# 专题 17  三角函数概念与诱导公式

**【考点预测】**

**知识点一：三角函数基本概念**

1．角的概念

(1)任意角：①定义：角可以看成平面内一条射线绕着端点从一个位置旋转到另一个位置所成的图形；

②分类：角按旋转方向分为正角、负角和零角．

(2)所有与角 $\alpha$ 终边相同的角，连同角 $\alpha$ 在内，构成的角的集合是 $S=\left\{\beta\middle|\beta=k\cdot 360^{\circ}+\alpha,k\in Z\right\}$．

(3)象限角：使角的顶点与原点重合，角的始边与 $x$ 轴的非负半轴重合，那么，角的终边在第几象限，就说这个角是第几象限角；如果角的终边在坐标轴上，就认为这个角不属于任何一个象限．

(4)象限角的集合表示方法：

象限角的集合

- 第一象限角：$\{\alpha|2k\pi<\alpha<2k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\}$
- 第二象限角：$\{\alpha|2k\pi+\frac{\pi}{2}<\alpha<2k\pi+\pi,k\in\mathbf{Z}\}$
- 第三象限角：$\{\alpha|2k\pi+\pi<\alpha<2k\pi+\frac{3\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\}$
- 第四象限角：$\{\alpha|2k\pi+\frac{3\pi}{2}<\alpha<2k\pi+2\pi,k\in\mathbf{Z}\}$

2．弧度制

(1)定义：把长度等于半径长的弧所对的圆心角叫做 1 弧度的角，用符号 rad 表示，读作弧度．正角的弧度数是一个正数，负角的弧度数是一个负数，零角的弧度数是 0．

(2)角度制和弧度制的互化：$180^{\circ}=\pi\,\text{rad}$ ,$1^{\circ}=\dfrac{\pi}{180}\text{rad}$ ,$1\text{rad}=\dfrac{180^{\circ}}{\pi}$．

(3)扇形的弧长公式：$l=|\alpha|\cdot r$，扇形的面积公式：$S=\dfrac{1}{2}lr=\dfrac{1}{2}|\alpha|\cdot r^{2}$．

3．任意角的三角函数

(1)定义：任意角 α 的终边与单位圆交于点 $P(x,y)$ 时，则 $\sin\alpha=y$，$\cos\alpha=x$，$\tan\alpha=\dfrac{y}{x}(x\neq 0)$．

(2)推广：三角函数坐标法定义中，若取点 P $P(x,y)$ 是角 α 终边上异于顶点的任一点，设点 $P$ 到原点 $O$ 的距离为 $r$，则 $\sin\alpha=\dfrac{y}{r}$，$\cos\alpha=\dfrac{x}{r}$，$\tan\alpha=\dfrac{y}{x}(x\neq 0)$

三角函数的性质如下表：

| 三角函数 | 定义域 | 第一象限符号 | 第二象限符号 | 第三象限符号 | 第四象限符号 |
|---|---|---|---|---|---|
| $\sin\alpha$ | $R$ | ＋ | ＋ | － | － |
| $\cos\alpha$ | $R$ | ＋ | － | － | ＋ |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\tan\alpha$ | $\{\alpha \mid \alpha \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in Z\}$ | + | − | + | − |

记忆口诀:三角函数值在各象限的符号规律:一全正、二正弦、三正切、四余弦.

**4．三角函数线**

如下图，设角 α 的终边与单位圆交于点 P，过 P 作 PM⊥x 轴，垂足为 M，过 A(1,0)作单位圆的切线与 α 的终边或终边的反向延长线相交于点 T.

| | |
|---|---|
| 三角函数线 | 有向线段 MP 为正弦线；有向线段 OM 为余弦线；有向线段 AT 为正切线 |

**知识点二：同角三角函数基本关系**

**1．同角三角函数的基本关系**

(1)平方关系：$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

(2)商数关系：$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha(\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi)$；

**知识点三：三角函数诱导公式**

| 公式 | 一 | 二 | 三 | 四 | 五 | 六 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 角 | $2k\pi + \alpha(k \in Z)$ | $\pi + \alpha$ | $-\alpha$ | $\pi - \alpha$ | $\frac{\pi}{2} - \alpha$ | $\frac{\pi}{2} + \alpha$ |
| 正弦 | $\sin\alpha$ | $-\sin\alpha$ | $-\sin\alpha$ | $\sin\alpha$ | $\cos\alpha$ | $\cos\alpha$ |
| 余弦 | $\cos\alpha$ | $-\cos\alpha$ | $\cos\alpha$ | $-\cos\alpha$ | $\sin\alpha$ | $-\sin\alpha$ |
| 正切 | $\tan\alpha$ | $\tan\alpha$ | $-\tan\alpha$ | $-\tan\alpha$ | | |
| 口诀 | 函数名不变，符号看象限 | | | | 函数名改变，符号看象限 | |

【记忆口诀】奇变偶不变，符号看象限，说明：（1）先将诱导三角函数式中的角统一写作 $n \cdot \frac{\pi}{2} \pm \alpha$；（2）无论有多大，一律视为锐角，判断 $n \cdot \frac{\pi}{2} \pm \alpha$ 所处的象限，并判断题设三角函数在该象限的正负；（3）当 $n$ 为奇数是，“奇变”，正变余，余变正；当 $n$ 为偶数时，“偶不变”函数名保持不变即可.

**【方法技巧与总结】**

1．利用 $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ 可以实现角 $\alpha$ 的正弦、余弦的互化，利用 $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha$ 可以实现角 $\alpha$ 的弦切互化.

2．“$\sin\alpha + \cos\alpha$ , $\sin\alpha\cos\alpha$ , $\sin\alpha - \cos\alpha$ ”方程思想知一求二.

$$(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha = 1 + \sin 2\alpha$$
$$(\sin\alpha - \cos\alpha)^2 = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha = 1 - \sin 2\alpha$$

$$(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 + (\sin\alpha - \cos\alpha)^2 = 2$$

**【题型归纳目录】**

**题型一：终边相同的角的集合的表示与区别**

**题型二：等分角的象限问题**

**题型三：弧长与扇形面积公式的计算**

**题型四：三角函数定义题**

**题型五：象限符号与坐标轴角的三角函数值**

**题型六：同角求值—条件中出现的角和结论中出现的角是相同的**

**题型七：诱导求值与变形**

**【典例例题】**

**题型一：终边相同的角的集合的表示与区别**

**例 1**．（2023·全国·高三专题练习）与角$\frac{9\pi}{4}$的终边相同的角的表达式中，正确的是（　　）

A．$2k\pi+45^\circ$，$k\in Z$　　　　B．$k\cdot 360^\circ+\frac{9\pi}{4}$，$k\in Z$

C．$k\cdot 360^\circ-315^\circ$，$k\in Z$　　　　D．$k\pi+\frac{5\pi}{4}$，$k\in Z$

**例 2**．（2023·全国·高三专题练习）若角$\alpha$的终边在直线$y=-x$上，则角$\alpha$的取值集合为（　　）

A．$\left\{\alpha\left|\alpha=2k\pi-\frac{\pi}{4},k\in\mathbf{Z}\right.\right\}$　　　　B．$\left\{\alpha\left|\alpha=2k\pi+\frac{3\pi}{4},k\in\mathbf{Z}\right.\right\}$

C．$\left\{\alpha\left|\alpha=k\pi-\frac{3\pi}{4},k\in\mathbf{Z}\right.\right\}$　　　　D．$\left\{\alpha\left|\alpha=k\pi-\frac{\pi}{4},\quad k\in\mathbf{Z}\right.\right\}$

**例 3**．（2023·上海市嘉定区第二中学高一阶段练习）设集合

$A=\{\alpha|\alpha=45^\circ+k\cdot 180^\circ,k\in Z\}\cup\{\alpha|\alpha=135^\circ+k\cdot 180^\circ,k\in Z\}$，集合$B=\{\beta|\beta=45^\circ+k\cdot 90^\circ,k\in Z\}$，则（　　）

A．$A\cap B=\varnothing$　　B．$A\subsetneqq B$　　C．$B\subsetneqq A$　　D．$A=B$

**（多选题）例 4**．（2023·全国·高三专题练习）如果角$\alpha$与角$\gamma+45^\circ$的终边相同，角$\beta$与$\gamma-45^\circ$的终边相同，那么$\alpha-\beta$的可能值为（　　）

A．$90^\circ$　　B．$360^\circ$　　C．$450^\circ$　　D．$2330^\circ$

**（多选题）例 5**．（2023·全国·高三专题练习）下列条件中，能使$\alpha$和$\beta$的终边关于$y$轴对称的是（　　）

A．$\alpha+\beta=90^\circ$　　　　B．$\alpha+\beta=180^\circ$

C．$\alpha+\beta=k\cdot 360^\circ+90^\circ(k\in\mathbf{Z})$　　　　D．$\alpha+\beta=(2k+1)\cdot 180^\circ(k\in\mathbf{Z})$

**例 6**．（2023·全国·高三专题练习）写出两个与$-\frac{11}{3}\pi$终边相同的角__________.

**【方法技巧与总结】**

（1）终边相同的角的集合的表示与识别可用列举归纳法和双向等差数列的方法解决．

（2）注意正角、第一象限角和锐角的联系与区别，正角可以是任一象限角，也可以是坐标轴角；锐角是正角，也是第一象限角，第一象限角不包含坐标轴角．

**题型二：等分角的象限问题**

**例 7**．（2023·浙江·高三专题练习）若$\alpha = k\cdot 180^\circ + 45^\circ, k\in Z$，则$\alpha$的终边在（　　）

A．第一、三象限　　　　　　　　　　B．第一、二象限

C．第二、四象限　　　　　　　　　　D．第三、四象限

**例 8**．（2023·全国·高三专题练习（理））角$\alpha$的终边属于第一象限，那么$\dfrac{\alpha}{3}$的终边不可能属于的象限是（　　）

A．第一象限　　　B．第二象限　　　C．第三象限　　　D．第四象限

**例 9**．（2023·全国·高三专题练习）$\theta$是第二象限角，则下列选项中一定为负值的是（　　）

A．$\sin\dfrac{\theta}{2}$　　　B．$\cos\dfrac{\theta}{2}$　　　C．$\sin 2\theta$　　　D．$\cos 2\theta$

**例 10**．（2023·全国·高三专题练习）已知角$\alpha$第二象限角，且$\left|\cos\dfrac{\alpha}{2}\right| = -\cos\dfrac{\alpha}{2}$，则角$\dfrac{\alpha}{2}$是（　　）

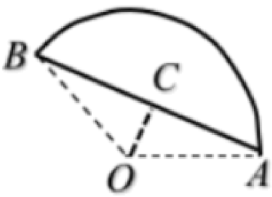
A．第一象限角　　　B．第二象限角　　　C．第三象限角　　　D．第四象限角

**【方法技巧与总结】**

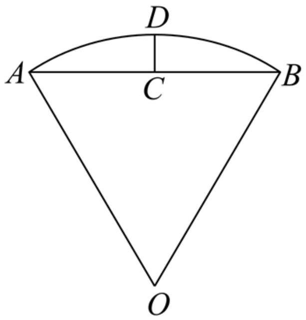
先从$\alpha$的范围出发，利用不等式性质，具体有：(1）双向等差数列法；(2）$\dfrac{\alpha}{n}$的象限分布图示.

**题型三：弧长与扇形面积公式的计算**

**例 11**．（2023·浙江·镇海中学模拟预测）《九章算术》是中国古代的数学名著，其中《方田》章给出了弧田面积的计算公式．如图所示，弧田是由圆弧$AB$及其所对弦$AB$围成的图形．若弧田的弦$AB$长是 2，弧所在圆心角的弧度数也是 2，则弧田的弧$AB$长为_______，弧田的面积为_________.

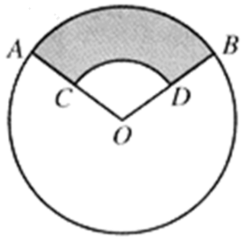


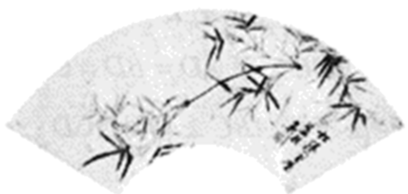

**例 12**．（2023·全国·高考真题（理））沈括的《梦溪笔谈》是中国古代科技史上的杰作，其中收录了计算圆弧长度的"会圆术"，如图，$\overset{\frown}{AB}$是以$O$为圆心，$OA$为半径的圆弧，$C$是$AB$的中点，$D$在$\overset{\frown}{AB}$上，$CD\perp AB$．"会圆术"给出$\overset{\frown}{AB}$的弧长的近似值$s$的计算公式：$s = AB + \dfrac{CD^2}{OA}$．当$OA = 2, \angle AOB = 60^\circ$时，$s =$（　　）




A．$\frac{11-3\sqrt{3}}{2}$　　　B．$\frac{11-4\sqrt{3}}{2}$　　　C．$\frac{9-3\sqrt{3}}{2}$　　　D．$\frac{9-4\sqrt{3}}{2}$

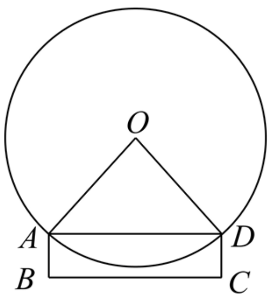
**例 13**．（2023·全国·高三专题练习）中国传统扇文化有着极其深厚的底蕴.按如下方法剪裁，扇面形状较为美观.从半径为$r$的圆面中剪下扇形$OAB$，使剪下扇形$OAB$后所剩扇形的弧长与圆周长的比值为$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，再从扇形$OAB$中剪下扇环形$ABDC$制作扇面，使扇环形$ABDC$的面积与扇形$OAB$的面积比值为$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.则一个按上述方法制作的扇环形装饰品（如图）的面积与圆面积的比值为（　　）



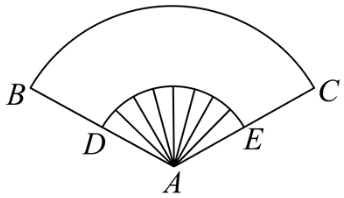



A．$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$　　　B．$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$　　　C．$\frac{3-\sqrt{5}}{2}$　　　D．$\sqrt{5}-2$

**例 14**．（2023·浙江·赫威斯育才高中模拟预测）“圆材埋壁”是我国古代的数学著作《九章算术》中的一个问题，现有一个“圆材埋壁”的模型，其截面如图所示，若圆柱形材料的底面半径为 1，截面圆圆心为$O$，墙壁截面$ABCD$为矩形，且$AD=1$，则扇形$OAD$的面积是__________.




**例 15**．（2023·全国·模拟预测）炎炎夏日，在古代人们乘凉时习惯用的纸叠扇可看作是从一个圆面中剪下的扇形加工制作而成.如图，扇形纸叠扇完全展开后，扇形$ABC$的面积$S$为$225\pi^2\text{cm}^2$，若$BD=2DA$，则当该纸叠扇的周长$C$最小时，$BD$的长度为___________cm.




**例 16**．（2023·全国·高三专题练习）已知扇形的周长为 4 cm，当它的半径为________ cm 和圆心角为________弧度时，扇形面积最大，这个最大面积是________ $cm^2$.

**【方法技巧与总结】**

（1）熟记弧长公式：$l=|\alpha|r$，扇形面积公式：$S_{扇形}=\frac{1}{2}lr=\frac{1}{2}|\alpha|r^2$（弧度制$\alpha\in(0,2\pi]$）

（2）掌握简单三角形，特别是直角三角形的解法

**题型四：三角函数定义题**

**例 17**．（2023·广东·深圳市光明区高级中学模拟预测）已知角$\theta$的终边过点$A\left(-1,1\right)$，则$\sin(\frac{\pi}{6}-\theta)=$（　　）

A．$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$　　B．$\frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$　　C．$\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$　　D．$\frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

**例 18**．（2023·河北衡水·高三阶段练习）已知角$\alpha$的终边经过点$\left(-1,\sqrt{3}\right)$，则$\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)+\sin\left(2\alpha-3\pi\right)=$

（　　）

A．$\frac{3}{2}$　　B．$-\frac{3}{4}$　　C．$-\frac{\sqrt{3}}{6}$　　D．$\frac{5\sqrt{3}}{6}$

**例 19**．（2023·湖北武汉·模拟预测）已知角$\alpha$的始边与$x$轴非负半轴重合，终边上一点$P\left(\sin 3,\cos 3\right)$，若$0\le\alpha\le 2\pi$，则$\alpha=$（　　）

A．3　　B．$\frac{\pi}{2}-3$　　C．$\frac{5\pi}{2}-3$　　D．$3-\frac{\pi}{2}$

**例 20**．（2023·北京·二模）已知角$\alpha$的终边经过点$P\left(-\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)$，则$\sin 2\alpha=$（　　）

A．$-\frac{24}{25}$　　B．$-\frac{7}{25}$　　C．$\frac{7}{25}$　　D．$\frac{24}{25}$

**【方法技巧与总结】**

任意角的正弦、余弦、正切的定义；

**题型五：象限符号与坐标轴角的三角函数值**

**例 21**．（2023·全国·高三专题练习）如果$\cos\theta<0$，且$\tan\theta<0$，则$\left|\sin\theta-\cos\theta\right|+\cos\theta$的化简为_____.

**例 22**．（2023·河北·石家庄二中模拟预测）若角$\alpha$满足$\sin\alpha\cdot\cos\alpha<0$，$\cos\alpha-\sin\alpha<0$，则$\alpha$在（　　）

A．第一象限　　B．第二象限　　C．第三象限　　D．第四象限

**例 23**．（2023·浙江·模拟预测）已知$\theta\in R$，则“$\cos\theta>0$”是“角$\theta$为第一或第四象限角”的（　　）

A．充分不必要条件　B．必要不充分条件　C．充要条件　　D．既不充分又不必要

**例 24**．（2023·重庆·高三开学考试）若$\tan\theta>0$，则下列三角函数值为正值的是（　　）

A．$\sin\theta$　　B．$\cos\theta$　　C．$\sin2\theta$　　D．$\cos2\theta$

**例 25**．（2023·全国·高三专题练习（理））我们知道，在直角坐标系中，角的终边在第几象限，这个角就是第几象限角．已知点$P(\cos\alpha,\tan\alpha)$在第三象限，则角$\alpha$的终边在（　　）

A．第一象限　　B．第二象限　　C．第三象限　　D．第四象限

**例 26**．（2023·全国·高三专题练习（理））已知$\sin\alpha>0,\cos\alpha<0$，则（　　）

A．$\sin2\alpha>0$　　B．$\cos2\alpha<0$　　C．$\tan\frac{\alpha}{2}>0$　　D．$\sin\frac{\alpha}{2}<0$

**例 27**．（2023·江西南昌·三模（文））若角$\alpha$的终边不在坐标轴上，且$\sin\alpha+2\cos\alpha=2$，则$\tan\alpha=($　　$)$

A．$\frac{4}{3}$　　B．$\frac{3}{4}$　　C．$\frac{2}{3}$　　D．$\frac{3}{2}$

**例 28**．（2023·全国·高三专题练习（理））若$\alpha$是第二象限角，则下列不等式正确的是（　　）

A．$\cos(-\alpha)>0$　　B．$\tan\frac{\alpha}{2}>0$　　C．$\sin2\alpha>0$　　D．$\sin(-\alpha)>0$

**【方法技巧与总结】**

正弦函数值在第一、二象限为正，第三、四象限为负；.

余弦函数值在第一、四象限为正，第二、三象限为负；.

正切函数值在第一、三象限为正，第二、四象限为负.

**题型六：同角求值—条件中出现的角和结论中出现的角是相同的**

**例 29**．（2023·安徽·合肥市第八中学模拟预测（文））若$\tan\theta=-2$，则$\frac{\sin2\theta}{\cos^2\theta+1}$的值为___________.

**例 30**．（2023·河北·沧县中学模拟预测）已知$\tan\alpha=3$，则$\frac{\sin2\alpha-2\sin^2\alpha}{\cos2\alpha-\cos^2\alpha}=$___________.

**例 31**．（2023·广东惠州·一模）已知$\tan\alpha=2$，$\pi<\alpha<\frac{3}{2}\pi$，则$\cos\alpha-\sin\alpha=$（　　）

A．$\frac{\sqrt{5}}{5}$　　B．$-\frac{\sqrt{5}}{5}$　　C．$\frac{3\sqrt{5}}{5}$　　D．$-\frac{3\sqrt{5}}{5}$

**例 32**．（2023·全国·模拟预测）已知$0<A<\pi$，$\sin A+\cos A=\frac{1}{5}$，则$\frac{1-\sin2A}{1+\cos2A}=$（　　）

A．$\frac{1}{32}$　　B．$\frac{1}{18}$　　C．$\frac{49}{18}$　　D．$\frac{49}{32}$

**例 33**．（2023·海南·模拟预测）已知角$\alpha$为第二象限角，$\tan\alpha=-3$，则$\cos\alpha=$（　　）

A．$-\frac{\sqrt{10}}{10}$　　B．$\frac{\sqrt{10}}{10}$　　C．$-\frac{3\sqrt{10}}{10}$　　D．$\frac{3\sqrt{10}}{10}$

**例 34**．（2023·全国·高三专题练习）已知$\alpha\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$，且$12\sin^2\alpha-5\cos\alpha=9$，则$\cos2\alpha=$（　　）

A. $\frac{1}{3}$　　B. $-\frac{7}{9}$

C. $-\frac{3}{4}$　　D. $\frac{1}{8}$

**例 35**．（2023·全国·高三阶段练习（理））若$\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta-\cos\theta}=2$，则$\frac{\sin\theta(1+\sin 2\theta)}{\sin\theta+\cos\theta}=$（　　）

A. $-\frac{6}{5}$　　B. $-\frac{2}{5}$

C. $\frac{6}{5}$　　D. $\frac{2}{5}$

**例 36**．（2023·广东广州·三模）已知$\sin x+\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$，若$x\in(0,\pi)$，则$\cos 2x$的值为（　　）

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　C. $-\frac{1}{2}$　　D. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

**例 37**．（2023·湖北武汉·模拟预测）已知$\sin\theta+\cos\theta=-\frac{1}{5}$，$\theta\in(0,\pi)$，则$\sin\theta-\cos\theta=$（　　）

A. $\frac{1}{5}$　　B. $-\frac{1}{5}$　　C. $\frac{7}{5}$　　D. $-\frac{7}{5}$

**例 38**．（2023·山西晋中·模拟预测（理））若$\tan\theta=-1$，则$\frac{\cos\theta(1-\sin 2\theta)}{\sin\theta-\cos\theta}$等于（　　）

A. $\frac{1}{2}$　　B. 2　　C. $-1$　　D. $-\frac{1}{3}$

**例 39**．（2023·湖北·模拟预测）已知$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+3\cos(\alpha-\pi)=0$，则$\frac{\sin\alpha-\sin^3\alpha}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}=$（　　）

A. $\frac{3}{5}$　　B. $-\frac{3}{5}$　　C. $\frac{3}{10}$　　D. $-\frac{3}{10}$

**【方法技巧与总结】**

（1）若已知角的象限条件，先确定所求三角函数的符号，再利用三角形三角函数定义求未知三角函数值．

（2）若无象限条件，一般“弦化切”．

**题型七：诱导求值与变形**

**例 40**．（2023·贵州·贵阳一中高三阶段练习（理））若$\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{3}$，则$\cos\left(2\alpha+\frac{2\pi}{3}\right)=$（　　）

A. $\frac{1}{3}$　　B. $-\frac{1}{3}$　　C. $\frac{7}{9}$　　D. $-\frac{7}{9}$

**例 41**．（2023·贵州·贵阳一中模拟预测（文））若$\sin\left(a+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{3}$,则$\cos\left(a+\frac{2\pi}{3}\right)=$（　　）

A．$\frac{1}{3}$　　B．$-\frac{1}{3}$　　C．$\frac{7}{9}$　　D．$-\frac{7}{9}$

**例 42**．（2023·青海·海东市教育研究室一模（理））$\tan(-165°)=$（　　）

A．$-2-\sqrt{3}$　　B．$-2+\sqrt{3}$　　C．$2-\sqrt{3}$　　D．$2+\sqrt{3}$

**例 43**．（2023·安徽·合肥市第八中学模拟预测（文））已知$2\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=0$，则$\tan(p-a)=$（　　）

A．2　　B．—2　　C．$\frac{1}{2}$　　D．$-\frac{1}{2}$

**【方法技巧与总结】**

（1）诱导公式用于角的变换，凡遇到与$\frac{\pi}{2}$整数倍角的和差问题可用诱导公式，用诱导公式可以把任意角的三角函数化成锐角三角函数．

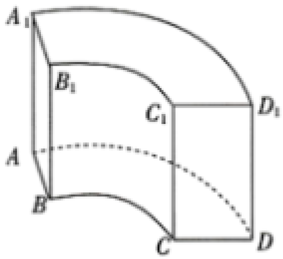
（2）通过$\pm2\pi,\pm\pi,\pm\frac{\pi}{2}$等诱导变形把所给三角函数化成所需三角函数．

（3）$\alpha\pm\beta=\pm2\pi,\pm\pi,\pm\frac{\pi}{2}$等可利用诱导公式把$\alpha,\beta$的三角函数化

**【过关测试】**

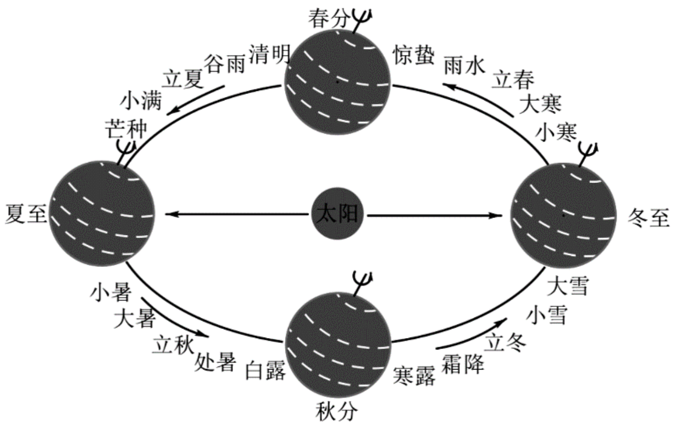
**一、单选题**

1．（2023·宁夏·银川一中模拟预测（理））中国古代数学的瑰宝《九章算术》中记载了一种称为“曲池”的几何体，该几何体是上、下底面均为扇环形的柱体（扇环是指圆环被扇形截得的部分）现有一个如图所示的曲池，$AA_1$垂直于底面，$AA_1=3$，底面扇环所对的圆心角为$\frac{\pi}{2}$，弧$AD$长度是弧$BC$长度的3倍，$CD=2$，则该曲池的体积为（　　）




A．$\frac{9\pi}{2}$　　B．$5\pi$　　C．$\frac{11\pi}{2}$　　D．$6\pi$

2．（2023·海南中学高三阶段练习）二十四节气是中华民族上古农耕文明的产物，是中国农历中表示李节变迁的24个特定节令．如图，每个节气对应地球在黄道上运动$15°$所到达的一个位置．根据描述，从立冬到立春对应地球在黄道上运动所对圆心角的弧度数为（　　）

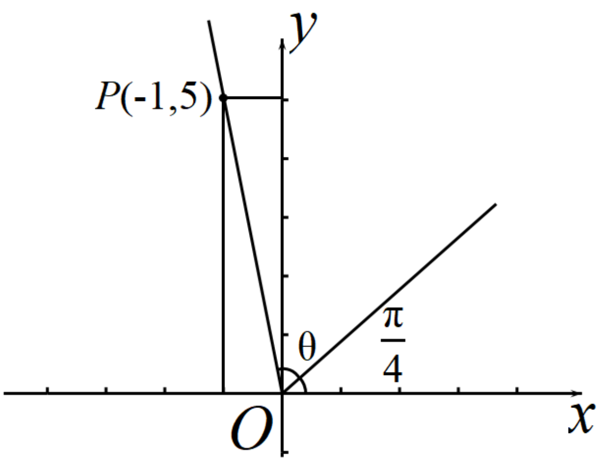



A．$-\frac{\pi}{3}$　　B．$\frac{\pi}{2}$　　C．$\frac{5\pi}{12}$　　D．$\frac{\pi}{3}$

3．（2023·河北·模拟预测）已知圆锥的母线长为2，其侧面展开图是圆心角等于$\frac{2\pi}{3}$的扇形，则该圆锥的体积为（　　）

A．$\frac{16\sqrt{2}\pi}{27}$　　B．$\frac{16\pi}{27}$　　C．$\frac{16\sqrt{2}\pi}{81}$　　D．$\frac{16\pi}{81}$

4．（2023·福建省福州格致中学模拟预测）已知角$\theta$的大小如图所示，则$\frac{1+\sin 2\theta}{\cos 2\theta}=$（　　）




A．$-5$　　B．$5$　　C．$-\frac{1}{5}$　　D．$\frac{1}{5}$

5．（2023·江西·临川一中模拟预测（文））$\tan 195°=$（　　）

A．$-2-\sqrt{3}$　　B．$-2+\sqrt{3}$　　C．$2-\sqrt{3}$　　D．$2+\sqrt{3}$

6．（2023·江苏·南京市天印高级中学模拟预测）若$\frac{1+\sin 2\alpha}{1-2\sin^2\alpha}=5$，则$\tan\alpha=$（　　）

A．$-\frac{2}{3}$　　B．$-\frac{3}{2}$

C．$\frac{2}{3}$　　D．$\frac{3}{2}$

7．（2023·四川成都·模拟预测（文））已知向量$\vec{a}=(3\cos 2\alpha,\sin\alpha)$，$\vec{b}=(2,\cos\alpha+5\sin\alpha)$，$\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，若$\vec{a}\perp\vec{b}$，则$\tan\alpha=$（　　）

A．2　　B．-2　　C．3　　D．$\frac{3}{4}$

8．（2023·黑龙江·哈九中模拟预测（文））数学家华罗庚倡导的“0.618 优选法”在各领域都应用广泛，0.618 就是黄金分割比$m=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$的近似值，黄金分割比还可以表示成$2\sin 18°$，则$\frac{2m\sqrt{4-m^2}}{2\cos^2 27°-1}$（　　）.

A．4　　B．$\sqrt{5}+1$　　C．2　　D．$\sqrt{5}-1$

**二、多选题**

9．（2023·全国·高三专题练习）下列说法正确的有（　　）

A．经过 30 分钟，钟表的分针转过$\pi$弧度

B．$1°=\frac{180}{\pi}\text{rad}$

C．若$\sin\theta>0$，$\cos\theta<0$，则$\theta$为第二象限角

D．若$\theta$为第二象限角，则$\frac{\theta}{2}$为第一或第三象限角

10．（2023·全国·高三专题练习）中国传统折扇文化有着极其深厚的底蕴，一般情况下，折扇可看作是从一个圆面中剪下的扇形制作而成，设扇形（如图）的面积为$S_1$，圆心角为$\alpha_1$，圆面中剩余部分的面积为$S_2$，圆心角为$\alpha_2$，当$S_1$与$S_2$的比值为$\frac{\sqrt{5}-1}{2}\approx 0.618$（黄金分割比）时，折扇看上去较为美观，那么（　　）

A．$\alpha_1=127.5°$　　B．$\alpha_1=137.5°$　　C．$\alpha_2=(\sqrt{5}-1)\pi$　　D．$\frac{\alpha_1}{\alpha_2}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

11．（2023·江苏·高三专题练习）已知$-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$，且$\sin\theta+\cos\theta=a$，其中$a\in(0，1)$，则关于$\tan\theta$的值，在以下四个答案中，不可能是（　　）

A．$-3$　　B．3 或$\frac{1}{3}$　　C．$-\frac{1}{3}$　　D．$-3$ 或$-\frac{1}{3}$

12．（2023·全国·高三专题练习）（多选）给出下列四个结论，其中正确的结论是（　　）

A．$\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha$成立的条件是角$\alpha$是锐角

B．若$\cos(n\pi-\alpha)=\frac{1}{3}$（$n\in Z$），则$\cos\alpha=\frac{1}{3}$

C．若$\alpha\neq\frac{k\pi}{2}$（$k\in Z$），则$\tan\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\frac{-1}{\tan\alpha}$

D．若$\sin\alpha+\cos\alpha=1$，则$\sin^n\alpha+\cos^n\alpha=1$

**三、填空题**

13．（2023·山东·德州市教育科学研究院二模）已知角 $\theta$ 的终边过点 $A(3,y)$，且 $\sin\left(\pi+\theta\right)=\frac{4}{5}$，则 $\tan\theta$=____________.

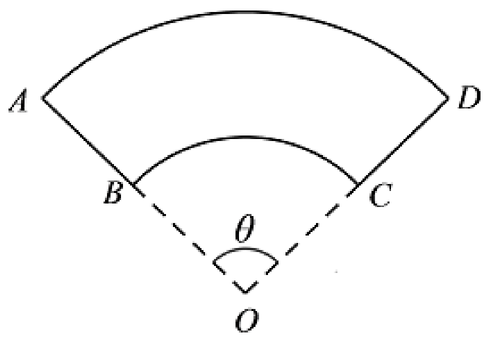
14．（2023·福建·莆田二中模拟预测）在平面直角坐标系 $xOy$ 中，圆 $O$ 与 $x$ 轴的正半轴交于点 $A$，点 $B$，$C$ 在圆 $O$ 上，若射线 $OB$ 平分 $\angle AOC$，$B$（$\frac{3}{5}$，$\frac{4}{5}$），则点 $C$ 的横坐标为___________.

15．（2023·全国·模拟预测）已知 $\alpha$ 为第三象限角，且 $\tan\alpha=2$，则 $\dfrac{\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}=$______.

16．（2023·浙江·镇海中学模拟预测）已知函数 $f(x)=\frac{1}{x+1}$，点 $O$ 为坐标原点，点 $A_n(n,f(n))\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$，向量 $\vec{i}=(0,1)$，$\theta_n$ 是向量 $\overrightarrow{OA_n}$ 与 $\vec{i}$ 的夹角，则 $\frac{\cos\theta_1}{\sin\theta_1}+\frac{\cos\theta_2}{\sin\theta_2}+\cdots+\frac{\cos\theta_{2022}}{\sin\theta_{2022}}$ 的值为______.

**四、解答题**

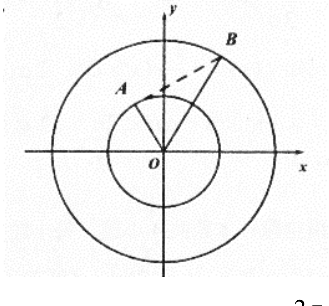
17．（2023·浙江·高三专题练习）某企业欲做一个介绍企业发展史的铭牌，铭牌的截面形状是如图所示的扇形环面（由扇形 $OAD$ 挖去扇形 $OBC$ 后构成的）.已知 $OA=10$，$OB=x\left(0<x<10\right)$，线段 $BA$，$CD$ 与 $\overset{\frown}{BC}$，$\overset{\frown}{AD}$ 的长度之和为 30，圆心角为 $\theta$ 弧度.




(1)求 $\theta$ 关于 $x$ 的函数表达式；

(2)记铭牌的截面面积为 $y$，试问 $x$ 取何值时，$y$ 的值最大？并求出最大值.

18．（2023·江西南昌·一模（理））已知圆心在坐标原点的两个同心圆的半径分别为 1 和 2，点 A 和点 $B$ 分别从初始位置 $\left(1,0\right)$ 和 $\left(2,0\right)$ 处，按逆时针方向以相同速率同时作圆周运动.




(1)当点 A 运动的路程为 $\frac{2\pi}{3}$ 时，求线段 $AB$ 的长度；

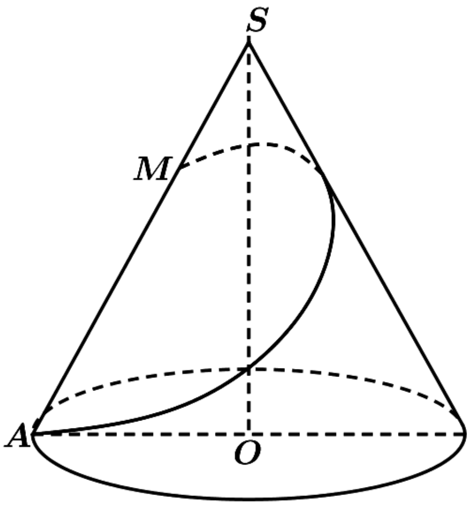
(2)记 $A\left(x_1, y_1\right)$，$B\left(x_2, y_2\right)$，求 $x_1+y_2$ 的最大值.

19．（2023·全国·高三专题练习）已知角 $\alpha=-920^{\circ}$．

（Ⅰ）把角 $\alpha$ 写成 $2k\pi+\beta$（$0 \leq \beta<2\pi, k \in Z$）的形式，并确定角 $\alpha$ 所在的象限；

（Ⅱ）若角 $\gamma$ 与 $\alpha$ 的终边相同，且 $\gamma \in(-4\pi,-3\pi)$，求角 $\gamma$．

20．（2023·全国·高三专题练习）如图所示，已知圆锥 SO 中，底面半径 r=1，母线长 $l$=4，M 为母线 SA 上的一个点，且 SM=x，从点 M 拉一根绳子，围绕圆锥侧面转到点 A．求：




(1)绳子的最短长度的平方 f(x).

(2)绳子最短时，顶点到绳子的最短距离.

(3)f(x)的最大值.

21．（2023·浙江·高三专题练习）已知 $f(\alpha)=\dfrac{\sin(3\pi-\alpha)\cos\left(\alpha+\dfrac{3\pi}{2}\right)\cos(-\alpha-\pi)}{\sin(\alpha+\pi)\tan(-\alpha+\pi)}$.

（1）化简 $f(\alpha)$；

（2）若角 $\alpha$ 的终边经过点 $P(-6,-8)$，求 $f(\alpha)$.

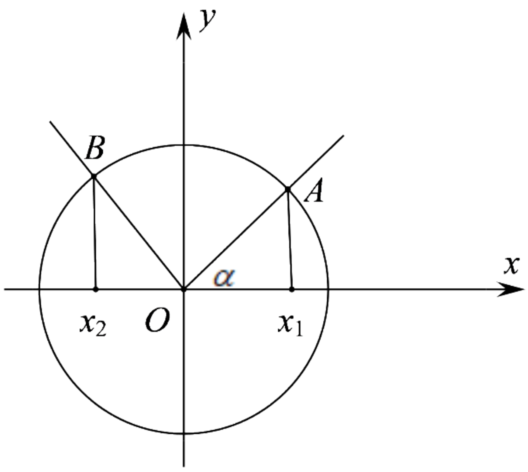
22．（2023·全国·高三专题练习）（1）已知 $P\left(-1,2\sqrt{2}\right)$ 是角 $\theta$ 终边上一点，求 $\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ 的值；

（2）已知 $\dfrac{\tan\alpha}{\tan\alpha-1}=-1$，求下列各式的值：

①$\dfrac{\sin\alpha-3\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}$；

②$\sin^2\alpha+\sin\alpha\cdot\cos\alpha+2\cos^2\alpha$.

23．（2023·安徽师范大学附属中学模拟预测（理））已知角$\alpha$的始边与$x$轴的非负半轴重合，终边与单位圆$O$交于点A $(x_1,y_1)$，将射线$OA$按逆时针方向旋转$\dfrac{2\pi}{3}$后与单位圆$O$交于点$B$ $(x_2,y_2)$，$f(\alpha)=x_1-x_2$.




(1)若角$\alpha$为锐角，求$f(\alpha)$的取值范围；

(2)在$\triangle ABC$中，$a,b,c$分别是角$A,B,C$的对边，若$f(A)=\dfrac{3}{2},c=3$，$\triangle ABC$的面积为$3\sqrt{3}$，求$a$的值.

# 专题 17  三角函数概念与诱导公式

**【考点预测】**

**知识点一：三角函数基本概念**

1．角的概念

(1)任意角：①定义：角可以看成平面内一条射线绕着端点从一个位置旋转到另一个位置所成的图形；

②分类：角按旋转方向分为正角、负角和零角．

(2)所有与角$\alpha$终边相同的角，连同角$\alpha$在内，构成的角的集合是$S=\{\beta|\beta=k\cdot360^\circ+\alpha,k\in Z\}$.

(3)象限角：使角的顶点与原点重合，角的始边与$x$轴的非负半轴重合，那么，角的终边在第几象限，就说这个角是第几象限角；如果角的终边在坐标轴上，就认为这个角不属于任何一个象限．

(4)象限角的集合表示方法：

象限角的集合

- 第一象限角: $\{\alpha|2k\pi<\alpha<2k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\}$
- 第二象限角: $\{\alpha|2k\pi+\frac{\pi}{2}<\alpha<2k\pi+\pi,k\in\mathbf{Z}\}$
- 第三象限角: $\{\alpha|2k\pi+\pi<\alpha<2k\pi+\frac{3\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\}$
- 第四象限角: $\{\alpha|2k\pi+\frac{3\pi}{2}<\alpha<2k\pi+2\pi,k\in\mathbf{Z}\}$

2．弧度制

(1)定义：把长度等于半径长的弧所对的圆心角叫做 1 弧度的角，用符号 rad 表示，读作弧度．正角的弧度数是一个正数，负角的弧度数是一个负数，零角的弧度数是 0．

(2)角度制和弧度制的互化：$180^\circ=\pi\,\text{rad}$ ,$1^\circ=\frac{\pi}{180}\text{rad}$ ,$1\text{rad}=\frac{180^\circ}{\pi}$ .

(3)扇形的弧长公式：$l=|\alpha|\cdot r$，扇形的面积公式：$S=\frac{1}{2}lr=\frac{1}{2}|\alpha|\cdot r^2$ .

3．任意角的三角函数

(1) 定义：任意角 α 的终边与单位圆交于点 $P(x，y)$ 时，则 $\sin\alpha=y$， $\cos\alpha=x$，$\tan\alpha=\frac{y}{x}(x\neq0)$ .

(2)推广：三角函数坐标法定义中，若取点 P $P(x，y)$ 是角 α 终边上异于顶点的任一点，设点$P$到原点$O$的距离为$r$，则$\sin\alpha=\frac{y}{r}$， $\cos\alpha=\frac{x}{r}$， $\tan\alpha=\frac{y}{x}(x\neq0)$

三角函数的性质如下表：

| 三角函数 | 定义域 | | | | |
|---|---|---|---|---|---|

| | | 第一象限符号 | 第二象限符号 | 第三象限符号 | 第四象限符号 |
|---|---|---|---|---|---|
| $\sin\alpha$ | $R$ | + | + | − | − |
| $\cos\alpha$ | $R$ | + | − | − | + |
| $\tan\alpha$ | $\{\alpha\mid\alpha\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2},k\in Z\}$ | + | − | + | − |

记忆口诀:三角函数值在各象限的符号规律:一全正、二正弦、三正切、四余弦.

**4．三角函数线**

如下图，设角 α 的终边与单位圆交于点 P，过 P 作 PM⊥x 轴，垂足为 M，过 A(1,0)作单位圆的切线与 α 的终边或终边的反向延长线相交于点 T.

| | |
|---|---|
| 三角函数线 | 有向线段 MP 为正弦线；有向线段 OM 为余弦线；有向线段 AT 为正切线 |

**知识点二：同角三角函数基本关系**

**1．同角三角函数的基本关系**

(1)平方关系：$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$.

(2)商数关系：$\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\tan\alpha(\alpha\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi)$；

**知识点三：三角函数诱导公式**

| 公式 | 一 | 二 | 三 | 四 | 五 | 六 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 角 | $2k\pi+\alpha(k\in Z)$ | $\pi+\alpha$ | $-\alpha$ | $\pi-\alpha$ | $\dfrac{\pi}{2}-\alpha$ | $\dfrac{\pi}{2}+\alpha$ |
| 正弦 | $\sin\alpha$ | $-\sin\alpha$ | $-\sin\alpha$ | $\sin\alpha$ | $\cos\alpha$ | $\cos\alpha$ |
| 余弦 | $\cos\alpha$ | $-\cos\alpha$ | $\cos\alpha$ | $-\cos\alpha$ | $\sin\alpha$ | $-\sin\alpha$ |
| 正切 | $\tan\alpha$ | $\tan\alpha$ | $-\tan\alpha$ | $-\tan\alpha$ | | |
| 口诀 | 函数名不变，符号看象限 | | | | 函数名改变，符号看象限 | |

【记忆口诀】奇变偶不变，符号看象限，说明：（1）先将诱导三角函数式中的角统一写作$n\cdot\dfrac{\pi}{2}\pm\alpha$；（2）无论有多大，一律视为锐角，判断$n\cdot\dfrac{\pi}{2}\pm\alpha$所处的象限，并判断题设三角函数在该象限的正负;（3）当$n$为奇数是，“奇变”，正变余，余变正;当$n$为偶数时，“偶不变”函数名保持不变即可.

**【方法技巧与总结】**

1．利用$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$可以实现角$\alpha$的正弦、余弦的互化，利用$\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\tan\alpha$可以实现角$\alpha$的弦切互化.

2．“$\sin\alpha+\cos\alpha$，$\sin\alpha\cos\alpha$，$\sin\alpha-\cos\alpha$”方程思想知一求二.

$$(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha = 1 + \sin 2\alpha$$

$(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha=1-\sin 2\alpha$

$(\sin\alpha+\cos\alpha)^2+(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=2$

**【题型归纳目录】**



**【典例例题】**

**题型一：终边相同的角的集合的表示与区别**

**例 1．**（2023·全国·高三专题练习）与角$\dfrac{9\pi}{4}$的终边相同的角的表达式中，正确的是（　　）

A．$2k\pi+45°$，$k\in Z$　　B．$k\cdot 360°+\dfrac{9\pi}{4}$，$k\in Z$

C．$k\cdot 360°-315°$，$k\in Z$　　D．$k\pi+\dfrac{5\pi}{4}$，$k\in Z$

答案：C

【解析】

分析：

要写出与$\dfrac{9\pi}{4}$的终边相同的角，只要在该角上加$2\pi$的整数倍即可.

【详解】

首先角度制与弧度制不能混用，所以选项$AB$错误；

又与$\dfrac{9\pi}{4}$的终边相同的角可以写成$2k\pi+\dfrac{9}{4}\pi(k\in Z)$，

所以$C$正确.

故选：$C$.

**例 2．**（2023·全国·高三专题练习）若角$\alpha$的终边在直线$y=-x$上，则角$\alpha$的取值集合为（　　）

A．$\left\{\alpha\middle|\alpha=2k\pi-\dfrac{\pi}{4},k\in\mathbf{Z}\right\}$　　B．$\left\{\alpha\middle|\alpha=2k\pi+\dfrac{3\pi}{4},k\in\mathbf{Z}\right\}$

C．$\left\{\alpha\middle|\alpha=k\pi-\dfrac{3\pi}{4},k\in\mathbf{Z}\right\}$　　D．$\left\{\alpha\middle|\alpha=k\pi-\dfrac{\pi}{4},\ k\in\mathbf{Z}\right\}$

答案：D

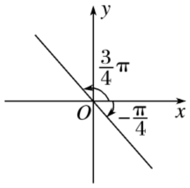
【解析】

分析：

根据若$\alpha,\beta$终边相同，则$\beta=2k\pi+\alpha,k\in Z$求解.

【详解】

解：




，由图知，

角$\alpha$的取值集合为:

$$\left\{\alpha\middle|\alpha=2k\pi+\frac{3\pi}{4},k\in Z\right\}\cup\left\{\alpha\middle|\alpha=2k\pi-\frac{\pi}{4},k\in Z\right\}$$

$$=\left\{\alpha\middle|\alpha=(2k+1)\pi-\frac{\pi}{4},k\in Z\right\}\cup\left\{\alpha\middle|\alpha=2k\pi-\frac{\pi}{4},k\in Z\right\}$$

$$=\left\{\alpha\middle|\alpha=k\pi-\frac{\pi}{4},k\in Z\right\}$$

故选：D.

【点睛】

本题主要考查终边相同的角，还考查了集合的运算能力，属于基础题.

**例 3**．（2023·上海市嘉定区第二中学高一阶段练习）设集合

$A=\{\alpha|\alpha=45°+k\cdot180°,k\in Z\}\cup\{\alpha|\alpha=135°+k\cdot180°,k\in Z\}$，集合

$B=\{\beta|\beta=45°+k\cdot90°,k\in Z\}$，则（　　）

A．$A\cap B=\varnothing$　　B．A □$B$　　C．$B$ □A　　D．$A=B$

答案：D

【解析】

分析：

考虑A中角的终边的位置，再考虑$B$中角的终边的位置，从而可得两个集合的关系.

【详解】

. $\alpha=45°+k\cdot180°,k\in Z$ 表示终边在直线$y=x$上的角，

$\alpha=135°+k\cdot180°,k\in Z$ 表示终边在直线$y=-x$上的角，

而$\beta=45°+k\cdot90°,k\in Z$ 表示终边在四条射线上的角，

四条射线分别是射线$y=x,x\geq0;y=-x,x\leq0;y=x,x\leq0;y=-x,x\geq0$ ，

它们构成直线$y=x$、直线$y=-x$，故$A=B$.

故选：D.

【点睛】

本题考查终边相同的角，注意$k\cdot180°+\alpha$的终边与$\alpha$ 的终边的关系是重合或互为反向延长线，而$k\cdot90°+\alpha$的终边与$\alpha$ 的终边的关系是重合或互为反向延长线或相互垂直，本题属于中档题.

**（多选题）例4．**（2023·全国·高三专题练习）如果角$\alpha$与角$\gamma+45°$的终边相同，角$\beta$与$\gamma-45°$的终边相同，那么$\alpha-\beta$的可能值为（　　）

A．$90°$　　　　B．$360°$　　　　C．$450°$　　　　D．$2330°$

答案：AC

【解析】

根据终边相同可得角与角之间的关系，从而可得$\alpha-\beta$的代数形式，故可得正确的选项.

【详解】

因为角$\alpha$与角$\gamma+45°$的终边相同，故$\alpha=\gamma+45°+k\times360°$，其中$k\in Z$，

同理$\beta=\gamma-45°+k_1\cdot360°$，其中$k_1\in Z$，

故$\alpha-\beta=90°+n\cdot360°$，其中$n\in Z$，

当$n=0$或$n=1$时，$\alpha-\beta=90°$或$\alpha-\beta=450°$，故AC正确，

令$360°=90°+n\cdot360°$，此方程无整数解$n$；

令$2330°=90°+n\cdot360°$即$56=9n$，此方程无整数解$n$；

故BD错误.

故选：AC.

**（多选题）例5．**（2023·全国·高三专题练习）下列条件中，能使$\alpha$和$\beta$的终边关于$y$轴对称的是（　　）

A．$\alpha+\beta=90°$　　　　B．$\alpha+\beta=180°$

C．$\alpha+\beta=k\cdot360°+90°(k\in\mathbf{Z})$　　　　D．$\alpha+\beta=(2k+1)\cdot180°(k\in\mathbf{Z})$

答案：BD

【解析】

分析：

根据$\alpha$和$\beta$的终边关于$y$轴对称时$\alpha+\beta=180°+360°k(k\in\mathbf{Z})$，逐一判断正误即可.

【详解】

根据$\alpha$和$\beta$的终边关于$y$轴对称时$\alpha+\beta=180°+360°k(k\in\mathbf{Z})$可知，

选项B中，$\alpha+\beta=180°$符合题意；选项D中，$\alpha+\beta=(2k+1)\cdot180°(k\in\mathbf{Z})$符合题意；

选项AC中，可取$\alpha=0°,\beta=90°$时显然可见$\alpha$和$\beta$的终边不关于$y$轴对称.

故选：BD.

**例 6**．（2023·全国·高三专题练习）写出两个与$-\frac{11}{3}\pi$终边相同的角___________.

答案：$\frac{\pi}{3}$，$-\frac{5\pi}{3}$(其他正确答案也可)

【解析】

分析：

利用终边相同的角的定义求解.

【详解】

设$\alpha$是与$-\frac{11}{3}\pi$终边相同的角，

则$\alpha=2k\pi-\frac{11\pi}{3},k\in Z$，

令$k=1$，得$\alpha=-\frac{5\pi}{3}$，

令$k=2$，得$\alpha=\frac{\pi}{3}$，

故答案为：$\frac{\pi}{3}$，$-\frac{5\pi}{3}$(其他正确答案也可)

**【方法技巧与总结】**

（1）终边相同的角的集合的表示与识别可用列举归纳法和双向等差数列的方法解决．

（2）注意正角、第一象限角和锐角的联系与区别，正角可以是任一象限角，也可以是坐标轴角；锐角是正角，也是第一象限角，第一象限角不包含坐标轴角．

**题型二：等分角的象限问题**

**例 7**．（2023·浙江·高三专题练习）若$\alpha=k\cdot180^\circ+45^\circ,k\in Z$，则$\alpha$的终边在（　　）

A．第一、三象限　　　　B．第一、二象限

C．第二、四象限　　　　D．第三、四象限

答案：A

【解析】

分析：

分$k=2n+1,n\in Z$和$k=2n,n\in \mathbf{Z}$讨论可得角的终边所在的象限.

【详解】

解：因为$\alpha=k\cdot180^\circ+45^\circ,k\in Z$，所以

当$k=2n+1,n\in Z$时，$\alpha=2n\cdot180^\circ+180^\circ+45^\circ=n\cdot360^\circ+225^\circ,n\in Z$，其终边在第三象限；

当$k=2n,n\in \mathbf{Z}$时，$\alpha=2n\cdot180^\circ+45^\circ=n\cdot360^\circ+45^\circ,n\in Z$，其终边在第一象限.

综上，$\alpha$的终边在第一、三象限.

故选：A.

**例 8**．（2023·全国·高三专题练习（理））角$\alpha$的终边属于第一象限，那么$\frac{\alpha}{3}$的终边不可能属于的象限是（　　）

A．第一象限　　　B．第二象限　　　C．第三象限　　　D．第四象限

答案：D

【解析】

分析：

由题意知，$2k\pi<\alpha<\frac{\pi}{2}+2k\pi$，$k\in Z$，即可得$\frac{\alpha}{3}$的范围，讨论$k=3n$、$k=3n+1$、$k=3n+2$ $(n\in Z)$对应$\frac{\alpha}{3}$的终边位置即可.

【详解】

∵角$\alpha$的终边在第一象限，

∴$2k\pi<\alpha<\frac{\pi}{2}+2k\pi$，$k\in Z$，则$\frac{2k\pi}{3}<\frac{\alpha}{3}<\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3}$，$k\in Z$，

当$k=3n(n\in Z)$时，此时$\frac{\alpha}{3}$的终边落在第一象限，

当$k=3n+1(n\in Z)$时，此时$\frac{\alpha}{3}$的终边落在第二象限，

当$k=3n+2(n\in Z)$时，此时$\frac{\alpha}{3}$的终边落在第三象限，

综上，角$\alpha$的终边不可能落在第四象限，

故选：D.

**例 9**．（2023·全国·高三专题练习）$\theta$是第二象限角，则下列选项中一定为负值的是（　　）

A．$\sin\frac{\theta}{2}$　　　B．$\cos\frac{\theta}{2}$　　　C．$\sin 2\theta$　　　D．$\cos 2\theta$

答案：C

【解析】

表示出第二象限角的范围，求出$2\theta$和$\frac{\theta}{2}$所在象限，确定函数值的符号.

【详解】

因为$\theta$是第二象限角，

所以$2k\pi+\frac{\pi}{2}<\theta<2k\pi+\pi,k\in Z$，

则$4k\pi+\pi<2\theta<4k\pi+2\pi,k\in Z$，

所以 $2\theta$ 为第三或第四象限角或终边在$y$轴负半轴上，，所以 $\sin 2\theta<0$.

而$k\pi+\frac{\pi}{4}<\frac{\theta}{2}<k\pi+\frac{\pi}{2},k\in Z$，$\frac{\theta}{2}$是第一象限或第三象限角，正弦余弦值不一定是负数.

故选：C．

**例 10**．（2023·全国·高三专题练习）已知角$\alpha$第二象限角，且$\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right|=-\cos\frac{\alpha}{2}$，则角$\frac{\alpha}{2}$是（　　）

A．第一象限角　　B．第二象限角　　C．第三象限角　　D．第四象限角

答案：C

【解析】

分析：

由$\alpha$是第二象限角，知$\frac{\alpha}{2}$在第一象限或在第三象限，再由$\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right|=-\cos\frac{\alpha}{2}$，知$\cos\frac{\alpha}{2}\le 0$，由此能判断出$\frac{\alpha}{2}$所在象限．

【详解】

因为角$\alpha$第二象限角,所以$90^\circ+k\cdot 360^\circ<\alpha<180^\circ+k\cdot 360^\circ\left(k\in Z\right)$，

所以$45^\circ+k\cdot 180^\circ<\frac{\alpha}{2}<90^\circ+k\cdot 180^\circ\left(k\in Z\right)$，

当$k$是偶数时，设$k=2n\left(n\in Z\right)$，则$45^\circ+n\cdot 360^\circ<\frac{\alpha}{2}<90^\circ+n\cdot 360^\circ\left(n\in Z\right)$，

此时$\frac{\alpha}{2}$为第一象限角；

当$k$是奇数时，设$k=2n+1\left(n\in Z\right)$，则$225^\circ+n\cdot 360^\circ<\frac{\alpha}{2}<270^\circ+n\cdot 360^\circ\left(n\in Z\right)$，

此时$\frac{\alpha}{2}$为第三象限角.；

综上所述：$\frac{\alpha}{2}$为第一象限角或第三象限角，

因为$\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right|=-\cos\frac{\alpha}{2}$，所以$\cos\frac{\alpha}{2}\le 0$，所以$\frac{\alpha}{2}$为第三象限角．

故选：C．

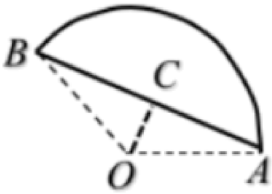
**【方法技巧与总结】**

先从$\alpha$的范围出发，利用不等式性质，具体有：（1）双向等差数列法；（2）$\frac{\alpha}{n}$的象限分布图示．

**题型三：弧长与扇形面积公式的计算**

**例 11**．（2023·浙江·镇海中学模拟预测）《九章算术》是中国古代的数学名著，其中《方田》章给出了弧田面积的计算公式．如图所示，弧田是由圆弧$AB$及其所对弦$AB$围成的图形．若弧田的弦$AB$长是 2，弧所在圆心角的弧度数也是 2，则弧田的弧$AB$

长为________，弧田的面积为__________.




答案：$\dfrac{2}{\sin 1}$；$\dfrac{1}{\sin^2 1}-\dfrac{1}{\tan 1}$.

【解析】

分析：

（1）利用弧长公式解决，那么需要算出半径和圆心角；（2）用扇形的面积减去三角形的面积即可.

【详解】

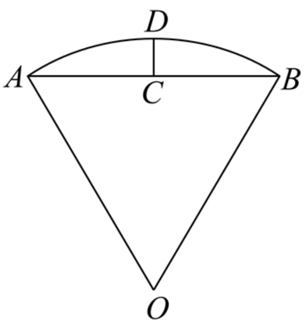
由题意可知：$BC=AC=1, AO=\dfrac{AC}{\sin 1}=\dfrac{1}{\sin 1}, OC=\dfrac{BC}{\tan 1}=\dfrac{1}{\tan 1}$，

所以弧 $AB$ 长$=2\times\dfrac{1}{\sin 1}=\dfrac{2}{\sin 1}$，弧田的面积

$=S_{扇形AOB}-S_{AOB}=\dfrac{1}{2}\times 2\times\left(\dfrac{1}{\sin 1}\right)^2-\dfrac{1}{2}\times 2\times\dfrac{1}{\tan 1}=\dfrac{1}{\sin^2 1}-\dfrac{1}{\tan 1}$，

故答案为：$\dfrac{2}{\sin 1}$；$\dfrac{1}{\sin^2 1}-\dfrac{1}{\tan 1}$.

**例 12**．（2023·全国·高考真题（理））沈括的《梦溪笔谈》是中国古代科技史上的杰作，其中收录了计算圆弧长度的“会圆术”，如图，$\overset{\frown}{AB}$ 是以 $O$ 为圆心，$OA$ 为半径的圆弧，$C$ 是 $AB$ 的中点，$D$ 在 $\overset{\frown}{AB}$ 上，$CD\perp AB$．“会圆术”给出 $\overset{\frown}{AB}$ 的弧长的近似值 $s$ 的计算公式：$s=AB+\dfrac{CD^2}{OA}$．当 $OA=2, \angle AOB=60°$ 时，$s=$（　　）




A．$\dfrac{11-3\sqrt{3}}{2}$　　B．$\dfrac{11-4\sqrt{3}}{2}$　　C．$\dfrac{9-3\sqrt{3}}{2}$　　D．$\dfrac{9-4\sqrt{3}}{2}$

答案：B

【解析】

分析：

连接$OC$，分别求出$AB,OC,CD$，再根据题中公式即可得出答案.

【详解】

解：如图，连接$OC$，

因为$C$是$AB$的中点，

所以$OC\perp AB$，

又$CD\perp AB$，所以$O,C,D$三点共线，

即$OD=OA=OB=2$，

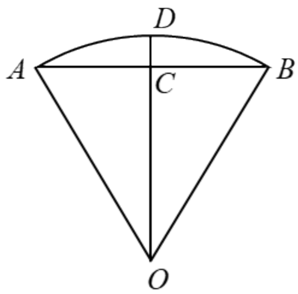
又$\angle AOB=60^{\circ}$，

所以$AB=OA=OB=2$，

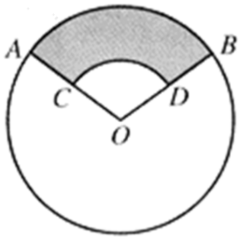
则$OC=\sqrt{3}$，故$CD=2-\sqrt{3}$，

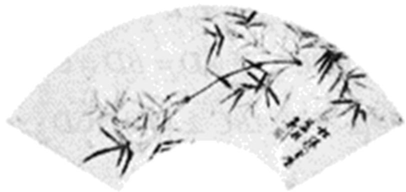
所以$s=AB+\frac{CD^{2}}{OA}=2+\frac{\left(2-\sqrt{3}\right)^{2}}{2}=\frac{11-4\sqrt{3}}{2}$.

故选：B.




**例 13**．（2023·全国·高三专题练习）中国传统扇文化有着极其深厚的底蕴.按如下方法剪裁，扇面形状较为美观.从半径为$r$的圆面中剪下扇形$OAB$，使剪下扇形$OAB$后所剩扇形的弧长与圆周长的比值为$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，再从扇形$OAB$中剪下扇环形$ABDC$制作扇面，使扇环形$ABDC$的面积与扇形$OAB$的面积比值为$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.则一个按上述方法制作的扇环形装饰品（如图）的面积与圆面积的比值为（　　）





A. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$　　C. $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$　　D. $\sqrt{5}-2$

答案：D

【解析】

分析：

记扇形$OAB$的圆心角为$\alpha$，扇形$OAB$的面积为$S_1$，扇环形$ABDC$的面积为$S_2$，圆的面积为S，根据扇形面积公式，弧长公式，以及题中条件，即可计算出结果.

【详解】

记扇形$OAB$的圆心角为$\alpha$，扇形$OAB$的面积为$S_1$，扇环形$ABDC$的面积为$S_2$，圆的面积为S，

由题意可得，$S_1=\frac{1}{2}r^2\alpha$，$\frac{S_2}{S_1}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，$S=\pi r^2$，

所以$\frac{S_2}{S}=\frac{\frac{\sqrt{5}-1}{2}S_1}{\pi r^2}=\frac{\left(\sqrt{5}-1\right)\alpha}{4\pi}$，

因为剪下扇形$OAB$后所剩扇形的弧长与圆周长的比值为$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，

所以$\frac{2\pi r-r\alpha}{2\pi r}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，则$\alpha=\left(3-\sqrt{5}\right)\pi$，

所以$\frac{S_2}{S}=\frac{\left(\sqrt{5}-1\right)\alpha}{4\pi}=\frac{\left(\sqrt{5}-1\right)\left(3-\sqrt{5}\right)\pi}{4\pi}=\frac{3\sqrt{5}-5-3+\sqrt{5}}{4}=\sqrt{5}-2$.

故选：D.

**例 14**.（2023·浙江·赫威斯育才高中模拟预测）“圆材埋壁”是我国古代的数学著作《九章算术》中的一个问题，现有一个“圆材埋壁”的模型，其截面如图所示，若圆柱形材料的底面半径为 1，截面圆圆心为$O$，墙壁截面$ABCD$为矩形，且$AD=1$，则扇形$OAD$的面积是__________.