

东北三省四市教研联合体 2024 届高三模拟（一）数学试卷

学校:_____姓名:_____班级:_____考号:_____

一、单选题

1. 已知集合 $A = \{-1, 0, 1, 2\}$, $B = \{x | x^3 = x\}$, 则 $A \cap B =$ ()

- A. $\{-1\}$ B. $\{-1, 1\}$ C. $\{0, 1\}$ D. $\{-1, 0, 1\}$

2. 下列各组向量中, 可以作为基底的是 ().

- A. $\vec{e}_1 = (0, 0)$, $\vec{e}_2 = (1, -2)$ B. $\vec{e}_1 = (-1, 2)$, $\vec{e}_2 = (5, 7)$
C. $\vec{e}_1 = (3, 5)$, $\vec{e}_2 = (6, 10)$ D. $\vec{e}_1 = (2, -3)$, $\vec{e}_2 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}\right)$

3. 已知复数 z_1, z_2 满足 $|z_1| = |z_2| = 3$, $z_1 + z_2 = 2 - \sqrt{5}i$, 则 $|z_1 - z_2| =$ ()

- A. 3 B. $2\sqrt{3}$ C. $3\sqrt{2}$ D. $3\sqrt{3}$

4. 酒驾是严重危害交通安全的违法行为. 为了保障交通安全, 根据国家有关规定:

100mL 血液中酒精含量达到 20~79mg 的驾驶员即为酒后驾车, 80mg 及以上认定为醉

酒驾车. 假设某驾驶员喝了一定量的酒后, 其血液中的酒精含量上升到了

0.6mg/mL. 如果停止喝酒以后, 他血液中酒精含量会以每小时 30% 的速度减少, 那么他至少经过几个小时才能驾驶? () (结果取整数, 参考数据: $\lg 3 \approx 0.48, \lg 7 \approx 0.85$)

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

5. 已知函数 $f(x) = 3\log_2(\sqrt{x^2+1} - x)$, 正数 a, b 满足 $f(a) + f(3b-1) = 0$, 则 $\frac{3b+a}{ab}$ 的最小值为 ()

- A. 6 B. 8 C. 12 D. 24

6. 为了迎接 2025 年第九届亚冬会的召开, 某班组织全班学生开展有关亚冬会知识的竞赛活动. 已知该班男生 35 人, 女生 25 人. 根据统计分析, 男生组成绩和女生组成绩的

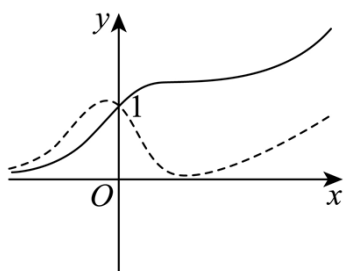
方差分别为 s_1^2, s_2^2 , 该班成绩的方差为 s^2 , 则下列结论中一定正确的是 ()

- A. $s^2 = \frac{s_1^2 + s_2^2}{2}$ B. $s^2 \geq \frac{s_1^2 + s_2^2}{2}$
C. $s^2 = \frac{7s_1^2 + 5s_2^2}{12}$ D. $s^2 \geq \frac{7s_1^2 + 5s_2^2}{12}$

7. 甲、乙、丙三人从事 a, b, c 三项工作, 乙的年龄比从事 c 工作人的年龄大, 丙的年龄与从事 b 工作人的年龄不同, 从事 b 工作人的年龄比甲的年龄小, 则甲、乙、丙的职业分别是 ()

A. a, b, c B. c, a, b C. c, b, a D. b, c, a

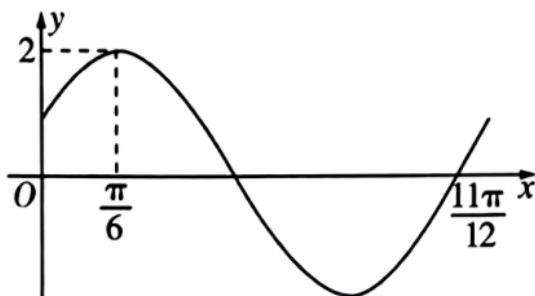
8. 在同一平面直角坐标系内, 函数 $y = f(x)$ 及其导函数 $y = f'(x)$ 的图象如图所示, 已知两图象有且仅有一个公共点, 其坐标为 $(0, 1)$, 则 ()



- A. 函数 $y = f(x) \cdot e^x$ 的最大值为 1
- B. 函数 $y = f(x) \cdot e^x$ 的最小值为 1
- C. 函数 $y = \frac{f(x)}{e^x}$ 的最大值为 1
- D. 函数 $y = \frac{f(x)}{e^x}$ 的最小值为 1

二、多选题

9. 已知 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega > 0, 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$) 的部分图象如图所示, 则 ()



- A. $f(0) = 1$
- B. $f(x)$ 在区间 $\left(\frac{4\pi}{3}, \frac{11\pi}{12}\right)$ 单调递减
- C. $f(x)$ 在区间 $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}\right]$ 的值域为 $[-1, \sqrt{3}]$
- D. $f(x)$ 在区间 $\left(\frac{\pi}{2}, 2\pi\right)$ 有 3 个极值点
10. 设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 其前 n 项和为 S_n , 前 n 项积为 T_n , 并且满足条件 $a_1 > 1, a_7 a_8 > 1, \frac{a_7 - 1}{a_8 - 1} < 0$. 则下列结论正确的是 ()

A. $0 < q < 1$ B. $a_7 a_9 < 1$ C. T_n 的最大值为 T_7 D. S_n 的最大值为 S_7

11. 一个圆锥的侧面展开图是圆心角为 $\frac{2\pi}{3}$ ，面积为 3π 的扇形，则下列论断正确的是

()

A. 圆锥的母线与底面所成角的正弦值为 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

B. 圆锥内部有一个圆柱，并使圆柱的一个底面落在圆锥的底面内，当圆柱的体积最大时，圆柱的高为 $\frac{2}{3}$

C. 圆锥内部有一个球，当球的半径最大时，球的内接正四面体的棱长为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

D. 圆锥内部有一个正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ ，并使底面 $ABCD$ 落在圆锥的底面内，当正方体的棱长最大时，正方体的表面上与点 A 距离为 $\frac{4\sqrt{6}}{9}$ 的点的集合形成一条曲线，则这条曲线长度为 $\frac{5\sqrt{6}}{9}\pi$

三、填空题

12. $\left(x - \frac{y^2}{x}\right)(x+y)^5$ 的展开式中 x^3y^3 的系数为_____.

13. 直线 l 与抛物线 $x^2 = 4y$ 交于 A, B 两点，若 $|AB| = 6$ ，则 AB 中点 M 到 x 轴距离的最小值是_____.

14. 有序实数组 $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ($n \in \mathbf{N}^*$) 称为 n 维向量， $|x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|$ 为该向量的范数，范数在度量向量的长度和大小方面有着重要的作用. 已知 n 维向量 $\overset{\text{I}}{a} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ，其中 $x_i \in \{0, 1, 2\}, i = 1, 2, \dots, n$. 记范数为奇数的 $\overset{\text{I}}{a}$ 的个数为 A_n ，则 $A_4 =$ _____；

$A_{2n+1} =$ _____. (用含 n 的式子表示)

四、解答题

15. 在 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c ，已知 $a \sin B = -\sqrt{3} b \cos A$ ，角 A 的平分线交边 BC 于点 D ，且 $AD = 1$.

(1) 求角 A 的大小；

(2) 若 $BC = 2\sqrt{5}$ ，求 $\triangle ABC$ 的面积.

16. 已知函数 $f(x) = \frac{x}{e^x} - ae^x, a \in \mathbf{R}$.

(1) 当 $a = 0$ 时，求 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处的切线方程；

(2)当 $a=1$ 时, 求 $f(x)$ 的单调区间和极值;

(3)若对任意 $x \in \mathbf{R}$, 有 $f(x) \leq e^{x-1}$ 恒成立, 求 a 的取值范围.

17. 在平面直角坐标系中, F_1, F_2 分别为双曲线 $C: 3x^2 - y^2 = a^2 (a > 0)$ 的左右焦点, 过 F_2

的直线 l 与双曲线 C 的右支交于 A, B 两点. 当 l 与 x 轴垂直时, $\triangle ABF_1$ 面积为 12.

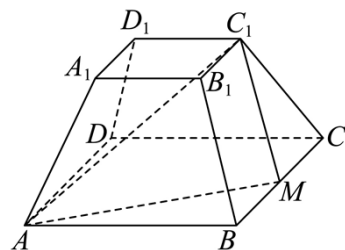
(1)求双曲线 C 的标准方程;

(2)当 l 与 x 轴不垂直时, 作线段 AB 的中垂线, 交 x 轴于点 D . 试判断 $\frac{|DF_2|}{|AB|}$ 是否为定

值. 若是, 请求出该定值; 若不是, 请说明理由.

18. 正四棱台 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的下底面边长为 $2\sqrt{2}$, $A_1B_1 = \frac{1}{2}AB$, M 为 BC 中点, 已

知点 P 满足 $\vec{AP} = (1-\lambda)\vec{AB} + \frac{1}{2}\lambda\vec{AD} + \lambda\vec{AA_1}$, 其中 $\lambda \in (0, 1)$.



(1)求证 $D_1P \perp AC$;

(2)已知平面 AMC_1 与平面 $ABCD$ 所成角的余弦值为 $\frac{3}{7}$, 当 $\lambda = \frac{2}{3}$ 时, 求直线 DP 与平面

AMC_1 所成角的正弦值.

19. 入冬以来, 东北成为全国旅游和网络话题的“顶流”. 南方的小土豆们纷纷北上体验东北最美的冬天, 这个冬天火的不只是东北的美食、东北人的热情, 还有东北的洗浴中心, 拥挤程度堪比春运, 南方游客直接拉着行李箱进入. 东北某城市洗浴中心花式宠“且”, 为给顾客更好的体验, 推出了 A 和 B 两个套餐服务, 顾客可自由选择 A 和 B 两个套餐之一, 并在 App 平台上推出了优惠券活动, 下表是该洗浴中心在 App 平台 10 天销售优惠券情况.

日期 t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
销售量 y (千张)	1.9	1.98	2.2	2.36	2.43	2.59	2.68	2.76	2.7	0.4

经计算可得: $\bar{y} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} y_i = 2.2$, $\sum_{i=1}^{10} t_i y_i = 118.73$, $\sum_{i=1}^{10} t_i^2 = 385$.

(1)因为优惠券购买火爆, App 平台在第 10 天时系统出现异常, 导致当天顾客购买优惠券数量大幅减少, 现剔除第 10 天数据, 求 y 关于 t

的经验回归方程（结果中的数值用分数表示）；

(2)若购买优惠券的顾客选择 A 套餐的概率为 $\frac{2}{5}$ ，选择 B 套餐的概率为 $\frac{3}{5}$ ，并且 A 套餐可以用一张优惠券，B 套餐可以用两张优惠券，记 App 平台累计销售优惠券为 n 张的概率为 P_n ，求 P_n ；

(3)记（2）中所得概率 P_n 的值构成数列 $\{P_n\} (n \in \mathbb{N}^*)$ 。

①求 P_n 的最值；

②数列收敛的定义：已知数列 $\{a_n\}$ ，若对于任意给定的正数 ε ，总存在正整数 N_0 ，使得当 $n > N_0$ 时， $|a_n - a| < \varepsilon$ ，（ a 是一个确定的实数），则称数列 $\{a_n\}$ 收敛于 a 。根据数列收敛的定义证明数列 $\{P_n\}$ 收敛。

参考公式：
$$\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x} \cdot \bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2}, \quad \hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}.$$

参考答案:

1. D

【分析】化简集合 B ，由集合的交集定义计算即可.

【详解】因为 $B = \{x | x^3 = x\} = \{-1, 0, 1\}$,

所以 $A \cap B = \{-1, 0, 1\}$.

故选: D

2. B

【分析】不共线的非零向量可以作为向量的基底.

【详解】因为 $\vec{e}_1 = (-1, 2)$ 与 $\vec{e}_2 = (5, 7)$ 不共线, 其余选项中 $\vec{e}_1$ 、 $\vec{e}_2$ 均共线, 所以 B 选项中的两向量可以作为基底.

故选: B

【点睛】本题考查平面向量的基本定理及其意义, 属于基础题.

3. D

【分析】设出对应复数, 利用复数的运算性质整体代值运算即可.

【详解】设 $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$, 且 $a, b, c, d \in \mathbb{R}$,

由已知得 $|z_1| = |z_2| = 3$, $\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{c^2 + d^2} = 3$, 得 $a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = 9$,

又 $z_1 + z_2 = a + bi + c + di = a + c + (b + d)i = 2 - \sqrt{5}i$,

故 $a + c = 2$, $b + d = -\sqrt{5}$,

同时平方得 $a^2 + 2ac + c^2 = 4$, $b^2 + 2bd + d^2 = 5$,

相加并化简得 $2ac + 2bd = -9$,

而 $|z_1 - z_2| = \sqrt{(a - c)^2 + (b - d)^2} = \sqrt{(a + c)^2 + (b + d)^2 - (4ac + 4bd)}$,

$= \sqrt{(a + c)^2 + (b + d)^2 - 2(2ac + 2bd)} = \sqrt{9 - 2 \times (-9)} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$.

故选: D

4. D

【分析】设经过 x 个小时才能驾驶, 则 $0.6 \times 100 \times (1 - 30\%)^x < 20$, 再根据指数函数的性质及对数的运算计算可得.

【详解】设经过 x 个小时才能驾驶，则 $0.6 \times 100 \times (1 - 30\%)^x < 20$ 即 $0.7^x < \frac{1}{3}$.

由于 $y = 0.7^x$ 在定义域上单调递减， $x > \log_{0.7} \frac{1}{3} = \frac{\lg \frac{1}{3}}{\lg 0.7} = \frac{\lg 1 - \lg 3}{\lg 7 - 1} = \frac{-0.48}{0.85 - 1} = \frac{0.48}{0.15} = 3.2$.

他至少经过 4 小时才能驾驶.

故选：D.

5. C

【分析】先证明函数 $f(x) = 3\log_2(\sqrt{x^2+1}-x)$ 为奇函数，由 $f(a) + f(3b-1) = 0$ 可得 $a + 3b = 1$,

再利用基本不等式求 $\frac{3b+a}{ab}$ 的最小值.

【详解】因为 $f(x) = 3\log_2(\sqrt{x^2+1}-x)$ ，函数的定义域为 $\mathbf{R}$ ，关于原点对称，

因为 $f(-x) = 3\log_2(\sqrt{(-x)^2+1}+x) = 3\log_2 \frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x} = -3\log_2(\sqrt{x^2+1}-x) = -f(x)$,

所以 $f(x) = 3\log_2(\sqrt{x^2+1}-x)$ 为奇函数，有 $f(-x) + f(x) = 0$,

由解析式可以看出函数 $f(x) = 3\log_2(\sqrt{x^2+1}-x) = 3\log_2\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}\right)$ 为减函数，

因为 $f(a) + f(3b-1) = 0$,

所以 $a + 3b - 1 = 0$ ，即 $a + 3b = 1$,

因为 a, b 为正数，

所以 $\frac{3b+a}{ab} = \frac{3}{a} + \frac{1}{b} = \left(\frac{3}{a} + \frac{1}{b}\right)(a+3b) = \frac{9b}{a} + \frac{a}{b} + 3 + 3 \geq 2\sqrt{\frac{9b}{a} \cdot \frac{a}{b}} + 6 = 12$,

当且仅当 $\begin{cases} \frac{9b}{a} = \frac{a}{b} \\ a + 3b = 1 \end{cases}$ ，即 $\begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = \frac{1}{6} \end{cases}$ 时等号成立.

故选：C

6. D

【分析】借助分层抽样的方差公式计算即可得.

【详解】设该班男生组成绩和女生组成绩的平均分分别为 $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$ ，两个班的总的平均分为

$\bar{x}$,

则 $s^2 = \frac{35}{35+25} \left[s_1^2 + (\bar{x} - \bar{x}_1)^2 \right] + \frac{25}{35+25} \left[s_2^2 + (\bar{x} - \bar{x}_2)^2 \right]$

$$s^2 = \frac{7[s_1^2 + (\bar{x} - \bar{x}_1)^2]}{12} + \frac{5[s_2^2 + (\bar{x} - \bar{x}_2)^2]}{12} \geq \frac{7s_1^2 + 5s_2^2}{12},$$

故选：D.

7. A

【分析】根据题意合理进行推理，求解答案即可.

【详解】由题意得丙的年龄与从事**b**工作人的年龄不同，故从事**b**工作的人不是丙，
又从事**b**工作人的年龄比甲的年龄小，故从事**b**工作的人不是甲，
则推出从事**b**工作的人一定是乙，
又从事**b**工作人的年龄比甲的年龄小，故乙的年龄小于甲的年龄，
而乙的年龄比从事**c**工作人的年龄大，故从事**c**工作的人是丙，
可反推出从事**a**工作的人是甲，显然甲、乙、丙的职业分别是**a, b, c**.

故选：A

8. C

【分析】AB 选项，先判断出虚线部分为 $y = f'(x)$ ，实线部分为 $y = f(x)$ ，求导得到

$y = f(x) \cdot e^x$ 在 $\mathbb{R}$ 上单调递增，AB 错误；再求导得到 $x \in (-\infty, 0)$ 时， $y = \frac{f(x)}{e^x}$ 单调递增，当 $x \in (0, +\infty)$ 时， $y = \frac{f(x)}{e^x}$ 单调递减，故 C 正确，D 错误.

【详解】AB 选项，由题意可知，两个函数图像都在 x 轴上方，任何一个为导函数，

则另外一个函数应该单调递增，判断可知，虚线部分为 $y = f'(x)$ ，

实线部分为 $y = f(x)$ ，

故 $y' = f'(x) \cdot e^x + f(x) \cdot e^x = (f'(x) + f(x)) \cdot e^x > 0$ 恒成立，

故 $y = f(x) \cdot e^x$ 在 $\mathbb{R}$ 上单调递增，则 A，B 显然错误，

对于 C，D， $y' = \frac{f'(x)e^x - f(x)e^x}{(e^x)^2} = \frac{f'(x) - f(x)}{e^x}$ ，

由图像可知 $x \in (-\infty, 0)$ ， $y' = \frac{f'(x) - f(x)}{e^x} > 0$ 恒成立，故 $y = \frac{f(x)}{e^x}$ 单调递增，

当 $x \in (0, +\infty)$ ， $y' = \frac{f'(x) - f(x)}{e^x} < 0$ ， $y = \frac{f(x)}{e^x}$ 单调递减，

所以函数 $y = \frac{f(x)}{e^x}$ 在 $x = 0$ 处取得极大值，也为最大值， $\frac{f(0)}{e^0} = 1$ ，C 正确，D 错误.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。

如要下载或阅读全文，请访问：

<https://d.book118.com/608100003130006060>