专题 28.1　解直角三角形与几何综合

典例精析

【典例 1】如图，在Rt△AEB中，$\angle AEB=90°$，点 C 在线段BE的延长线上，过点 C 作$CD\parallel AB$，连接AD，再过点 A 作$AF\perp CD$于点 F；

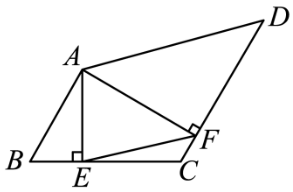


图1

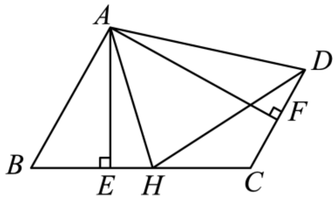


图2

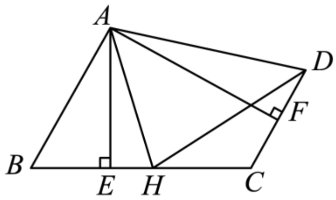


图3

（1）如图 1，连接EF，若$\angle BAE=30°$，$\angle D=45°$，$DF=6$，$AE=4$，求线段EF的长；

（2）如图 2，在线段CE上取一点 H，连接AH、DH，当AH平分$\angle BHD$，$\angle ABH=\angle DAH$时，求证：$DH=HC+2HE$.

（3）如图 3，在（2）的条件下，连接ED，若$AE=12$，$BE=4$，当$(ED+DF)$取得最小值时，请直接写出线段 AH 的长.

【思路点拨】

（1）过点E作$EM\perp AF$于M，利用勾股定理可得$EM=\sqrt{AE^2-AM^2}=2\sqrt{3}$，$EF=\sqrt{EM^2+MF^2}=2\sqrt{7}$；

（2）连接AC，过A作$AW\perp HD$于W，则有$\angle AWH=\angle AWD=90°$，可证Rt△$AHE$≌Rt△$AHW$(HL)，则$HE=HW$，然后可得$A$、$H$、$C$、$D$四点共圆，则可证△$AEC$≌△$AWD$(AAS)，进而问题可求证；

（3）在线段EB上截取$EG=EH$，延长AF交BC的延长线于M，连接AG，AC，DM，可证得△AEG≌△AEH(SAS)，△AGC≌△AHD(SAS)，设$\angle BAE=\alpha$，则$\tan\alpha=\frac{1}{3}$，利用解直角三角形可得$EM=36$，再由勾股定理可得$AM=\sqrt{AE^2+EM^2}=12\sqrt{10}$，作点$E$关于$DM$的对称点$E'$，连接$EE'$，$DE'$，$EE'$交$DM$于$P$，则$DE=DE'$，由于$ED+DF=DE'+DF\geq EF$，故当且仅当$E'$、$D$、$F$三点共线时，$ED+DF=EF$为最小值，过点$E'$作$E'N\perp BC$于$N$，过点$D$作$DK\perp CM$于$K$，应用解直角三角形即可求得答案.

【解题过程】

（1）解：过点E作$EM\perp AF$于M，如图 1，

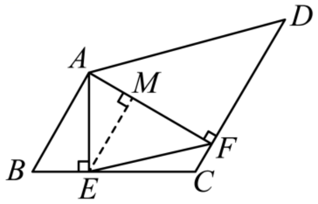


图1

则$\angle AME=\angle EMF=90°$，

$\because AF\perp CD$，$CD\parallel AB$，

$\therefore \angle BAF=\angle AFD=90°$，

$\because \angle BAE=30°$，

$\therefore \angle EAM=60°$，

$\therefore \angle AEM=30°$，

$\because AE=4$，

$\therefore AM=\frac{1}{2}AE=2$，

在$Rt\triangle AEM$中，$EM=\sqrt{AE^2-AM^2}=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}$，

在$Rt\triangle ADF$ 中，$\angle D=45°$，$DF=6$，

$\therefore AF=DF=6$，

$\therefore MF=AF-AM=6-2=4$，

在$Rt\triangle EMF$中，

$EF=\sqrt{EM^2+MF^2}=\sqrt{(2\sqrt{3})^2+4^2}=2\sqrt{7}$，

$\therefore$线段EF的长为$2\sqrt{7}$；

（2）证明：连接AC，过A作$AW\perp HD$于W，如图 2，

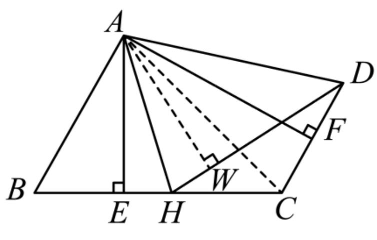


图2

则$\angle AWH=\angle AWD=90°$，

$\because \angle AEB=90°$，

$\therefore \angle AEH=90°$，

$\because AH$平分$\angle BHD$，$AE\perp HB$，$AW\perp HD$，

$\therefore AE=AW$，

在$\mathrm{Rt}\triangle AHE$和$\mathrm{Rt}\triangle AHW$中，

$\begin{cases}AH=AH\\AE=AW\end{cases}$，

$\therefore \mathrm{Rt}\triangle AHE\cong\mathrm{Rt}\triangle AHW(\mathrm{HL})$，

$\therefore HE=HW$，

$\because CD\parallel AB$，

$\therefore \angle ABH+\angle BCD=180°$，

$\because \angle ABH=\angle DAH$，

$\therefore \angle DAH+\angle BCD=180°$，

$\because \angle DAH$与$\angle BCD$在DH异侧，

$\therefore A$、H、C、D四点共圆，

$\therefore \angle ACH=\angle ADW$，

$\because AE=AW$，$\angle AEC=\angle AWD=90°$，

$\therefore \triangle AEC\cong\triangle AWD(\mathrm{AAS})$，

$\therefore EC=WD$，

$\therefore DH=HW+WD=HE+EC=HE+HE+HC$，

即$DH=HC+2HE$；

（3）解：如图 3，在线段EB上截取$EG=EH$，延长AF交BC的延长线于M，连接AG，AC，DM，

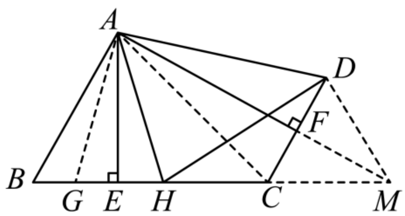


图3

则$CG=HC+2HE$，

由（2）得$DH=HC+2HE$，

$\therefore CG=DH$，

在$\triangle AEG$和$\triangle AEH$中，

$\begin{cases}EG=EH\\\angle AEG=\angle AEH=90°\\AE=AE\end{cases}$，

$\therefore \triangle AEG \cong \triangle AEH(\text{SAS})$，

$\therefore AG = AH$，$\angle AGC = \angle AHE$，

$\because AH$平分$\angle BHD$，

$\therefore \angle AHE = \angle AHD$，

$\therefore \angle AGC = \angle AHD$，

$\therefore \triangle AGC \cong \triangle AHD(\text{SAS})$，

$\therefore AC = AD$，

$\because AF \perp CD$，

$\therefore DF = CF$，

$\therefore DM = CM$，

设$\angle BAE = \alpha$，则$\tan\alpha = \frac{BE}{AE} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$，

$\because \angle BAE + \angle MAE = \angle AME + \angle MAE = 90°$，

$\therefore \angle AME = \angle BAE = \alpha$，

$\therefore \frac{AE}{EM} = \tan M = \frac{1}{3}$，

$\therefore EM = 3AE = 3 \times 12 = 36$，

$\therefore AM = \sqrt{AE^2 + EM^2} = \sqrt{12^2 + 36^2} = 12\sqrt{10}$，

如图 4，作点E关于DM的对称点E'，连接EE'，DE'，EE'交DM于P，

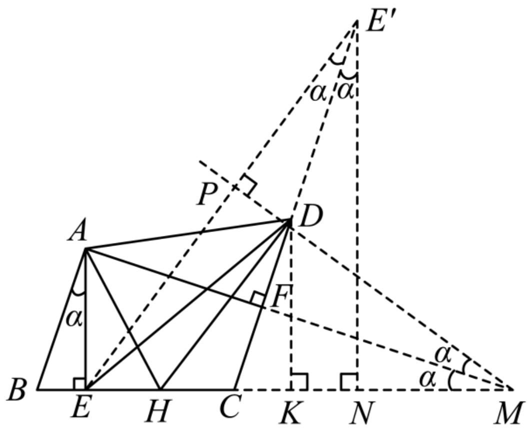


图4

则$DE = DE'$，

$\therefore ED + DF = DE' + DF \geq E'F$，当且仅当$E'$、$D$、$F$三点共线时，$ED + DF = EF$为最小值，

过点E'作$E'N \perp BC$于N，过点D作$DK \perp CM$于K，

则$\angle AMD=\angle CE'E=\angle CE'N=\angle CDK=\angle AME=\alpha$，

设$CF=DF=x$，则$FM=\frac{CF}{\tan\alpha}=3x$，

$\therefore CM=\sqrt{CF^2+FM^2}=\sqrt{x^2+(3x)^2}=\sqrt{10}x$，

$\because \sin\angle DCK=\frac{DK}{CD}=\frac{FM}{CM}$，即$\frac{DK}{2x}=\frac{3x}{\sqrt{10}x}$，

$\therefore DK=\frac{3\sqrt{10}}{5}x$，

$\because \cos\angle DCK=\frac{CK}{CD}=\frac{CF}{CM}$，即$\frac{CK}{2x}=\frac{x}{\sqrt{10}x}$，

$\therefore CK=\frac{\sqrt{10}}{5}x$，

$\therefore MK=CM-CK=\sqrt{10}x-\frac{\sqrt{10}}{5}x=\frac{4\sqrt{10}}{5}x$，

$\therefore \tan2\alpha=\frac{DK}{MK}=\frac{\frac{3\sqrt{10}}{5}x}{\frac{4\sqrt{10}}{5}x}=\frac{3}{4}$，

$\therefore \frac{PE}{PM}=\tan2\alpha=\frac{3}{4}$，

设$PE=3y$，则$PM=4y$，

$\because PE^2+PM^2=EM^2$，

$\therefore (3y)^2+(4y)^2=36^2$，

$\therefore y=\frac{36}{5}$（负值舍去），

$\therefore PE=3\times\frac{36}{5}=\frac{108}{5}$，$PM=4\times\frac{36}{5}=\frac{144}{5}$，

$\therefore EE'=2PE=\frac{216}{5}$，

$\because \sin2\alpha=\frac{EN}{EE'}=\frac{PE}{EM}$，即$\frac{EN}{\frac{216}{5}}=\frac{\frac{108}{5}}{36}$，

$\therefore EN=\frac{648}{25}$，

$\therefore MN=EM-EN=36-\frac{648}{25}=\frac{252}{25}$，

$\therefore E'N=\frac{EN}{\tan2\alpha}=\frac{\frac{648}{25}}{\frac{3}{4}}=\frac{864}{25}$，

$\therefore CN=E'N\cdot\tan\alpha=\frac{864}{25}\times\frac{1}{3}=\frac{288}{25}$，

$\therefore CM=CN+MN=\frac{288}{25}+\frac{252}{25}=\frac{108}{5}$，

$\therefore FM=CM\cdot\cos\alpha=\frac{108}{5}\times\frac{3\sqrt{10}}{10}=\frac{162\sqrt{10}}{25}$，$CF=\frac{1}{3}FM=\frac{54\sqrt{10}}{25}$，

$\therefore AF = AM - FM = 12\sqrt{10} - \frac{162\sqrt{10}}{25} = \frac{138\sqrt{10}}{25}$,

在Rt$\triangle ADF$中，$AD = \sqrt{AF^2 + DF^2} = \sqrt{(\frac{138\sqrt{10}}{25})^2 + (\frac{54\sqrt{10}}{25})^2} = \frac{12\sqrt{61}}{5}$,

$\because \angle DAH = \angle ABH = \angle MAE$，

$\therefore \angle DAH - \angle MAH = \angle MAE - \angle MAH$，

即$\angle DAF = \angle HAE$，

$\therefore \cos\angle DAF = \cos\angle HAE$，

$\therefore \frac{AF}{AD} = \frac{AE}{AH}$，即$\frac{\frac{138\sqrt{10}}{25}}{\frac{12\sqrt{61}}{5}} = \frac{12}{AH}$，

$\therefore AH = \frac{12\sqrt{610}}{23}$.

学霸必刷

1．（2023·辽宁·中考真题）$\triangle ABC$是等边三角形，点E是射线BC上的一点（不与点B，C重合），连接AE，在AE的左侧作等边三角形AED，将线段EC绕点E逆时针旋转$120°$，得到线段EF,连接BF．交DE于点M．

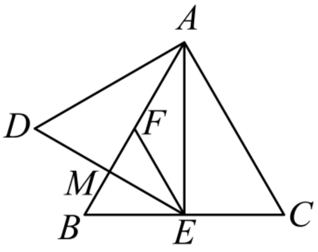


图1

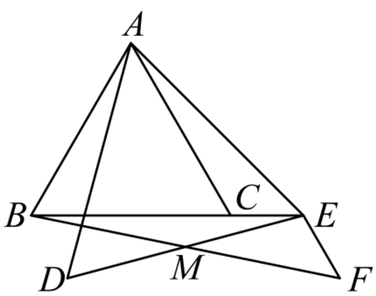
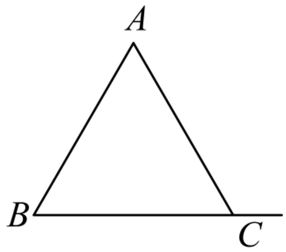


图2



备用图

（1）如图 1，当点E为BC中点时，请直接写出线段DM与EM的数量关系；

（2）如图 2．当点E在线段BC的延长线上时，请判断（1）中的结论是否成立？若成立，请写出证明过程；若不成立，请说明理由；

（3）当$BC = 6$，$CE = 2$时，请直接写出AM的长．

2．（22·23 下·安徽·专题练习）在$\triangle ABC$中，$\angle ACB=90°$，$\frac{AC}{BC}=m$，D是边BC上一点，将$\triangle ABD$沿AD折叠得到$\triangle AED$，连接BE．

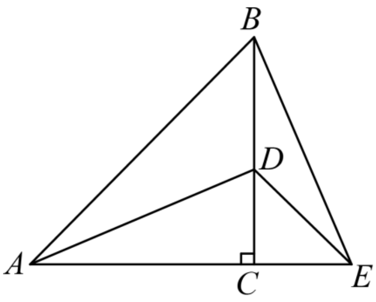


图 1

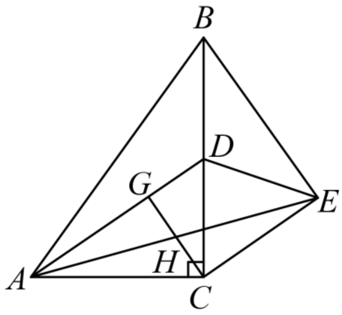


图 2

（1）特例发现：如图 1，当$m=1$，AE落在直线AC上时．

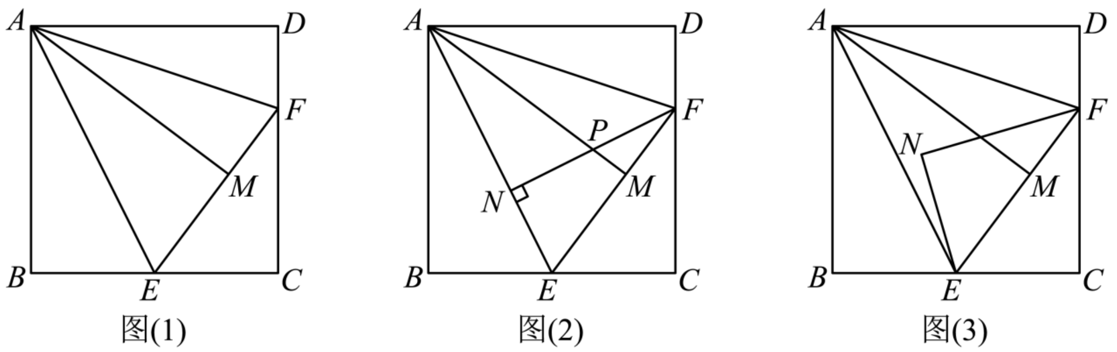
①求证：$\angle DAC=\angle EBC$；

②填空：$\frac{CD}{CE}$的值为____；

（2）类比探究：如图 2，当$m\neq 1$，AE与边BC相交时，在AD上取一点G，使$\angle ACG=\angle BCE$，CG交AE于点H．探究$\frac{CG}{CE}$的值（用含m的式子表示），并写出探究过程；

（3）拓展运用：在（2）的条件下，当$m=\frac{\sqrt{2}}{2}$，D是BC的中点时，若$EB\cdot EH=6$，求CG的长．

3．（22·23·濮阳·一模）数学活动课上，老师组织数学小组的同学们以“正方形折叠”为主题开展数学活动．



【动手实践】

（1）如图（1），已知正方形纸片$ABCD$，数学小组将正方形纸片沿过点A的直线折叠，使点B落在正方形$ABCD$的内部，点B的对应点为点M，折痕为AE，再将纸片沿过点A的直线折叠使AD与AM重合，折痕为AF，易知点E、M、F共线，则$\angle EAF=$_°，EF、BE、DF三条线段的关系为_；

【拓展应用】

（2）解决下面问题：

①如图（2）作$FN\perp AE$于点N，交AM于点P，求证：$\triangle ANP\cong\triangle FNE$；

②如图（3），数学小组在图（1）的基础上进行如下操作：将正方形纸片沿EF继续折叠，点C的对应点为点N，他们发现，当点E的位置不同时，点N的位置也不同，若点N恰好落在$\triangle AEF$边上，$AB=3$，请直接写出此时BE的长度．

4．（22·23下·泉州·模拟预测）已知：如图1，在矩形$ABCD$中，$AB=4$，$AD=6$，点P是AD的中点，点F是AB上的动点，连接FP并延长交CD的延长线于点M，过点P作$PE\perp FM$，交直线BC于点E，连接EF.

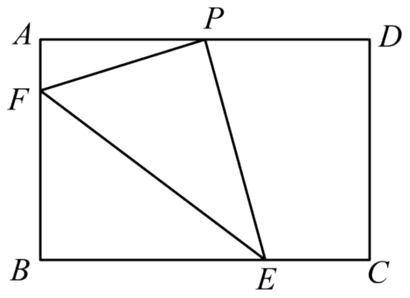


图1

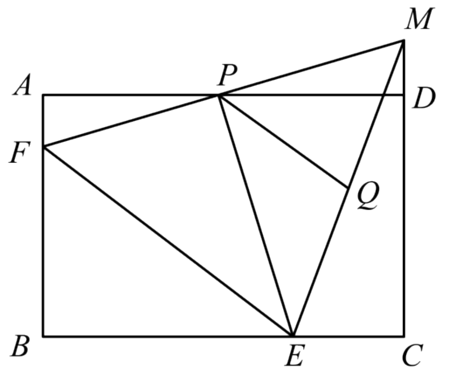


图2

（1）求$\tan\angle PEF$的值；

（2）如图2，连接EM，点Q是EM的中点.

①当$\angle AFP=2\angle BEF$时，求PQ的长；

②点F从A点运动到B点的过程中，求点Q经过的路径长.

5．（2023·江苏镇江·中考真题）【发现】如图 1，有一张三角形纸片ABC，小宏做如下操作：

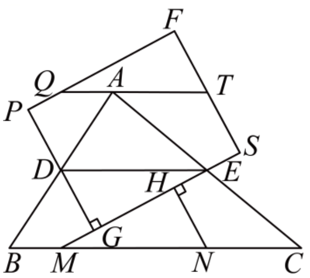


图1

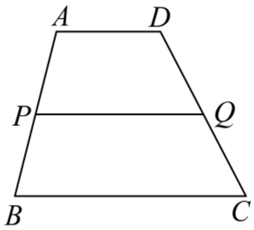


图2

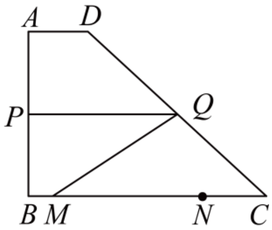


图3

（1）取AB，AC的中点 D，E，在边BC上作$MN=DE$；

（2）连接EM，分别过点 D，N 作$DG\perp EM$，$NH\perp EM$，垂足为 G，H；

（3）将四边形$BDGM$剪下，绕点 D 旋转$180°$至四边形$ADPQ$的位置，将四边形$CEHN$剪下，绕点 E 旋转$180°$至四边形$AEST$的位置；

（4）延长PQ，ST交于点 F．

小宏发现并证明了以下几个结论是正确的：

①点 Q，A，T 在一条直线上；

②四边形$FPGS$是矩形；

③$\triangle FQT\cong\triangle HMN$；

④四边形$FPGS$与$\triangle ABC$的面积相等．

【任务 1】请你对结论①进行证明．

【任务 2】如图 2，在四边形$ABCD$中，$AD\parallel BC$，P，Q 分别是AB，CD的中点，连接PQ．求证：$PQ=\frac{1}{2}$

$(AD+BC)$．

【任务 3】如图 3，有一张四边形纸$ABCD$，$AD\parallel BC$，$AD=2$，$BC=8$，$CD=9$，$\sin\angle DCB=\frac{4}{5}$，小丽分别取$AB$，$CD$的中点 P，Q，在边BC上作$MN=PQ$，连接MQ，她仿照小宏的操作，将四边形$ABCD$分割、拼成了矩形．若她拼成的矩形恰好是正方形，求BM的长．

6．（23·24九年级上·江苏无锡·阶段练习）【基本图形】（1）如图1，在矩形$ABCD$中，$CE \perp BD$于点H，交AD于点E．求证：$\frac{CE}{BD}=\frac{CD}{BC}$；

【类比探究】（2）如图2，在四边形$ABCD$中，$\angle A=\angle B=90°, AD=4$，$BC=9$，$CD=7$．$E$是边$AB$上的一动点，过点$C$作$CG \perp ED$，交$ED$的延长线于点$G$，交$AD$的延长线于点$F$．试探究$\frac{CF}{DE}$是否为定值?若是，请求出$\frac{CF}{DE}$的值；若不是，请说明理由；

【拓展延伸】（3）如图3，在$\mathrm{Rt}\triangle ABD$中，$\angle BAD=90°$，将$\triangle ABD$沿BD翻折得到$\triangle CBD$，点E,F分别在边AB,AD上，连接CF,DE．若$\angle AED=\angle AFC$，且$\frac{CF}{DE}=\frac{3}{5}$，则$\frac{AD}{AB}$的值为______（直接写出结果）．

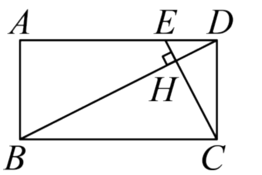


图1

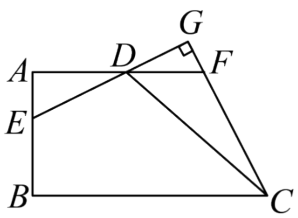


图2

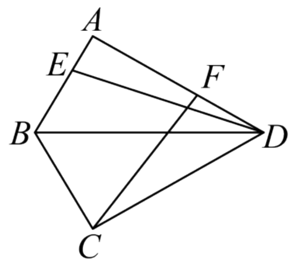


图3

7．（21·22九年级下·辽宁盘锦·期中）如图，在矩形$ABCD$中，$AB=3,BC=5$，BE平分$\angle ABC$交AD于点E．连接CE，点 F 是BE上一动点，过点 F 作$FG\parallel CE$交BC于点 G．将$\triangle BFG$绕点 B 旋转得到$\triangle BF'G'$，

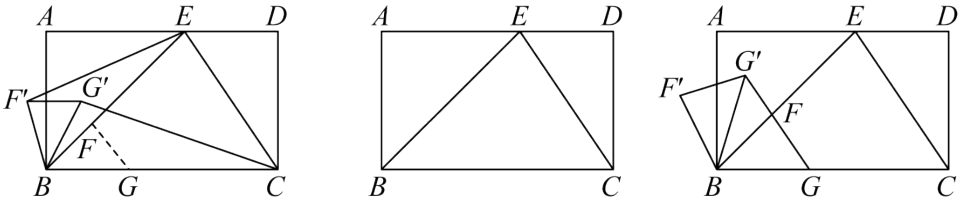


图1　　图2　　图3

（1）如图 1，连接CG',EF'，求证：$\triangle BEF'\backsim\triangle BCG'$；

（2）当点G'恰好落在直线AE上时，若$BF=3$，求EG'的值；

（3）如图 3，连接GG'，当GG'与BE交于点 F 时，猜想FG与FG'的数量关系，并证明．