angle CDG$, 进而可证 $\triangle CBE \cong \triangle CDG$ (SAS), 可得

$\angle BEC = \angle G = 45^\circ$ ， $\triangle CEG$ 是等腰直角三角形，可得结论.

【解析】(1) 解：设 $\angle ACB = \alpha$ ，

$$\because AC = BC,$$

$$\therefore \angle BAC = \angle ABC = \frac{180^\circ - \angle ACB}{2} = \frac{180^\circ - \alpha}{2} = 90^\circ - \frac{\alpha}{2},$$

由旋转可知， $\angle BCD = 90^\circ$ ， $AC = BC = DC$ ，

$$\therefore \angle ACD = 90^\circ + \alpha$$

$$\therefore \angle CAD = \angle CDA = \frac{180^\circ - \angle DCA}{2} = 45^\circ - \frac{\alpha}{2},$$

$$\therefore \angle BAD = \angle BAC - \angle CAD = 45^\circ;$$

(2) ①证明： $\because AC = BC = DC$ ， $\angle BCD = 90^\circ$ ，

$$\therefore \angle CBD = \angle BAD = 45^\circ,$$

又 $\because CE$ 平分 $\angle ACD$ ，

$$\therefore \angle ACE = \angle DCE, CE \perp AD, \text{ 则 } \angle AFE = 90^\circ$$

$$\therefore \angle AEC = 45^\circ,$$

又 $\because CE = CE$ ，

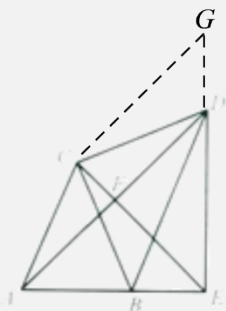
$$\therefore \triangle ACE \cong \triangle DCE (\text{SAS}),$$

$$\therefore \angle DEC = \angle AEC = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle AED = \angle BCD = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle BCD \sim \triangle AED;$$

②证明：延长 ED 至 G ，使得 $DG = BE$ ，



$$\because AC = BC = DC,$$

$$\therefore \angle BAC = \angle ABC,$$

由①知 $\triangle ACE \cong \triangle DCE$ ，

$$\therefore \angle EAC = \angle EDC,$$

$$\therefore \angle ABC = \angle EDC,$$

$$\therefore \angle CBE = \angle CDG,$$

$$\therefore \triangle CBE \cong \triangle CDG (\text{SAS}),$$

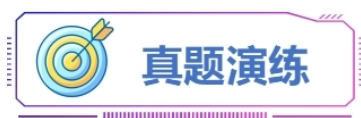
$$\therefore \angle BEC = \angle G = 45^\circ,$$

$\therefore \triangle CEG$ 是等腰直角三角形,

$$\therefore EG = \sqrt{2}CE = DE + DG = DE + BE,$$

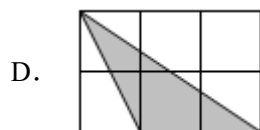
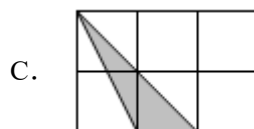
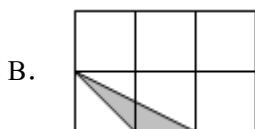
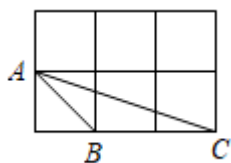
$$\text{即: } \sqrt{2}CE = DE + BE.$$

【点睛】本题是几何变换综合题，考查了全等三角形的判定和性质，相似三角形的判定，等腰三角形的性质，旋转的性质，添加恰当的辅助线构造全等三角形是本题的关键。



一、单选题

1. (2018·浙江杭州·中考真题) 如图，小正方形边长均为 1，则下列图形中三角形(阴影部分)与 $\triangle ABC$ 相似的是



【答案】B

【分析】根据网格的特点求出三角形的三边，再根据相似三角形的判定定理即可求解。

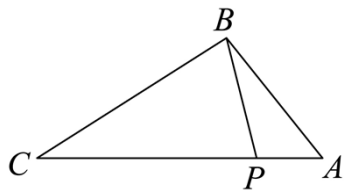
【解析】已知给出的三角形的各边 AB 、 CB 、 AC 分别为 $\sqrt{2}$ 、2、 $\sqrt{10}$ 、

只有选项 B 的各边为 1、 $\sqrt{2}$ 、 $\sqrt{5}$ 与它的各边对应成比例。

故选 B.

【点睛】此题主要考查相似三角形的判定，解题的关键是熟知相似三角形的判定定理。

2. (2015·湖北荆州·统考中考真题) 如图, 点 P 在 $\triangle ABC$ 的边 AC 上, 要判断 $\triangle ABP \sim \triangle ACB$, 添加一个条件, 不正确的是 ()



A. $\angle ABP = \angle C$

B. $\angle APB = \angle ABC$

C. $\frac{AP}{AB} = \frac{AB}{AC}$

D. $\frac{AB}{BP} = \frac{AC}{CB}$

【答案】D

【解析】解: A. 当 $\angle ABP = \angle C$ 时,

又 $\angle A = \angle A$,

$\therefore \triangle ABP \sim \triangle ACB$,

故此选项错误;

B. 当 $\angle APB = \angle ABC$ 时,

又 $\angle A = \angle A$,

$\therefore \triangle ABP \sim \triangle ACB$,

故此选项错误;

C. 当 $\frac{AP}{AB} = \frac{AB}{AC}$ 时,

又 $\angle A = \angle A$,

$\therefore \triangle ABP \sim \triangle ACB$,

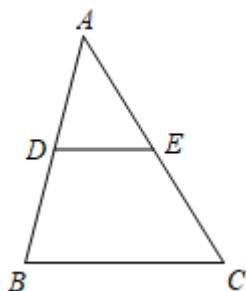
故此选项错误;

D. 无法得到 $\triangle ABP \sim \triangle ACB$, 故此选项正确.

故选: D.

二、填空题

3. (2022·湖南邵阳·统考中考真题) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 点 D 在 AB 边上, 点 E 在 AC 边上, 请添加一个条件_____, 使 $\triangle ADE \sim \triangle ABC$.



【答案】 $\angle ADE = \angle B$ （答案不唯一）.

【分析】已知有一个公共角，则可以再添加一个角从而利用有两组角对应相等的两个三角形相似来判定或添加夹此角的两边对应成比例也可以判定.

【解析】解： $\because \angle A = \angle A$,

$\therefore$ 根据两角相等的两个三角形相似，可添加条件 $\angle ADE = \angle B$ 或 $\angle AED = \angle C$ 证 $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ 相似；

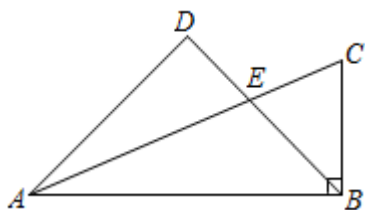
根据两边对应成比例且夹角相等，可添加条件 $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ 证 $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ 相似.

故答案为： $\angle ADE = \angle B$ （答案不唯一）.

【点睛】此题考查了相似三角形的判定，解题的关键是掌握相似三角形的判定方法.

三、解答题

4. （2022·山东菏泽·统考中考真题）如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ABC = 90^\circ$ ， E 是边 AC 上一点，且 $BE = BC$ ，过点 A 作 BE 的垂线，交 BE 的延长线于点 D ，求证： $\triangle ADE \sim \triangle ABC$.



【答案】见解析

【分析】先根据等腰三角形的性质得 $\angle C = \angle BEC$ ，又由对顶角相等可证得 $\angle AED = \angle C$ ，再由 $\angle D = \angle ABC = 90^\circ$ ，即可得出结论.

【解析】证明： $\because BE = BC$

$\therefore \angle C = \angle BEC$,

$\because \angle BEC = \angle AED$,

$\therefore \angle AED = \angle C$,

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/608012135057006102>