

导数大题求参归类

目录

- 题型 01 恒成立求参:常规型
- 题型 02 恒成立求参:三角函数型
- 题型 03 恒成立求参:双变量型
- 题型 04 恒成立求参:整数型
- 题型 05 恒成立求参:三角函数型整数
- 题型 06 “能”成立求参:常规型
- 题型 07 “能”成立求参:双变量型
- 题型 08 “能”成立求参:正余弦型
- 题型 09 零点型求参:常规型
- 题型 10 零点型求参:双零点型
- 题型 11 零点型求参:多零点综合型
- 题型 12 同构型求参: x_1, x_2 双变量同构
- 题型 13 虚设零点型求参
- 高考练场

热点题型归纳

题型 01 恒成立求参:常规型

【解题攻略】

利用导数求解参数范围的两种常用方法:

- (1) 分离参数法:将参数和自变量分离开来,构造关于自变量的新函数,研究新函数最值与参数之间的关系,求解出参数范围;
- (2) 分类讨论法:根据题意分析参数的临界值,根据临界值作分类讨论,分别求解出满足题意的参数范围最后取并集.

例 1 (2024 上·北京·高三阶段练习) 设 $a > 0$, 函数 $f(x) = x^a \ln x$.

- (1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;
- (2) 若 $f(x) \leq x$, 求 a 的取值范围;
- (3) 若 $f'(x) \leq 1$, 求 a .

例 2 (2024 上·甘肃武威·高三统考期末) 已知函数 $f(x) = \frac{2x}{e^x} + a\ln(x+1)$.

- (1) 当 $a=0$ 时, 求 $f(x)$ 的最大值;
- (2) 若 $f(x) \leq 0$ 在 $x \in [0, +\infty)$ 上恒成立, 求实数 a 的取值范围.

【变式训练】

题目 1 (2023 上·江苏镇江·高三校考阶段练习) 已知函数 $f(x) = \frac{x^2 - ax}{e^x}$.

- (1) 若 $f(x)$ 在 $(-2, -1)$ 上单调递增, 求实数 a 的取值范围;
- (2) 若 $f(x) \geq \sin x$ 对 $x \in (-\infty, 0]$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围.

题目 2 (2024 上·山西·高三期末) 已知函数 $f(x) = m(x-1)^2 - 2x + 2\ln x$, $m \geqslant 2$.

- (1) 求证: 函数 $f(x)$ 存在单调递减区间, 并求出该函数单调递减区间 (a, b) 的长度 $b - a$ 的取值范围;
- (2) 当 $x \geqslant 1$ 时, $f(x) \leqslant 2xe^{x-1} - 4x$ 恒成立, 求实数 m 的取值范围.

题目 3 (2024·全国·模拟预测) 已知函数 $f(x) = 2x^2 - a\ln x - 1$, $a \in \mathbf{R}$.

- (1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间;
- (2) 若对任意的 $x \in (0, +\infty)$, 不等式 $f(x+1) > (x+1)^2 + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{e^x}$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围.

题型 02 恒成立求参:三角函数型

【解题攻略】

三角函数与导数应用求参:

1. 正余弦的有界性
2. 三角函数与函数的重要放缩公式: $x \geq \sin x (x \geq 0)$.

例 1 (2023·全国·高三专题练习) 已知函数 $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, $g(x) = a \cos x$.

- (1) 求证: $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 时, $f(x) < 1$;
- (2) 当 $x \in (-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2})$ 时, $f(x) > g(x)$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围;
- (3) 当 $x \in (-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2})$ 时, $[f(x)]^2 > g(x)$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围.

例 2 (2023 上·全国·高三期末) 已知函数 $f(x) = e^x \sin x - 2x$.

- (1) 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程;
- (2) 求 $f(x)$ 在区间 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上的最大值;
- (3) 设实数 a 使得 $f(x) + x > ae^x$ 对 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立, 求 a 的最大整数值.

【变式训练】

题目 1 (2023 上·湖北省直辖县级单位·高三校考阶段练习) 已知函数 $f(x) = e^{ax} - 2ax (a \in \mathbf{R}, a \neq 0)$.

- (1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;
- (2) 若不等式 $f(x) \geq \sin x - \cos x + 2 - 2ax$ 对任意 $x \geq 0$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围.

题目 2 (2023 上·甘肃定西·高三甘肃省临洮中学校考阶段练习) 已知函数 $f(x) = e^x - \sin x - \cos x$, $f'(x)$ 为其导函数.

(1) 求 $f(x)$ 在 $[-\pi, +\infty)$ 上极值点的个数;

(2) 若 $f'(x) \geq ax + 2 - 2\cos x (a \in \mathbf{R})$ 对 $\forall x \in [-\pi, +\infty)$ 恒成立, 求 a 的值.

题型 03 恒成立求参:双变量型

【解题攻略】

一般地,已知函数 $y=f(x), x \in [a, b], y=g(x), x \in [c, d]$

- (1) 若 $\forall x_1 \in [a, b], \forall x_2 \in [c, d]$, 总有 $f(x_1) < g(x_2)$ 成立, 故 $f(x)_{\max} < g(x)_{\min}$;
- (2) 若 $\forall x_1 \in [a, b], \exists x_2 \in [c, d]$, 有 $f(x_1) < g(x_2)$ 成立, 故 $f(x)_{\max} < g(x)_{\max}$;
- (3) 若 $\exists x_1 \in [a, b], \forall x_2 \in [c, d]$, 有 $f(x_1) < g(x_2)$ 成立, 故 $f(x)_{\min} < g(x)_{\min}$;
- (4) 若 $\exists x_1 \in [a, b], \exists x_2 \in [c, d]$, 有 $f(x_1) < g(x_2)$ 成立, 故 $f(x)_{\min} < g(x)_{\max}$.

例 1 (2023·四川攀枝花·统考模拟预测) 已知函数 $f(x) = ae^x - x (a \in \mathbf{R})$.

- (1) 当 $a=1$ 时, 求 $f(x)$ 的单调区间;
- (2) 设函数 $g(x) = (x^2-1)e^x - x - f(x)$, 当 $g(x)$ 有两个极值点 $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$ 时, 总有 $\lg(x_2) \geq (2+x_1)(e^{x_2}+x_2^2-3)$ 成立, 求实数 t 的值.

例 2 (2024 上·四川成都·高三成都七中校考阶段练习) 设函数 $f(x) = e^x - ax$, 其中 $a \in \mathbf{R}$.

- (1) 讨论函数 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上的极值;
- (2) 若函数 $f(x)$ 有两零点 $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$, 且满足 $\frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} > 1$, 求正实数 λ 的取值范围.

【变式训练】

题目 1 (2023·上海松江·校考模拟预测) 已知函数 $f(x) = ax - a\ln x - \frac{e^x}{x}$.

- (1) 若 $a = 0$, 求函数 $y = f(x)$ 的极值点;
- (2) 若不等式 $f(x) < 0$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围;
- (3) 若函数 $y = f(x)$ 有三个不同的极值点 x_1, x_2, x_3 , 且 $f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) \leq 3e^2 - e$, 求实数 a 的取值范围.

题目 2 (2023 下·山东德州·高三校考阶段练习) 已知函数 $f(x) = 2\ln\sqrt{x} + \frac{1}{2}(a-x)^2$, 其中 $a \in \mathbf{R}$.

- (1) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性;
- (2) 若 $f(x)$ 存在两个极值点 $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$, $|f(x_2) - f(x_1)|$ 的取值范围为 $(\frac{3}{4} - \ln 2, \frac{15}{8} - 2\ln 2)$, 求 a 的取值范围.

题型 04 恒成立求参:整数型

【解题攻略】

恒成立求参的一般规律

- ① 若 $k \geq f(x)$ 在 $[a, b]$ 上恒成立, 则 $k \geq f(x)_{\max}$;
- ② 若 $k \leq f(x)$ 在 $[a, b]$ 上恒成立, 则 $k \leq f(x)_{\min}$;
- ③ 若 $k \geq f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有解, 则 $k \geq f(x)_{\min}$;
- ④ 若 $k \leq f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有解, 则 $k \leq f(x)_{\max}$;

如果参数涉及到整数, 要注意对应解中相邻两个整数点函数的符号

例 1 (2023 上·湖北·高三校联考阶段练习) 已知 $f(x) = e^x - 2x + a$.

(1) 若 $f(x) \geq 0$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围:

(2) 设 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数, 已知 $e^x + 2\ln x - (e+2)x + 2 \geq 0$ 的解集为 $\{x|x \geq t\}$, 求 $[et]$. (参考数据: $e \approx 2.72$, $\ln 2 \approx 0.69$, $\ln 3 \approx 1.10$)

例 2 (2023 上·浙江·高三校联考阶段练习) 已知函数 $f(x) = ae^{x-2}$, $g(x) = \left(x + \frac{1}{x} + 2\right)\ln x$, $e = 2.71828 \cdots$ 为自然对数底数.

(1) 证明: 当 $x > 1$ 时, $\ln x < \frac{x}{2} - \frac{1}{2x}$;

(2) 若不等式 $f(x) > g(x)$ 对任意的 $x \in (0, +\infty)$ 恒成立, 求整数 a 的最小值.

【变式训练】

题目 1 (2023·江西景德镇·统考一模) 已知函数 $f(x) = \sin x + \sin ax$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$.

(1) 若 $a = 2$, 求函数 $g(x) = f(x) + \sin x$ 值域;

(2) 是否存在正整数 a 使得 $\frac{f(x)}{x} > 3\cos x$ 恒成立? 若存在, 求出正整数 a 的取值集合; 若不存在, 请说明理由.

题目 2 (2023·全国·高三专题练习) 已知函数 $f(x) = 5 + \ln x$, $g(x) = \frac{kx}{x+1}$ ($k \in R$).

(1) 若函数 $f(x)$ 的图象在点 $(1, f(1))$ 处的切线与函数 $y = g(x)$ 的图象相切, 求 k 的值;

(2) 若 $k \in N^*$, 且 $x \in (1, +\infty)$ 时, 恒有 $f(x) > g(x)$, 求 k 的最大值.

(参考数据: $\ln 5 \approx 1.61, \ln 6 \approx 1.7918, \ln(\sqrt{2} + 1) \approx 0.8814$)

题型 05 恒成立求参: 三角函数型整数

例 1 (2020·云南昆明·统考三模) 已知 $f(x) = e^x - 2x - \frac{1}{2}$.

(1) 证明: $f(x) > 0$;

(2) 对任意 $x \geq 1$, $e^{\sin x} + x^2 - ax - 1 - \ln x > 0$, 求整数 a 的最大值.

(参考数据: $\sin 1 \approx 0.8, \ln 2 \approx 0.7$)

例 2 (2020 上·浙江·高三校联考阶段练习) 已知函数 $f(x) = a\sin x + \sin 2x$, $a \in R$.

(1) 若 $a = 2$, 求函数 $f(x)$ 在 $(0, \pi)$ 上的单调区间;

(2) 若 $a = 1$, 不等式 $f(x) \geqslant bx \cos x$ 对任意 $x \in (0, \frac{2\pi}{3})$ 恒成立, 求满足条件的最大整数 b .

【变式训练】

题目 1 (2022·全国·高三专题练习) 已知函数 $f(x) = e^x + a\cos x - \sqrt{2}x - 2$, $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数.

(1) 讨论 $f'(x)$ 在区间 $(0, \frac{\pi}{2})$ 内极值点的个数;

(2) 若 $x \in [-\frac{\pi}{2}, 0]$ 时, $f(x) \geqslant 0$ 恒成立, 求整数 a 的最小值.

题目 2 (2023·云南保山·统考二模) 设函数 $f(x) = x\sin x, x \in \mathbf{R}$

(1) 求 $f(x)$ 在区间 $(0, \pi)$ 上的极值点个数;

(2) 若 x_0 为 $f(x)$ 的极值点, 则 $|f(x_0)| \geqslant \lambda \ln(1 + x_0^2)$, 求整数 λ 的最大值.

题型 06 “能”成立求参：常规型

【解题攻略】

形如 $f(x) \geq g(x)$ 的有解的求解策略：

- 1、构造函数法：令 $F(x) = f(x) - g(x)$ ，利用导数求得函数 $F(x)$ 的单调性与最小值，只需 $F(x)_{\min} \geq 0$ 恒成立即可；
- 2、参数分离法：转化为 $a \geq \varphi(x)$ 或 $a \leq \varphi(x)$ 恒成立，即 $a \geq \varphi(x)_{\min}$ 或 $a \leq \varphi(x)_{\max}$ 恒成立，只需利用导数求得函数 $\varphi(x)$ 的单调性与最值即可。

例 1 (2023 上·浙江·高三浙江省长兴中学校联考期中) 已知函数 $f(x) = a \ln x + x, a \in \mathbb{R}$.

(1) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性；

(2) 若存在 $x \in [e, e^2]$ ，使 $f(x) \leq \left(ax + \frac{1}{2}\right) \ln x$ 成立，求实数 a 的取值范围.

注： e 为自然对数的底数.

例 2 (2023 上·湖南长沙·高三统考阶段练习) 已知函数 $f(x) = \frac{a}{2}e^{2x} + (a-2)e^x - \frac{1}{2}x^2$ ， $y = g(x)$ 是 $y = f(x)$ 的导函数.

(1) 若 $a = 3$ ，求 $y = g(x)$ 的单调区间；

(2) 若存在实数 $x \in [0, 1]$ 使 $f(x) > \frac{3}{2}a - 2$ 成立，求 a 的取值范围.

【变式训练】

题目 1 (2023·全国·模拟预测) 已知函数 $f(x) = x^2 + a \ln(ex)$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 若存在 $x \in [1, e]$, 使得 $\frac{f(x) - a}{x} - a \leq 2$, 求实数 a 的最小值.

题目 2 (2023 上·黑龙江齐齐哈尔·高三统考阶段练习) 已知函数 $f(x) = a \ln x + \frac{1-a}{2}x^2 - x (a \in \mathbf{R})$.

(1) 若 $a = 2$, 求函数 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 若存在 $x_0 \geq 1$, 使得 $f(x_0) < \frac{a}{a-1}$, 求 a 的取值范围.

题型 07 “能”成立求参:双变量型

【解题攻略】

一般地,已知函数 $y=f(x), x \in [a,b], y=g(x), x \in [c,d]$

(1) 相等关系

记 $y=f(x), x \in [a,b]$ 的值域为 $A, y=g(x), x \in [c,d]$ 的值域为 B ,

① 若 $\forall x_1 \in [a,b], \exists x_2 \in [c,d],$ 有 $f(x_1)=g(x_2)$ 成立, 则有 $A \subseteq B$;

② 若 $\exists x_1 \in [a,b], \forall x_2 \in [c,d],$ 有 $f(x_1)=g(x_2)$ 成立, 则有 $A \supseteq B$;

③ 若 $\exists x_1 \in [a,b], \exists x_2 \in [c,d],$ 有 $f(x_1)=g(x_2)$ 成立, 故 $A \cap B \neq \emptyset$;

(2) 不等关系

(1) 若 $\forall x_1 \in [a,b], \forall x_2 \in [c,d],$ 总有 $f(x_1) < g(x_2)$ 成立, 故 $f(x)_{\max} < g(x)_{\min}$;

(2) 若 $\forall x_1 \in [a,b], \exists x_2 \in [c,d],$ 有 $f(x_1) < g(x_2)$ 成立, 故 $f(x)_{\max} < g(x)_{\max}$;

(3) 若 $\exists x_1 \in [a,b], \forall x_2 \in [c,d],$ 有 $f(x_1) < g(x_2)$ 成立, 故 $f(x)_{\min} < g(x)_{\min}$;

(4) 若 $\exists x_1 \in [a,b], \exists x_2 \in [c,d],$ 有 $f(x_1) < g(x_2)$ 成立, 故 $f(x)_{\min} < g(x)_{\max}$.

例 1 (2022·江西上饶·高三校联考阶段练习) 已知函数 $f(x)=2ax-e^x+2$, 其中 $a \neq 0$.

(1) 若 $a=\frac{1}{2}$, 讨论函数 $f(x)$ 的单调性;

(2) 是否存在实数 a , 对任意 $x_1 \in [0,1]$, 总存在 $x_2 \in [0,1]$, 使得 $f(x_1)+f(x_2)=4$ 成立? 若存在, 求出实数 a 的值; 若不存在, 请说明理由.

例 2 (2023 上·辽宁沈阳·高三沈阳二十中校考阶段练习) 已知函数 $f(x) = a\ln x + \frac{1}{x} (x > 0)$.

(1) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性;

(2) 若存在 x_1, x_2 满足 $0 < x_1 < x_2$, 且 $x_1 + x_2 = 1, f(x_1) = f(x_2)$, 求实数 a 的取值范围.

【变式训练】

题目 1 (2023·全国·高三专题练习) 已知函数 $f(x) = ax^2 - (2 + 5a)x + 5\ln x (a \in \mathbb{R}), g(x) = x^2 - \frac{5}{2}x$.

(1) 若曲线 $y = f(x)$ 在 $x = 3$ 和 $x = 5$ 处的切线互相平行, 求 a 的值;

(2) 求 $f(x)$ 的单调区间;

(3) 若对任意 $x_1 \in (0, \frac{5}{2}]$, 均存在 $x_2 \in (0, \frac{5}{2}]$, 使得 $f(x_1) < g(x_2)$, 求 a 的取值范围.

题目 2 (2023 上·重庆·高三校联考阶段练习) 已知函数 $f(x) = ax + \ln x (a \in \mathbb{R}), g(x) = x^2 - 2x + 2$.

(1) 当 $a = -\frac{1}{2}$ 时, 求函数 $f(x)$ 在区间 $[1, e]$ 上的最大值和最小值;

(2) 若对任意的 $x_1 \in [-1, 2]$, 均存在 $x_2 \in (0, +\infty)$, 使得 $g(x_1) < f(x_2)$, 求 a 的取值范围.

题型 08 “能”成立求参: 正余弦型

例 1 (2017·江苏淮安·高三江苏省淮安中学阶段练习) 函数 $f(x) = a \cos x - x + b (a > 0, b > 0)$.

(1) 求证: 函数 $f(x)$ 在区间 $[0, a+b]$ 内至少有一个零点;

(2) 若函数 $f(x)$ 在 $x = -\frac{\pi}{6}$ 处取极值, 且 $\exists x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, 使得 $f(x) < 3 \cos x - \sin x$ 成立, 求实数 b 的取值范围.

例 2 (2023·全国·高三专题练习) 已知函数 $f(x) = x + 2 - 2\cos x$

- (1) 求函数 $f(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上的最值;
- (2) 若存在 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 使不等式 $f(x) \leq ax$ 成立, 求实数 a 的取值范围

【变式训练】

题目 1 (2020·四川泸州·统考二模) 已知函数 $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, $g(x) = (x-1)m - 2\ln x$.

- (1) 求证: 当 $x \in (0, \pi]$ 时, $f(x) < 1$;
- (2) 求证: 当 $m > 2$ 时, 对任意 $x_0 \in (0, \pi]$, 存在 $x_1 \in (0, \pi]$ 和 $x_2 \in (0, \pi]$ ($x_1 \neq x_2$) 使 $g(x_1) = g(x_2) = f(x_0)$ 成立.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/608072110127006030>