第五章 导数及其应用（4大易错与4大拓展）

易错易混

易错点1 忽略切点所在位置

【指点迷津】求切线方程时应注意看清题意时在点$P(x_0,y_0)$处（点$P(x_0,y_0)$为切点）还是过点$P(x_0,y_0)$（此时一般把$P(x_0,y_0)$认为是非切点，而重新设出切点）

典例1（2024·全国·高三专题练习）过点$(-1,0)$作曲线$y=x^3-x$的切线，则切线的方程为_____.

【答案】$2x-y+2=0$或$x+4y+1=0$

【详解】$y=x^3-x$，则$y'=3x^2-1$.

设切点坐标为$\left(x_0,x_0^3-x_0\right)$，则切线斜率为$3x_0^2-1$，

切线方程为$y-\left(x_0^3-x_0\right)=\left(3x_0^2-1\right)\left(x-x_0\right)$，

代入点$(-1,0)$，得$2x_0^3+3x_0^2-1=0$，即$\left(x_0+1\right)^2\left(2x_0-1\right)=0$，解得$x_0=-1$或$x_0=\dfrac{1}{2}$.

当$x_0=-1$时，切线方程为$2x-y+2=0$；当$x_0=\dfrac{1}{2}$时，切线方程为$x+4y+1=0$.

故答案为：$2x-y+2=0$或$x+4y+1=0$

典例2．（2024上·重庆·高二重庆巴蜀中学校考期末）已知曲线$f\left(x\right)=x^3-x+1$，

(1)求曲线在点$P\left(1,1\right)$处的切线方程；

(2)求过点$Q\left(\dfrac{2}{3},\dfrac{1}{3}\right)$且与曲线相切的直线方程.

【答案】(1) $y=2x-1$

(2) $y=2x-1$或$y=-x+1$

【详解】（1）解：由函数$f\left(x\right)=x^3-x+1$，可得$f'\left(x\right)=3x^2-1$，可得$f'\left(1\right)=2$，

即曲线在点$P\left(1,1\right)$处的切线斜率为$k=2$，

所以曲线在点$P\left(1,1\right)$处的切线方程为$y=2\left(x-1\right)+1$，即$y=2x-1$.

（2）解：因为点$Q\left(\dfrac{2}{3},\dfrac{1}{3}\right)$不在曲线$f\left(x\right)=x^3-x+1$上，

设切点为$A\left(x_0,y_0\right)$，所以$f'\left(x_0\right)=3{x_0}^2-1$，

所以切线方程为$y=\left(3x_0^2-1\right)\left(x-x_0\right)+x_0^3-x_0+1$，

又因为$Q\left(\dfrac{2}{3},\dfrac{1}{3}\right)$在直线上，所以$\dfrac{1}{3}=\left(3x_0^2-1\right)\left(\dfrac{2}{3}-x_0\right)+x_0^3-x_0+1$，

即 $2x_0^3-2x_0^2=0$，解得 $x_0=1$ 或 $x_0=0$.

当切点为 $(1,1)$ 时，切线方程为 $y=2x-1$；

当切点为 $(0,1)$ 时，切线的斜率为 $f'(0)=-1$，此时切线方程为 $y=-x+1$，

综上所述，过点 $Q\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$ 且与曲线 $f(x)$ 相切的直线方程为：$y=2x-1$ 或 $y=-x+1$.

跟踪训练 1（2023 上·上海·高二校考阶段练习）已知函数 $f(x)=\frac{1}{2}x^2,g(x)=\ln x$.

(1)求函数 $h(x)=f(x)-g(x)$ 的最小值；

(2)求函数 $y=f(x)$ 过点 $(1,-4)$ 的切线；

【答案】(1)$\frac{1}{2}$

(2)$2x+y+2=0$ 或 $4x-y-8=0$

【详解】（1）由题意得，$h(x)$ 的定义域为 $x>0$，

$h'(x)=f'(x)-g'(x)=x-\frac{1}{x}=\frac{x^2-1}{x}$，

令 $h'(x)>0$，解得 $x>1$，或 $x<-1$（舍去）；$h'(x)<0$，解得 $-1<x<1$，所以 $0<x<1$，

所以 $h(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $h(x)_{\min}=h(1)=f(1)-g(1)=\frac{1}{2}\times1^2-\ln1=\frac{1}{2}$

（2）设切点为 $P(a,b)$，切线的斜率 $k=f'(a)=a$，

所以 $y-b=a(x-a)$，

因为直线过点 $(1,-4)$，所以 $-4-b=a(1-a)$，又 $b=\frac{1}{2}a^2$，

解得 $a=4$ 或 $a=-2$，

所以直线方程为 $2x+y+2=0$ 或 $4x-y-8=0$

跟踪训练 2（2024 上·山西长治·高二统考期末）已知 $f(x)=3\ln x-k(x-1)$.

(1)若过点 $(2,2)$ 作曲线 $y=f(x)$ 的切线，切线的斜率为 2，求 k 的值；

【答案】(1)1

【详解】（1）由题意可得：$f'(x)=\frac{3}{x}-k$，

设切点坐标为 $\left(x_0,3\ln x_0-k\left(x_0-1\right)\right)$，

则切线斜率为 $k=f'(x_0)=\frac{3}{x_0}-k=2$，即 $k=\frac{3}{x_0}-2$，

可得切线方程为 $y-\left[3\ln x_0-k\left(x_0-1\right)\right]=2\left(x-x_0\right)$，

将 $(2,2)$，$k=\frac{3}{x_0}-2$ 代入可得 $2-\left[3\ln x_0-\left(\frac{3}{x_0}-2\right)(x_0-1)\right]=2(2-x_0)$，

整理得 $\ln x_0-\frac{1}{x_0}+1=0$，

因为 $y=\ln x, y=-\frac{1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调递增，

则 $y=\ln x-\frac{1}{x}+1$ 在定义域 $(0,+\infty)$ 内单调递增，且当 $x=1$ 时，$y=0$，

可知关于 x_0 的方程 $\ln x_0-\frac{1}{x_0}+1=0$ 的根为 1，即 $x_0=1$，

所以 $k=\frac{3}{x_0}-2=1$.

易错点 2　求函数单调区间忽略了定义域

【指点迷津】求函数单调区间注意先求定义域，特别是选填题型，更容易忽视定义域而至错

典例 1（2024 上·山西大同·高二统考期末）函数 $f(x)=\frac{e}{x}+\ln x$ **的单调递减区间是（　）**

A．$(-\infty,e)$　　**B．**$(0,e)$　　**C．**$(1,e)$　　**D．**$(0,1)$

【答案】B

【详解】由函数 $f(x)=\frac{e}{x}+\ln x$，可得其的定义域为 $(0,+\infty)$，且 $f'(x)=\frac{-e}{x^2}+\frac{1}{x}=\frac{x-e}{x^2}$，

令 $f'(x)<0$，解得 $0<x<e$，所以函数 $f(x)$ 的单调递减区间是 $(0,e)$.

故选：B.

典例 2（2023 下·陕西汉中·高二校考期中）函数 $f(x)=x^2-5\ln x-3x-1$ **的单调递减区间为（　）**

A．$\left(-1,\frac{5}{2}\right)$　　**B．**$\left(0,\frac{3}{2}\right)$　　**C．**$\left(\frac{5}{2},+\infty\right)$　　**D．**$\left(0,\frac{5}{2}\right)$

【答案】D

【详解】函数 $f(x)=x^2-5\ln x-3x-1$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，

$f'(x)=2x-\frac{5}{x}-3=\frac{2x^2-3x-5}{x}<0$，

因为 $x>0$，可得 $2x^2-3x-5<0$，解得 $-1<x<\frac{5}{2}$，可得 $0<x<\frac{5}{2}$，

因此，函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 $\left(0,\frac{5}{2}\right)$.

故选：D.

跟踪训练 1（2023 上·甘肃·高三校考阶段练习）函数 $f(x)=x-\ln x$ **的单调递减区间是（　）**

A．$(-\infty,1)$　　**B．**$(0,1)$　　**C．**$(1,+\infty)$　　**D．**$(e,+\infty)$

【答案】B

【详解】函数的定义域为$(0,+\infty)$，

$f'(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$，令$f'(x)<0,\therefore 0<x<1$，

则单调递减区间为$(0,1)$.

故选：B

跟踪训练 2（2023 下·陕西西安·高二期中）函数$f(x)=x-2\ln x$的单调递减区间是（　）

A．$(-\infty,2)$　　B．$(2,+\infty)$　　C．$(0,2)$　　D．$(-\infty,0)$和$(0,2)$

【答案】C

【详解】$f'(x)=1-\frac{2}{x}=\frac{x-2}{x}(x>0)$，

令$f'(x)<0$，得$0<x<2$，

所以函数$f(x)=x-2\ln x$的单调递减区间是$(0,2)$.

故选：C.

易错点 3 已知函数$y=f(x)$在区间D上单调$\Leftrightarrow \forall x\in D$，$f'(x)\geq 0$恒成立. 解题时容易忽略等号

【指点迷津】已知函数$y=f(x)$在区间D上单调$\Leftrightarrow \forall x\in D$，$f'(x)\geq 0$恒成立.

典例 1（2023 上·福建南平·高二福建省南平第一中学校考阶段练习）已知函数$f(x)=\ln x-ax$在区间$[1,3]$上单调递减，则实数a的取值范围为（　　）

A．$a\geq 1$　　**B．**$a>1$　　**C．**$a\geq\frac{1}{3}$　　**D．**$a>\frac{1}{3}$

【答案】A

【详解】因为$f(x)=\ln x-ax$，所以$f'(x)=\frac{1}{x}-a$，

因为$f(x)$在区间$[1,3]$上单调递减，

所以$f'(x)\leq 0$，即$\frac{1}{x}-a\leq 0$，则$a\geq\frac{1}{x}$在$[1,3]$上恒成立，

因为$y=\frac{1}{x}$在$[1,3]$上单调递减，所以$y_{\max}=1$，故$a\geq 1$.

故选：A.

典例 2（2023 下·安徽合肥·高二校联考阶段练习）若函数$f(x)=e^x(x^2+a)$在$[-2,2]$上单调递减，则实数a的取值范围是（　）

A．$(-\infty,0]$　　**B．**$(-\infty,-8)$　　**C．**$(-\infty,-8]$　　**D．**$[0,+\infty)$

【答案】C

【详解】解：因为函数 $f(x)=e^{x}(x^{2}+a)$，

所以 $f'(x)=e^{x}(x^{2}+2x+a)$，

因为函数 $f(x)=e^{x}(x^{2}+a)$ 在 $[-2,2]$ 上单调递减，

所以 $f'(x)=e^{x}(x^{2}+2x+a)\leq 0$ 在 $[-2,2]$ 上恒成立，

即 $a\leq -x^{2}-2x$ 在 $[-2,2]$ 上恒成立，

令 $t=-x^{2}-2x=-(x+1)^{2}+1\geq -8$，

则 $a\leq -8$，

当 $a=-8$ 时，$f'(x)=e^{x}(x^{2}+2x-8)=e^{x}\left[(x+1)^{2}-9\right]$ 不恒为零，

所以实数 a 的取值范围是 $(-\infty,-8]$，

故选：C

跟踪训练 1（2023 下·广西南宁·高二宾阳中学校联考期末）已知函数 $f(x)=ae^{x}-\ln x$ 在区间 $(2,3)$ 上单调递增，则 a 的最小值为（　）

A. $2e^{-2}$　　**B.** e　　**C.** e^{-1}　　**D.** $\frac{1}{2}e^{-2}$

【答案】D

【详解】依题可知，$f'(x)=ae^{x}-\frac{1}{x}\geq 0$ 在 $(2,3)$ 上恒成立，

显然 $a>0$，所以 $xe^{x}\geq \frac{1}{a}$，

设 $g(x)=xe^{x},x\in(2,3)$，所以 $g'(x)=(x+1)e^{x}>0$，所以 $g(x)$ 在 $(2,3)$ 上单调递增，

$g(x)>g(2)=2e^{2}$，故 $2e^{2}\geq \frac{1}{a}$，即 $a\geq \frac{1}{2e^{2}}=\frac{1}{2}e^{-2}$，即 a 的最小值为 $\frac{1}{2}e^{-2}$.

故选：D.

跟踪训练 2（2023·陕西西安·统考三模）若函数 $f(x)=x^{2}-ax+\ln x$ 在区间 $(1,e)$ 上单调递增，则 a 的取值范围是（　）

A. $[3,+\infty)$　　**B.** $(-\infty,3]$　　**C.** $[3,e^{2}+1]$　　**D.** $[3,e^{2}-1]$

【答案】B

【详解】因为函数 $f(x)=x^{2}-ax+\ln x$ 在区间 $(1,e)$ 上单调递增，

所以 $f'(x)=2x-a+\frac{1}{x}\geq 0$ 在区间 $(1,e)$ 上恒成立，

即 $a\leq 2x+\frac{1}{x}$ 在区间 $(1,e)$ 上恒成立，

令 $g(x)=2x+\frac{1}{x}(1<x<\mathrm{e})$，

则 $g'(x)=2-\frac{1}{x^2}=\frac{2x^2-1}{x^2}=\frac{(\sqrt{2}x+1)(\sqrt{2}x-1)}{x^2}>0$，

所以 $g(x)$ 在 $(1,\mathrm{e})$ 上递增，又 $g(1)=3$，

所以 $a\le 3$.

所以 a 的取值范围是 $(-\infty,3]$.

故选：B

易错点 4 由函数的极值求参数取值时没有验证致错

【指点迷津】根据函数极值求参数有多个答案时请一定要检验

典例 1（2023 上·江苏镇江·高二扬中市第二高级中学期末）已知函数 $f(x)=x(x-c)^2$ 在 $x=2$ 处有极小值，则常数 c 的值为（　　）

A．1　　　　B．2 或 6　　　　C．2　　　　D．6

【答案】C

【详解】$f'(x)=(x-c)^2+2x(x-c)=(x-c)(3x-c)$，

由题意得 $f'(2)=0$，即 $(2-c)(6-c)=0$，解得 $c=2$ 或 6，

当 $c=2$ 时，$f'(x)=(x-2)(3x-2)$，

当 $x<\frac{2}{3}$ 或 $x>2$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，

当 $\frac{2}{3}<x<2$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，

故函数 $f(x)=x(x-c)^2$ 在 $x=2$ 处有极小值，满足要求，

当 $c=6$ 时，$f'(x)=(x-6)(3x-6)$，

当 $x<2$ 或 $x>6$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，

当 $2<x<6$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，

故函数 $f(x)=x(x-c)^2$ 在 $x=2$ 处有极大值，不合要求，

故常数 c 的值为 2.

故选：C

典例（2023 下·四川遂宁·高三射洪中学校考开学考试）若函数 $f(x)=x^3+2ax^2+a^2x$ 在 $x=1$ 处有极大值，则实数 a 的值为（　）

A．1　　　　**B．**-1 **或** -3　　　　**C．**-1　　　　**D．**-3

【答案】D

【详解】求导得 $f'(x)=3x^2+4ax+a^2$，

则由题意得 $f'(1)=a^2+4a+3=0\Rightarrow a=-1$ 或 $a=-3$，

代入检验当 $a=-1$ 时，$f'(x)=3x^2-4x+1=(x-1)(3x-1)$，

令 $f'(x)>0\Rightarrow x>1$ 或 $x<\frac{1}{3}$，$f'(x)<0\Rightarrow\frac{1}{3}<x<1$，则 $x=1$ 时，$f(x)$ 取得极小值，不符合题意舍去；

当 $a=-3$ 时，$f'(x)=3(x^2-4x+3)=3(x-1)(x-3)$，

令 $f'(x)>0\Rightarrow x>3$ 或 $x<1$，$f'(x)<0\Rightarrow 1<x<3$，则 $x=1$ 时，$f(x)$ 取得极大值，符合题意.

故选：D

跟踪训练 1（2023 上·云南昆明·高三统考期中）已知函数 $f(x)=x^3-2ax^2+a^2x+1$ 在 $x=1$ 处有极小值，则 a 的值为（　）

A．1　　B．3　　C．1 或 3　　D．-1 或 3

【答案】A

【详解】因为 $f(x)=x^3-2ax^2+a^2x+1$，

所以 $f'(x)=3x^2-4ax+a^2$，

因为函数 $f(x)=x^3-2ax^2+a^2x+1$ 在 $x=1$ 处有极小值，

所以 $f'(1)=3-4a+a^2=0$，解得 $a=1$ 或 $a=3$，

当 $a=1$ 时，$f'(x)=3x^2-4x+1=(3x-1)(x-1)$，

当 $f'(x)>0$ 时，$x<\frac{1}{3}$ 或 $x>1$，当 $f'(x)<0$ 时，$\frac{1}{3}<x<1$，

$f(x)$ 在 $x=1$ 处取到极小值，符合题意；

当 $a=3$ 时，$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$，

当 $f'(x)>0$ 时，$x<1$ 或 $x>3$，当 $f'(x)<0$ 时，$1<x<3$，

$f(x)$ 在 $x=1$ 处取到极大值，不符合题意；

综上：a 的值为 1.

故选：A.

跟踪训练 2（2023 下·江西上饶·高二统考期末）若函数 $f(x)=x^3-ax^2-bx+a^2$ 在 $x=1$ 处有极值 10，则 $b+a=$（　）

A．-7　　B．0　　C．7　　D．0 或 7

【答案】C

【详解】函数 $f(x)=x^3-ax^2-bx+a^2$，求导得 $f'(x)=3x^2-2ax-b$，

依题意，$\begin{cases}f'(1)=3-2a-b=0\\f(1)=a^2-a-b+1=10\end{cases}$，解得 $a=3,b=-3$ 或 $a=-4,b=11$，

当 $a=3,b=-3$ 时，$f'(x)=3x^2-6x+3=3(x-1)^2\ge 0$，函数 $f(x)$ 在 **R** 上单调递增，无极值，不符合题意，

当 $a=-4,b=11$ 时，$f'(x)=3x^2+8x-11=(3x+11)(x-1)$，当 $-\frac{11}{3}<x<1$ 时，$f'(x)<0$，$x>1$ 时，$f'(x)>0$，于是 $x=1$ 是函数 $f(x)$ 的极值点，符合题意，所以 $b+a=7$．

故选：C

拓展 1 利用导函数研究函数的恒成立问题

典例 1（2023·上海嘉定·统考一模）对于函数 $f(x)=2ae^{2x}-\ln x+\ln a$，若对于任意的 $x\in(0,+\infty)$，$f(x)\geq 0$ 恒成立，求 a 的取值范围________.

【答案】$\left[\frac{1}{2\mathrm{e}},+\infty\right)$

【详解】不等式 $f(x)=2ae^{2x}-\ln x+\ln a\geq 0$ 恒成立等价于 $2ae^{2x}\geq\ln\frac{x}{a}$ 即 $2xe^{2x}\geq\frac{x}{a}\ln\frac{x}{a}(x>0)$，即

$2x+\ln 2x\geq\ln\frac{x}{a}+\ln\left(\ln\frac{x}{a}\right)(x>a)$，

由于 $f(x)=x+\ln x$ 为增函数，所以由 $f(2x)\geq f\left(\ln\frac{x}{a}\right)$，得 $2x\geqslant\ln\frac{x}{a}$，即 $a\geqslant\frac{x}{e^{2x}}$ 恒成立，

令 $g(x)=\frac{x}{\mathrm{e}^{2x}}$，则 $g'(x)=\frac{1-2x}{\mathrm{e}^{2x}}$，

当 $0<x<\frac{1}{2}$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增，

当 $x>\frac{1}{2}$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减，

易得 $g(x)_{\max}=g\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2\mathrm{e}}$，

所以 $a\geq\frac{1}{2\mathrm{e}}$，所以 a 的取值范围是 $\left[\frac{1}{2\mathrm{e}},+\infty\right)$.

故答案为：$\left[\frac{1}{2\mathrm{e}},+\infty\right)$.

典例 2（2023 下·上海浦东新·高二上海市建平中学校考阶段练习）若不等式 $\ln x\leq x^5-3\mathrm{e}x^3-\frac{1}{2}ax^2$ 对任意 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立，则实数 a 的取值范围为_________.

【答案】$\left(-\infty,-4\mathrm{e}\sqrt{\mathrm{e}}-\frac{1}{\mathrm{e}}\right]$

【详解】因为不等式 $\ln x\leq x^5-3\mathrm{e}x^3-\frac{1}{2}ax^2$ 对任意 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立，

所以 $\frac{1}{2}a\leq x^3-3\mathrm{e}x-\frac{\ln x}{x^2}$ 对任意 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立，

令 $f(x)=x^3-3\mathrm{e}x-\frac{\ln x}{x^2}$，$x\in(0,+\infty)$，

则 $f'(x)=3x^2-3\mathrm{e}-\frac{1-2\ln x}{x^3}$，令 $g(x)=f'(x)=3x^2-3\mathrm{e}-\frac{1-2\ln x}{x^3}$，

则 $g'(x)=6x-3+\frac{2+(1-2\ln x)\times 3}{x^4}$，

当 $x\in\left(0,\frac{1}{2}\right]$时，$6x-3>-3$，

$\frac{2+(1-2\ln x)\times 3}{x^4}>2+(1-2\ln x)\times 3>2+\left(1-2\ln\frac{1}{2}\right)\times 3=5+6\ln 2>3$，

所以 $g'(x)>0$，

当 $x\in\left(\frac{1}{2},\sqrt{\mathrm{e}}\right]$时，$6x-3>0,\frac{2+(1-2\ln x)\times 3}{x^4}>0$，所以 $g'(x)>0$，

当 $x\in\left(\sqrt{\mathrm{e}},+\infty\right)$时，$g'(x)=6x-3+\frac{5}{x^4}-\frac{6\ln x}{x^4}$，令 $m(x)=\frac{\ln x}{x^4}$，

则 $m'(x)=\frac{1-4\ln x}{x^5}<0$，所以 $m(x)<m\left(\sqrt{\mathrm{e}}\right)=\frac{1}{2\mathrm{e}^2}$，

又 $6x-3+\frac{5}{x^4}>6x-3>6\sqrt{\mathrm{e}}-3$，

所以 $6x-3+\frac{5}{x^4}-6\frac{\ln x}{x^4}>6\sqrt{\mathrm{e}}-3-\frac{6}{2\mathrm{e}^2}>0$，综上 $g'(x)>0$ 对 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立，

所以 $f'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上严格增，又 $f'\left(\sqrt{\mathrm{e}}\right)=0$，所以当 $x\in\left(0,\sqrt{\mathrm{e}}\right)$时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，

当 $x\in\left(\sqrt{\mathrm{e}},+\infty\right)$时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，所以 $f(x)_{\min}=f\left(\sqrt{\mathrm{e}}\right)=-2\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2\mathrm{e}}$，

所以 $\frac{1}{2}a\le-2\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2\mathrm{e}}$，所以 $a\le-4\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{\mathrm{e}}$，即 $a\in\left(-\infty,-4\mathrm{e}\sqrt{\mathrm{e}}-\frac{1}{\mathrm{e}}\right]$.

故答案为：$\left(-\infty,-4\mathrm{e}\sqrt{\mathrm{e}}-\frac{1}{\mathrm{e}}\right]$

典例 3（2023 下·上海杨浦·高二上海市控江中学校考期中）设 $a\in\mathrm{R}$，函数 $f(x)=ax^2+\frac{6}{x},x>0$.

(1)当 $a=3$ 时，求函数 $y=f(x)$ 的单调区间；

(2)设常数 $c>0$.当 $a=0$ 时，关于 x 的不等式 $f(x)+2x^3\ge 13c$ 在 $[c,+\infty)$ 恒成立，求 c 的取值范围.

【答案】(1)函数的单调增区间为 $(1,+\infty)$，单调减区间为 $(0,1)$

(2) $\left(0,\frac{8}{13}\right]\cup\left[\sqrt{6},+\infty\right)$

【详解】（1）$f(x)=3x^2+\frac{6}{x}$，$f'(x)=6x-\frac{6}{x^2}=\frac{6\left(x^3-1\right)}{x^2}$，

令 $f'(x)=0$，解得 $x=1$，

当$0<x<1$时，$f'(x)<0$，函数$y=f(x)$单调递减，

当$x>1$时，$f'(x)>0$，函数$y=f(x)$单调递增，

故函数的单调增区间为$(1,+\infty)$，单调减区间为$(0,1)$.

（2）$a=0$，$f(x)=\frac{6}{x}$，设$g(x)=2x^3+\frac{6}{x}-13c$，$g'(x)=6x^2-\frac{6}{x^2}=\frac{6(x^4-1)}{x^2}$，

令$g'(x)=0$得$x=1$.

当$0<x<1$.时，$g'(x)<0$，函数$y=g(x)$单调递减，

当$x>1$时，$g'(x)>0$，函数$y=g(x)$单调递增，

当$0<c<1$时，$y=g(x)$在$[c,+\infty)$上的最小值$g(1)=8-13c$，

由$g(1)\geq 0$，解得$c\leq\frac{8}{13}$，故$c\in\left(0,\frac{8}{13}\right]$.

当$c\geq 1$时，$y=g(x)$在$[c,+\infty)$上的最小值$g(c)=2c^3+\frac{6}{c}-13c$，

由$g(c)\geq 0$，有$\frac{(2c^2-1)(c^2-6)}{c}\geq 0$，解得$c\geq\sqrt{6}$，故$c\in\left[\sqrt{6},+\infty\right)$.

综上所述：c的取值范围为$\left(0,\frac{8}{13}\right]\cup\left[\sqrt{6},+\infty\right)$.

跟踪训练1　（2023上·上海浦东新·高三校考期中）若关于x的不等式$\ln x-\frac{1}{m}x^2+nx-1\leq 0$恒成立，求$mn$的最大值__________.

【答案】e

【详解】由$m\neq 0,x>0$，原不等式可化为：$\frac{\ln x-1}{x}\leq\frac{1}{m}(x-mn)$，

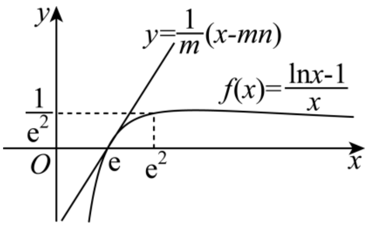
设$f(x)=\frac{\ln x-1}{x}$，则$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-(\ln x-1)}{x^2}=\frac{2-\ln x}{x^2}$，

当$x\in(0,e^2)$时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增，

当$x\in(e^2,+\infty)$时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减，

所以，$f(x)$在$x=e^2$处取得极大值，且为最大值，则$f(e^2)=\frac{1}{e^2}$；

当$x>e$时，$f(x)>0$，



结合图象可知，要使 $y=\frac{1}{m}(x-mn)$ 的图象恒在 $f(x)$ 图象的上方，显然 $m<0$ 不符题意，

当 $m>0$ 时，mn 为直线 $y=\frac{1}{m}(x-mn)$ 的横截距，其最大值为 $f(x)$ 的横截距，

再令 $f(x)=0$，可得 $x=\mathrm{e}$，所以 mn 的最大值为 e.

此时 $m=\mathrm{e}^2, n=\frac{1}{\mathrm{e}}$，直线 $y=\frac{1}{m}(x-mn)$ 与 $f(x)$ 在点 $(\mathrm{e},0)$ 处相切，mn 的最大值为 e.

故答案为：e

跟踪训练 2（2023 上·上海徐汇·高三上海市徐汇中学校考期中）已知函数 $f(x)=(ax^2+x+2)\mathrm{e}^x\ (a\geq 0)$，其中 e 是自然对数的底数.

(1)当 $a=0$ 时，求曲线 $f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程；

(2)当 $a=2$ 时，求 $f(x)$ 在 $[-2,2]$ 的最值；

(3)若函数 $f(x)$ 在 $[-2,2]$ 上是严格递增函数，求 a 的取值范围.

【答案】(1) $y=3x+2$

(2) $f(x)_{\max}=12\mathrm{e}^2$，$f(x)_{\min}=8\mathrm{e}^{-2}$

(3) $a\in\left[0,1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$

【详解】（1）(1)当 $a=0$ 时，$f(x)=(x+2)\mathrm{e}^x$，所以 $f'(x)=(x+3)\mathrm{e}^x$，

故 $f'(0)=3$，又 $f(0)=2$，

由导数的几何意义知,曲线 $f(x)$ 在点 $(0,2)$ 处的切线方程为 $y-2=3(x-0)$，

即 $y=3x+2$.

（2）（2）当 $a=2$ 时，$f(x)=(2x^2+x+2)\mathrm{e}^x$，

所以 $f'(x)=(4x+1)\mathrm{e}^x+(2x^2+x+1)\mathrm{e}^x=(2x^2+5x+3)\mathrm{e}^x=(2x+3)(x+1)\mathrm{e}^x$，

因为 $x\in[-2,2]$，

由 $f'(x)>0$，得 $-2\leq x<-\frac{3}{2}$,或 $-1<x\leq 2$，

由 $f'(x)<0$，得 $-\frac{3}{2}<x<-1$，

所以函数 $f(x)$ 在 $[-2,-\frac{3}{2})$ 上单调递增，在 $\left(-\frac{3}{2},-1\right)$ 上单调递减，在 $(-1,2]$ 上单调递增，

则 $f(-2)=(8-2+2)e^{-2}=8e^{-2}$，$f\left(-\frac{3}{2}\right)=\left(2\times\frac{9}{4}-\frac{3}{2}+2\right)e^{-\frac{3}{2}}=5e^{-\frac{3}{2}}$，

$f(-1)=(2-1+2)e^{-1}=3e^{-1}$，$f(2)=(8+2+2)e^{2}=12e^{2}$，

故 $f(x)_{\max}=12e^{2}, f(x)_{\min}=8e^{-2}$.

（3）（3）因为 $f(x)=(ax^{2}+x+2)e^{x}(a\geq 0)$，

所以 $f'(x)=\left[ax^{2}+(2a+1)x+3\right]e^{x}(a\geq 0)$，

因为函数 $f(x)$ 在 $[-2,2]$ 上是严格递增函数,所以 $f'(x)\geq 0$ 在区间 $[-2,2]$ 上恒成立，

又因为 $e^{x}>0$ 恒成立，即 $ax^{2}+(2a+1)x+3\geq 0$ 在区间 $[-2,2]$ 上恒成立，

令 $g(x)=ax^{2}+(2a+1)x+3$，

当 $a=0$ 时，$g(x)=x+3$，显然在 $[-2,2]$ 上 $g(x)\geq 0$ 恒成立；

当 $a>0$ 时，则 $g(x)$ 的对称轴 $x=-\frac{2a+1}{2a}=-1-\frac{1}{2a}<0$，

当 $-1-\frac{1}{2a}\leq -2$，即 $0<a\leq\frac{1}{2}$ 时，$g(x)$ 在区间 $[-2,2]$ 上单调递增，

所以 $g(x)$ 的最小值为 $g(-2)=4a-2(2a+1)+3=1$，故 $0<a\leq\frac{1}{2}$ 满足题意；

当 $-2<-1-\frac{1}{2a}<0$，即 $a>\frac{1}{2}$ 时，$g(x)\geq 0$ 在区间 $[-2,2]$ 上恒成立，

则 $\Delta=(2a+1)^{2}-12a\leq 0$,即 $4a^{2}-8a+1\leq 0$，解得 $1-\frac{\sqrt{3}}{2}\leq a\leq 1+\frac{\sqrt{3}}{2}$，

又 $a>\frac{1}{2}$，所以 $\frac{1}{2}<a\leq 1+\frac{\sqrt{3}}{2}$，

综上所述：a 的取值范围为 $0\leq a\leq 1+\frac{\sqrt{3}}{2}$，即 $a\in\left[0,1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$.

跟踪训练 3（2023 下·上海·高二上海市宜川中学校考期末）已知函数 $f(x)=e^{x}-(a+1)x$ (其中 e 为自然对数的底数).

(1)当 $a=0$ 时，试求函数在 $[-e,e]$ 上的最值；

(2)若对任意 $x\in\mathbf{R}$，不等式 $f(x)\geq 0$ 恒成立，求实数 a 的取值范围；

【答案】(1) $f(e)=e^{e}-e$

(2) $a\in[-1,e-1]$

【详解】（1）当 $a=0$ 时，$f(x)=e^{x}-x$，$f'(x)=e^{x}-1$，

当 $x<0$ 时，$f'(x)<0$；当 $x>0$ 时，$f'(x)>0$.

所以函数 $f(x)$ 在 $[-e,0]$ 上单调递减，在 $[0,e]$ 上单调递增，

所以函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处取得最小值 $f(0)=e^0-0=1$，

易知 $f(e)=e^e-e>f(-e)=e^{-e}+e=\frac{1}{e^e}+e$，则最大值 $f(e)=e^e-e$．

（2）若对任意 $x\in\mathbf{R}$，不等式 $f(x)\geq 0$ 恒成立，即：$e^x\geq(a+1)x$ 恒成立

当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$a\leq\frac{e^x}{x}-1$ 恒成立.

令 $g(x)=\frac{e^x}{x}-1$，则 $g'(x)=\frac{(x-1)e^x}{x^2}$．

当 $g'(x)>0$，$x>1$，$g'(x)<0$，$0<x<1$

所以 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增.

所以 $x=1$ 时，$g(x)$ 取最小值 $e-1$，所以 $a\in(-\infty,e-1]$．

当 $x\in(-\infty,0]$ 时，若 $a\geq-1$ 时，$e^x\geq(a+1)x$ 恒成立；

若 $a<-1$，取 $x=\frac{1}{a+1}<0$，则 $e^{\frac{1}{a+1}}<1$ 显然不满足，所以 $a\geq-1$

综上，$a\in[-1,e-1]$

拓展 2 利用导函数研究函数的能成立问题

典例 1（2022 上·上海浦东新·高一上海市建平中学校考期末）已知 $f(x)$ 为奇函数，当 $x\in[0,1]$ 时，$f(x)=1-2\left|x-\frac{1}{2}\right|$，当 $x\in(-\infty,-1]$，$f(x)=1-e^{-1-x}$，若关于 x 的不等式 $f(x+m)>f(x)$ 有解，则实数 m 的取值范围为（　）

A． $(-1,0)\cup(0,+\infty)$　　**B．** $(-2,0)\cup(0,+\infty)$

C． $\left(-\frac{1}{2}-\ln 2,-1\right)\cup(0,+\infty)$　　**D．** $\left(-\frac{1}{2}-\ln 2,0\right)\cup(0,+\infty)$

【答案】D

【详解】若 $x\in[-1,0]$，即 $-x\in[0,1]$，则 $f(-x)=1-2\left|-x-\frac{1}{2}\right|=1-2\left|x+\frac{1}{2}\right|$；

$\because f(x)$ 是奇函数，

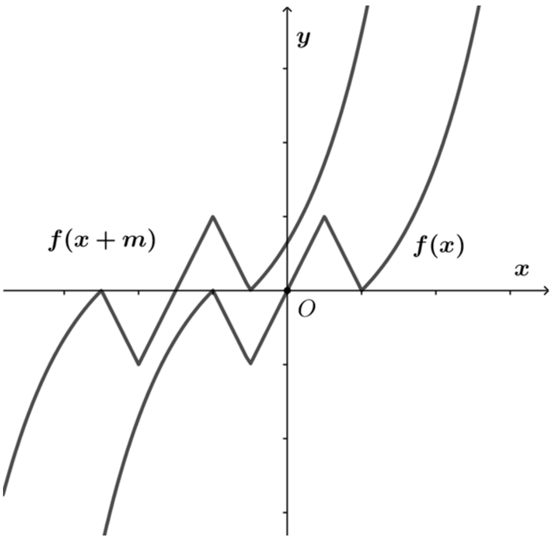
$\therefore f(-x)=1-2\left|x+\frac{1}{2}\right|=-f(x)$，则 $f(x)=2\left|x+\frac{1}{2}\right|-1$，$x\in[-1,0]$；

同理，若 $x\in[1,+\infty)$，即 $-x\in(-\infty,-1]$，则 $f(-x)=1-e^{-1+x}=-f(x)$，有 $f(x)=e^{-1+x}-1$，$x\in[1,+\infty)$；

综上，有 $f(x)=\begin{cases}1-e^{-1-x}, x\le -1\\ 2|x+\dfrac{1}{2}|-1, -1\le x\le 0\\ 1-2|x-\dfrac{1}{2}|, 0\le x\le 1\\ e^{-1+x}-1, x\ge 1\end{cases}$

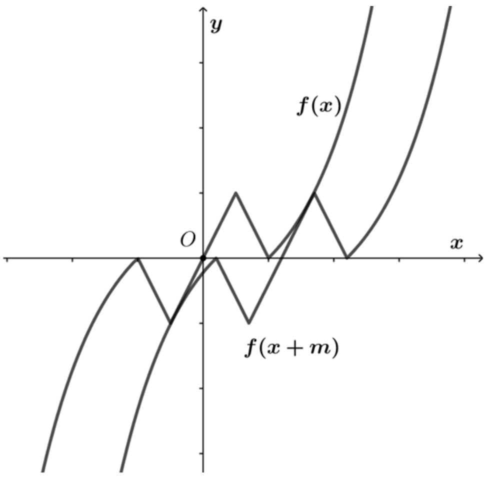
作出函数 $f\left(x\right)$ 的图象如图：

1、当 $m>0$ 时，$f\left(x+m\right)$ 是 $f\left(x\right)$ 的图象向左平移 m 个单位，即如下图



此时 $f\left(x+m\right)>f\left(x\right)$ 有解，满足条件.

2、当 $m<0$ 时，$f\left(x+m\right)$ 是 $f\left(x\right)$ 的图象向右平移 m 个单位，即如下图



当 $f\left(x+m\right)$ 的图象与 $f\left(x\right)$ 在 $x>1$ 相切时，$f'\left(x\right)=e^{x-1}$，此时对应直线斜率 $k=2$，由 $e^{x-1}=2$，得 $x=\ln 2+1$，此时 $y=e^{\ln 2+1-1}-1=1$，即切点坐标为 $\left(1+\ln 2,1\right)$；

设切线方程为 $y=2\left(x-a\right)$，此时 $1=2\left(1+\ln 2-a\right)$，得 $a=\dfrac{1}{2}+\ln 2$；

$\therefore$当 $0<-m<\dfrac{1}{2}+\ln 2$ 时，满足题设条件，解之得：$-\dfrac{1}{2}-\ln 2<m<0$；

综上，有$-\frac{1}{2}-\ln 2<m<0$或$m>0$，即m的取值范围是$\left(-\frac{1}{2}-\ln 2,0\right)\cup(0,+\infty)$；

故选：D.

典例2（2022下·上海浦东新·高二上海南汇中学校考期末）已知函数$f(x)=a\ln x+x^2$（a为实常数）．

(1)若$a=-2$，求证：$f(x)$在$(1,+\infty)$上是增函数；

(2)当$a=-4$时，求函数$f(x)$在$[1,\mathrm{e}]$上的最大值与最小值及相应的x值；

(3)若存在$x\in[1,\mathrm{e}]$，使得$f(x)\le(a+2)x$成立，求实数a的取值范围．

【答案】(1)见解析

(2)当$x=\sqrt{2}$时，函数$f(x)$有最小值为$f(\sqrt{2})=2-2\ln 2$，

当$x=\mathrm{e}$时，函数$f(x)$有最大值为$f(\mathrm{e})=\mathrm{e}^2-4$.

(3)$[-1,+\infty)$

【详解】（1）由题可知函数的定义域$(0,+\infty)$，

因为$a=-2$,所以$f(x)=-2\ln x+x^2$，所以$f'(x)=-\frac{2}{x}+2x=2\frac{x^2-1}{x}$，

令$f'(x)>0$解得$x>1$，

所以$f(x)$在$(1,+\infty)$上是增函数.

（2）因为$a=-4$,所以$f(x)=-4\ln x+x^2$，所以$f'(x)=-\frac{4}{x}+2x=2\frac{x^2-2}{x}$，

令$f'(x)>0$解得$x>\sqrt{2}$，令$f'(x)<0$解得$0<x<\sqrt{2}$，

所以$f(x)$在$(0,\sqrt{2})$上单调递减，在$(\sqrt{2},+\infty)$上单调递增，

所以$f(x)$在$\left[1,\sqrt{2}\right)$上单调递减，在$\left[\sqrt{2},\mathrm{e}\right]$上单调递增，

所以当$x=\sqrt{2}$时，函数$f(x)$有最小值为$f(\sqrt{2})=2-2\ln 2$，

因为$f(1)=1,f(\mathrm{e})=\mathrm{e}^2-4>1$，

所以当$x=\mathrm{e}$时，函数$f(x)$有最大值为$f(\mathrm{e})=\mathrm{e}^2-4$.

（3）由$f(x)\le(a+2)x$得$a\ln x+x^2\le(a+2)x$，即$a(\ln x-x)\le 2x-x^2$，

因为$x\in[1,\mathrm{e}]$，所以$x\ge 1,\ln x\le\ln\mathrm{e}=1$，所以$x\ge\ln\mathrm{e}\ge\ln x$，

且当$x=1$时$\ln x=0$，所以$x>\ln x$在$x\in[1,\mathrm{e}]$恒成立，所以$a\ge\frac{x^2-2x}{x-\ln x}$，

即存在$x\in[1,\mathrm{e}]$时，$a\ge\frac{x^2-2x}{x-\ln x}$，

令$g(x)=\frac{x^2-2x}{x-\ln x}$，$g'(x)=\frac{(x-1)(x+2-2\ln x)}{(x-\ln x)^2}$，

令$h(x)=x+2-2\ln x,h'(x)=1-\frac{2}{x}=\frac{x-2}{x}$，

令 $h'(x)=\dfrac{x-2}{x}>0$，解得 $2<x\le \mathrm{e}$，

令 $h'(x)=\dfrac{x-2}{x}<0$，解得 $1\le x<2$，

所以 $h(x)$ 在 $[1,2)$ 单调递减，$(2,\mathrm{e}]$ 单调递增，

所以 $h(x)\ge h(2)=2(2-\ln 2)>0$，

所以 $x\in[1,\mathrm{e}]$ 时，$g'(x)=\dfrac{(x-1)(x+2-2\ln x)}{(x-\ln x)^2}\ge 0$ 恒成立，

所以 $g(x)_{\min}=g(1)=-1$，

所以实数 a 的取值范围是 $[-1,+\infty)$.

跟踪训练 1 （2023 下·上海普陀·高二校考期末）已知函数 $f(x)=\dfrac{x^2-x+1}{x-1}(x>2)$，若 $\exists x\in(2,+\infty)$，使 $f(x)<m$ 成立，则实数 m 的取值范围是______________.

【答案】$(3,+\infty)$

【详解】因为 $f(x)=\dfrac{x^2-x+1}{x-1}=x+\dfrac{1}{x-1}$，

所以 $f'(x)=1-\dfrac{1}{(x-1)^2}$

当 $x\in(2,+\infty)$ 时，$f'(x)=1-\dfrac{1}{(x-1)^2}>0$，

则函数 $f(x)$ 在 $(2,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $f(x)>f(2)=3$，即 $f(x)\in(3,+\infty)$

因为 $\exists x\in(2,+\infty)$，使 $f(x)<m$ 成立，

所以 $m>3$，

即实数 m 的取值范围是 $(3,+\infty)$.

故答案为：$(3,+\infty)$.

跟踪训练 2（2022 上·上海虹口·高三上海市复兴高级中学校考期中）已知函数 $f(x)=x$，$g(x)=x^2-mx+4$，$m\in R$.

(1)当 $m=4$ 时，解不等式 $g(x)>|f(x)-2|$；

(2)若对任意的 $x_1\in[1,2]$，存在 $x_2\in[1,2]$，使得 $g(x_1)=f(x_2)$，求实数 m 的取值范围.

【答案】(1) $x\in(-\infty,1)\cup(3,+\infty)$

(2) $m\in\left[3,\dfrac{7}{2}\right]$