五点共圆问题 与 Clifford 链定理

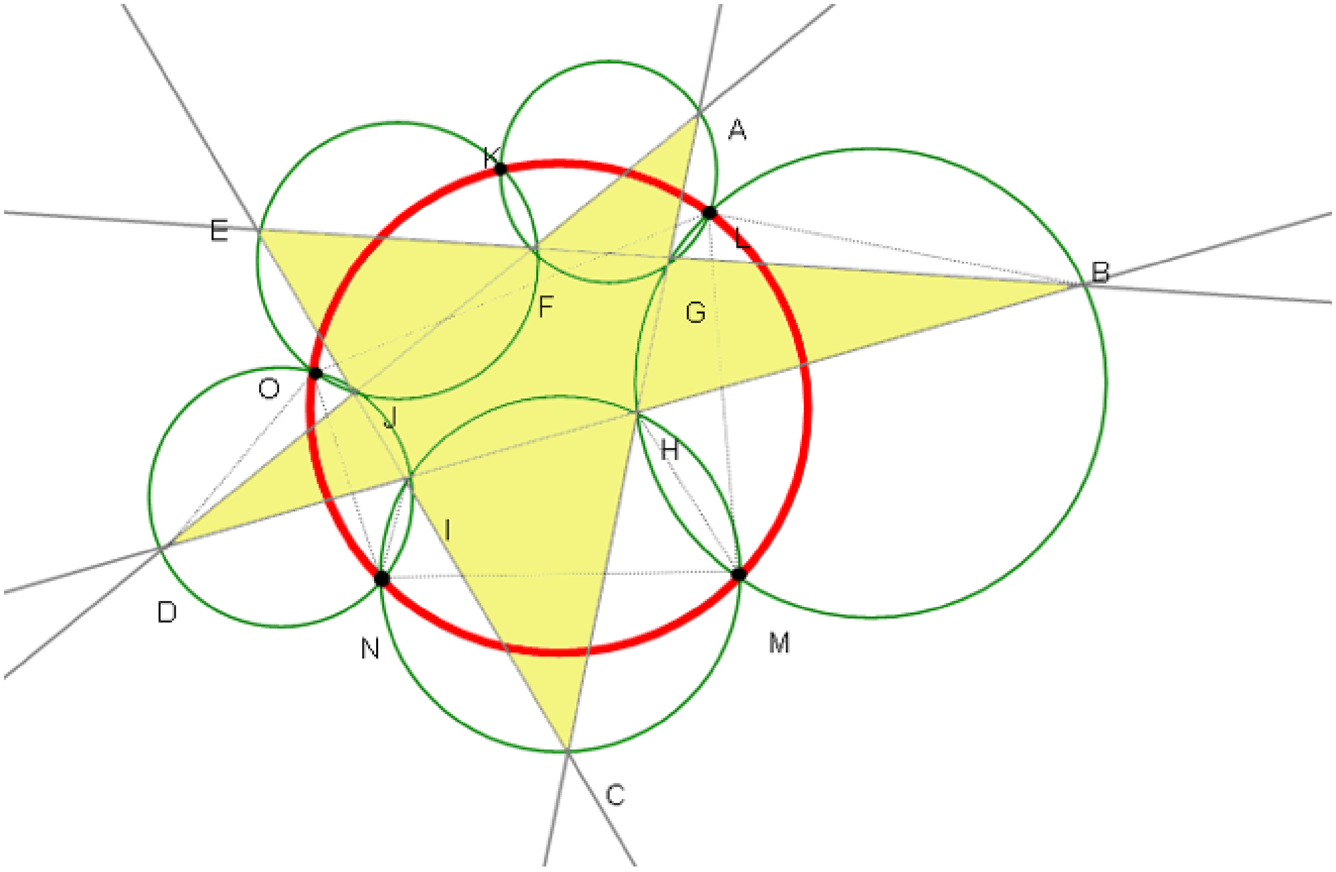
北京师范大学 张英伯，叶彩娟

2023年4月

一、引子

- 在世纪之交的2023年5月，当初的国家主席江泽民视察澳门濠江中学，兴致勃勃地出了一道“五点共圆”的几何题。

- 江泽民先生随即给数学家和数学教育家张景中院士打电话征询答案，并亲函濠江中学参照。与此同步，濠江中学的四位数学老师也各自独立地作出了解答，他们的数学功底令人敬佩。



A
K
E
L
B
F
G
O
J
H
I
D
N
M
C

- 这个图形就是五点共圆问题。当初的表述是：给出一种不规则的五角星，做所得五个小三角形的外接圆，每相邻的两个小三角形的外接圆交于两个点，其中之一是所得五边形的顶点。在五边形五顶点外的交点共有五个，证明这五点共圆。
- 2023年春天，我去德国访问。有一天我的老板，代数学家 Claus Ringel 问我，你懂得“江问题”吗？正当我在脑子里紧张地搜索江姓数学家的名单时，老板得意地笑了，“哎呀呀，你们的国家主席呀！”

- 那天Claus 刚从伦敦开会回来，他说在伦敦的会议上，数学家们聊起了江泽民先生提出的五点共圆问题，觉得国家主席关注几何学非常有趣。Claus 随手在黑板上画出了五点共圆问题的推广。

- 2023 年底，澳门的一种研讨班邀请我去做报告，报告刚好在濠江中学举行。濠江中学校方与我们会面时简介了当年江泽民主席的视察。我一下子想起三年前与 Claus 的对话，就临时变化报告题目，凭记忆谈了推广的五点共圆问题。报告之后，研讨班的组织者力主并屡次敦促将这一问题的证明写成文章。

- 回到学校，正赶上本科生准备毕业论文，一种保送硕士的女孩儿希望读代数方向的硕士，来我这里要题目，我说你试着找找五点共圆问题的推广吧。
- 感谢今日的互联网，把这个世界全部的信息摆在了每一种人的面前。
- 经过一种礼拜的搜索，女孩子终于找到了一位日本数学家冈洁的传记，在传记的最终一页的最终一种脚注中，提到 Clifford 定理将五点共圆问题推广到了任意的正整数。

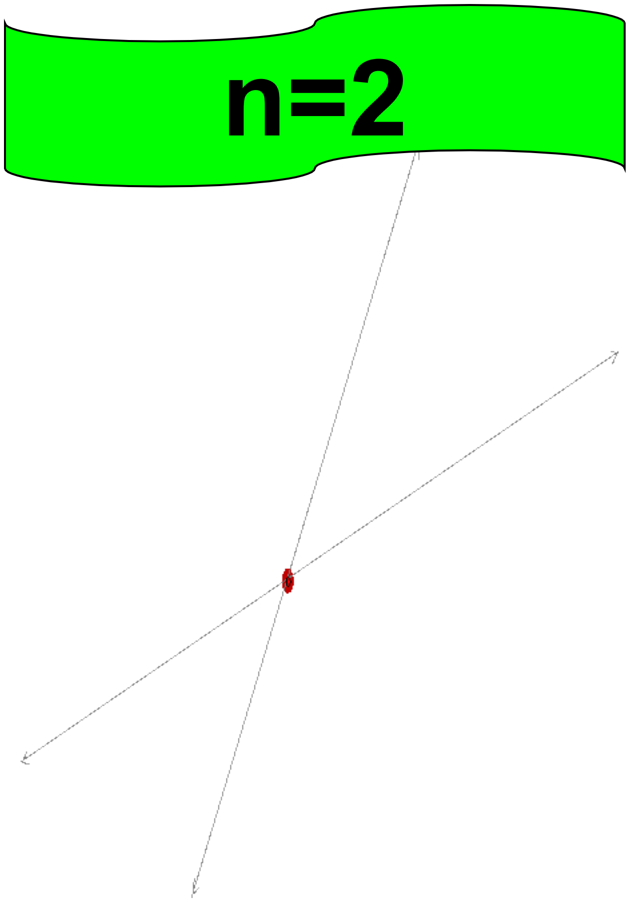
- 有了这个名字，事情便简朴多了。女孩立即去搜索 Clifford 全部文章的目录，找到了他有关这个问题的文章：On Miquel’s Theorem. 遗憾的是年代过于长远，我们的北京图书馆，中科院图书文件中心都没有收藏。
- 再一次感谢互联网，北图不久告知我们文章在大英图书馆找到了，付钱之后就能够扫描过来。还是因为年代过于长远，大英图书馆将刊有这篇文章的杂志收在一种乡间的书库。付过的钱被退了回来，原文的扫描和复印件都不能提供，原因无可奉告。

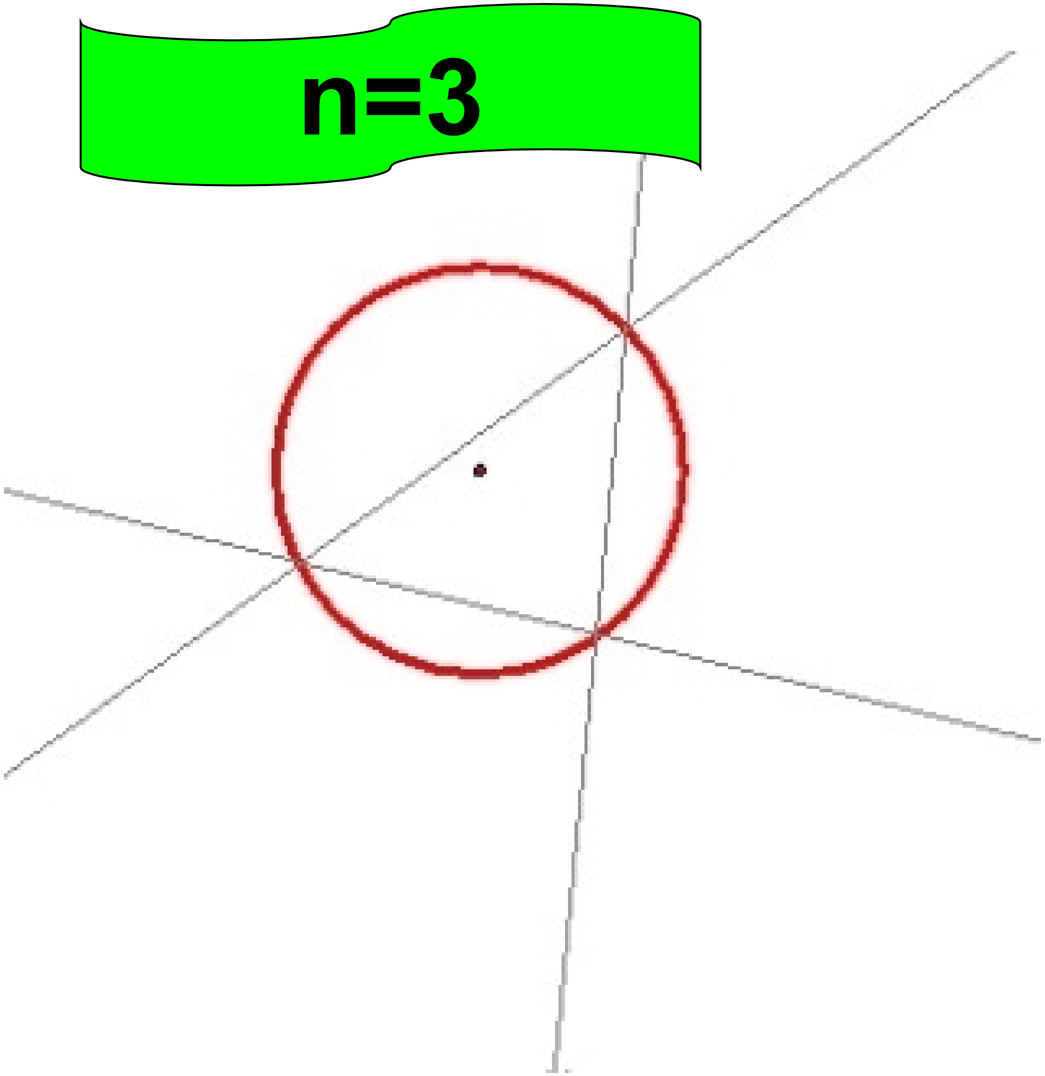
- William Kingdon Clifford（1845-79），英国的几何代数学家，34岁辞世。
- 他建立了Clifford代数，这是一种互换环上的有限维结合代数，能够看作是复数域和 Hamilton四元数除环的推广，他将这种代数应用于运动几何。他还研究了非欧氏空间中的运动，引入了平行线的定义，并对微分几何做出贡献，创建了Klein-Clifford 空间。
- 直到今日，Clifford代数依然是数学物理、几何、分析领域中的热门话题。

- 在十九世纪下半叶和二十世纪初，许多欧美大数学家致力于建立欧几里得几何的公理化体系。希尔伯特用了三十年的时间，先后出版七稿，写成了《几何基础》一书。当《几何基础》引起广泛讨论的时候，许多古老的几何问题，例如与三角形、直线和圆有关的点等问题被重新发觉并研究。
- 1838年，Miquel证明了有关四圆共点的一种定理。在这个定理的基础上，Clifford于1871年建立了Clifford链定理，这是数学史上非常著名的一种有趣而又奇妙的定理。

- 那个年代的许多欧美数学家都研究并论证过这个定理，一方面寻找它的多种证明措施，另一方面研究这些点圆和其他某些著名的点圆之间的关系，还有人主动探索它的扩展，例如向高维情况的引伸。在当初的数学杂志上，不断地刊登与Clifford链定理有关的研究成果。
- 我国正处于清朝末年，还未进入近代数学的研究领域，所以对当初的某些研究都比较陌生。
- 因为没有见到Clifford的原文，本文所讲的证明，是基于英国几何学家 F. Morley于1923年刊登在美国数学会 Transaction上的一篇文章“On the metric geometry of the plane n-line”。

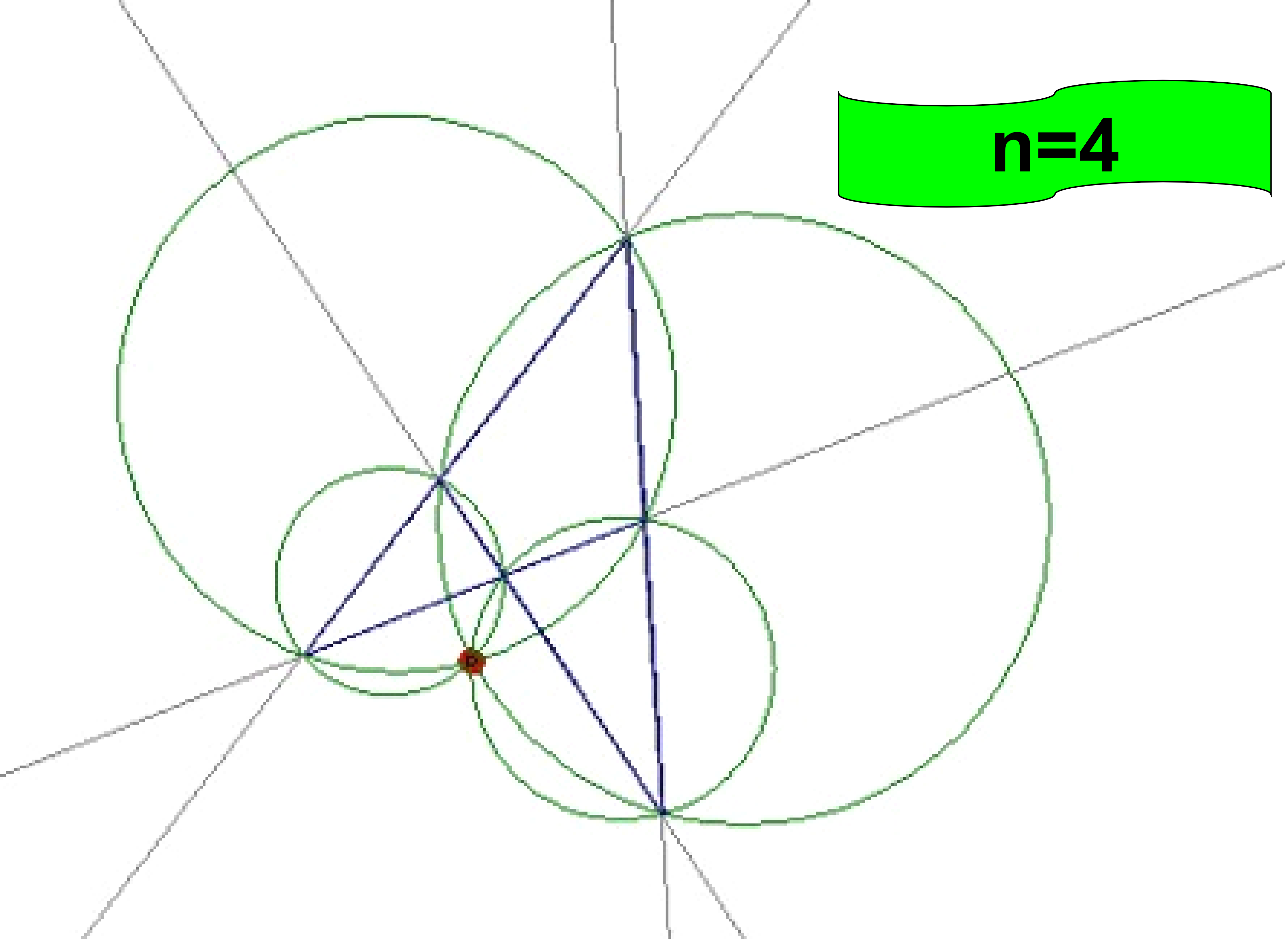
二、Clifford 链定理的表述





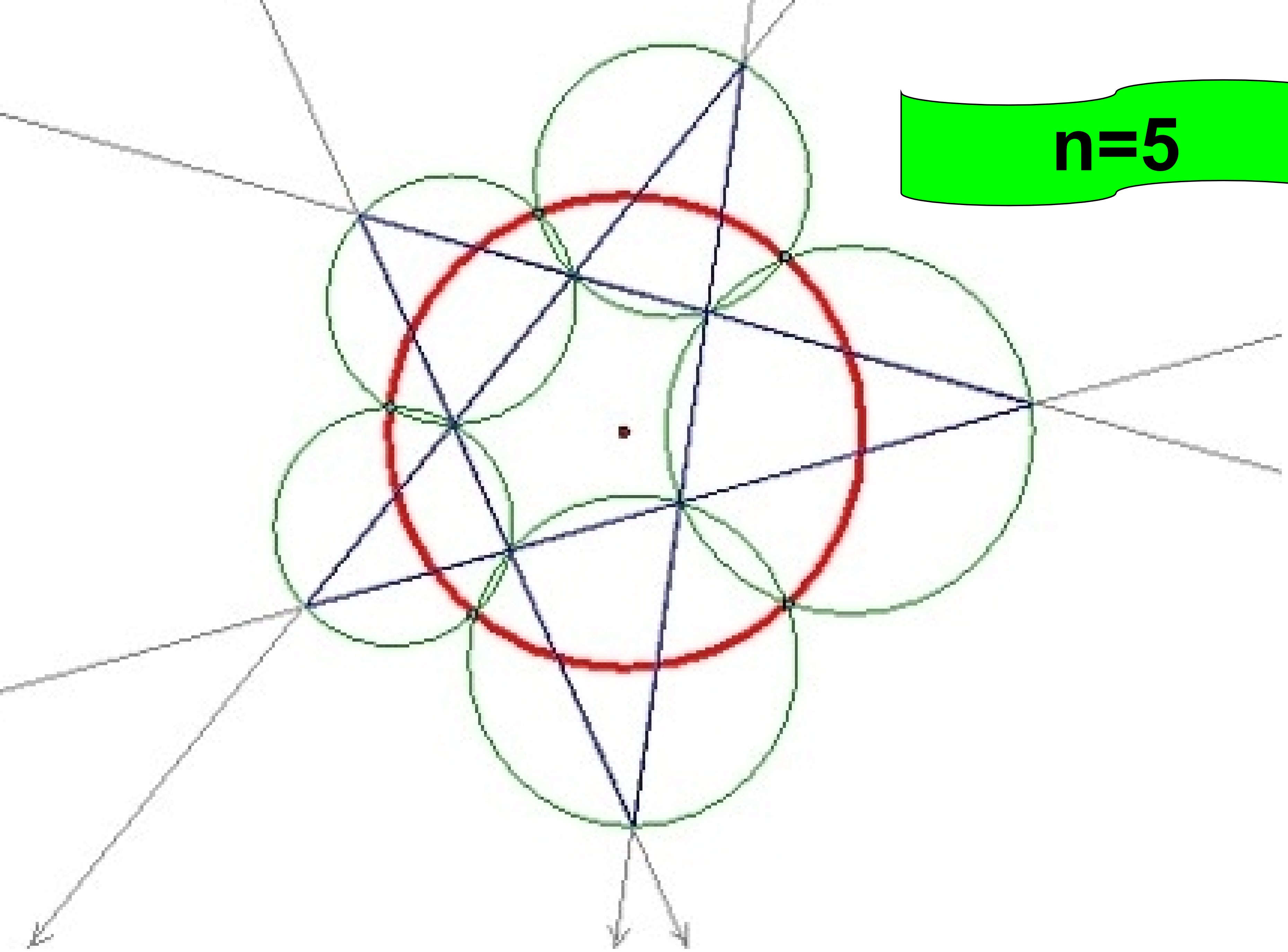
任选平面内两条相交直线，
则这两条直线拟定一种**点**。

任选平面内两两相交，
且不共点的三条直线，
则其中每两条为一组能够拟定一种点，
共有三个点，
那么这三个点拟定一种**圆**。



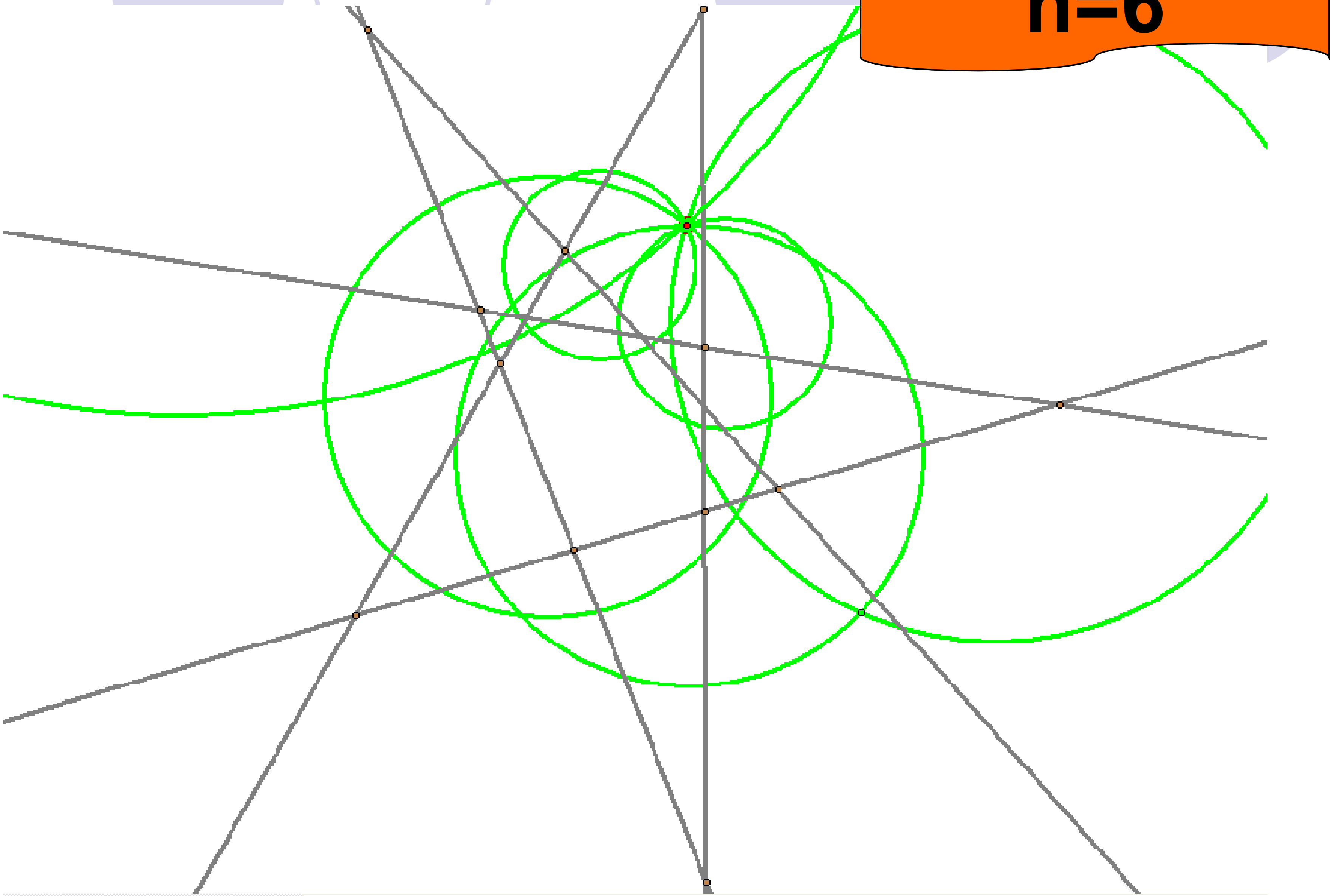
n=4

- 任选平面内两两相交，
- 且任意三条直线都不共点的四条直线，
- 则其中每三条为一组能够拟定一种圆，共有四个这么的圆，
- 则这四个圆共点。
- 此点被称为 **Wallace 点**。



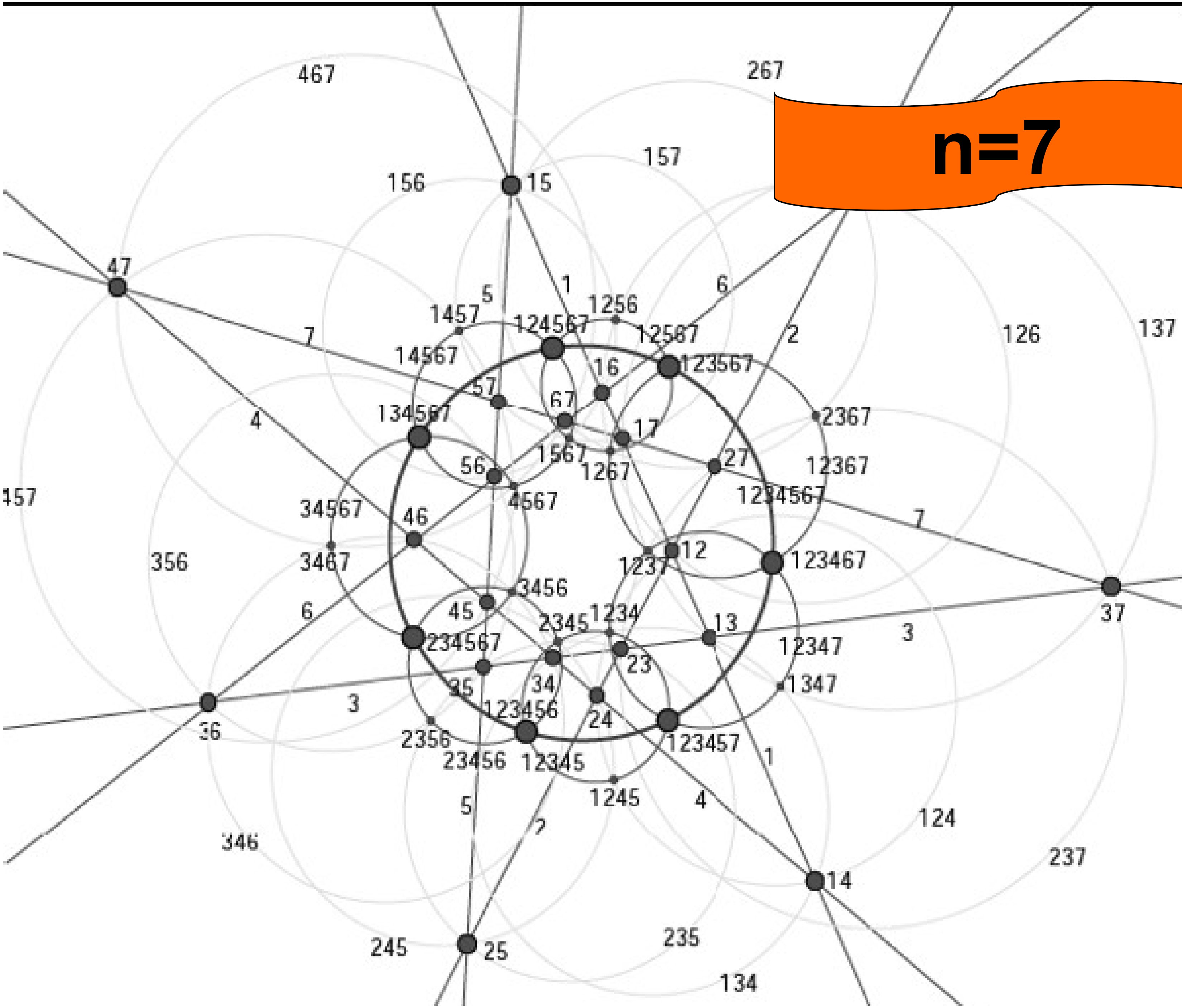
n=5

- 任取平面内两两相交，
- 且任意三条直线都不共点的五条直线，
- 则其中每四条作为一组可拟定如上所述
- 的一种 Wallace 点，共有五个这么的点，
- 那么这五个点共圆，
- 此圆被称为 Miquel 圆
- （即五点共圆问题）。


n=6

- 任取平面上两两相交的六条直线，且任意三条直线都不共点，
- 则其中每五条为一组能够拟定一种 Miquel 圆，共有六个这么的圆，
- 则这六个圆共点。

n=7


467
267
157
156
15
47
5
1
1256
6
1457
124567
12567
2
126
137
7
14567
16
123567
57
67
134567
4
17
2367
1567
56
27
12367
1267
457
4567
34567
1234567
46
7
12
356
3467
1237
123467
3456
37
6
45
2345
1234
13
3
234567
12347
23
34
35
1347
3
123456
24
36
2356
123457
1
23456
12345
1245
4
5
2
124
346
237
14
245
25
235
134

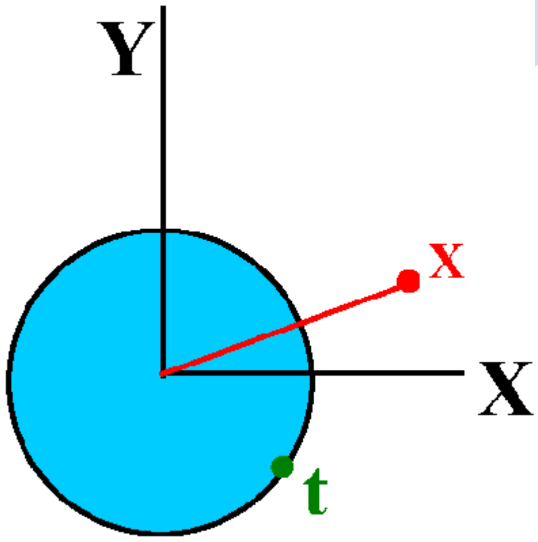
- 任取平面内两两相交，
- 且任意三条直线都不共点的七条直线，
- 则其中每六条作为一组可拟定如上所述
- 的一种点，共有七个这么的点，
- 那么这七个点共圆。

一般地，

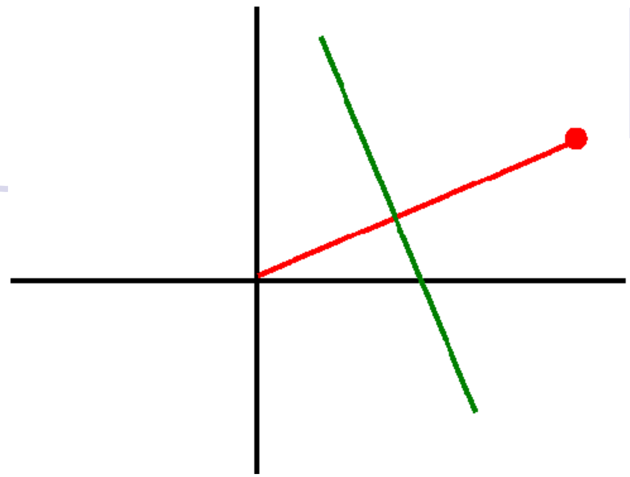
- 任取平面内两两相交，且任意三条直线都不共点的2n条直线，则其中每2n-1条直线可拟定一种圆，共拟定 2n 个圆，那么这 2n 个圆交于一点，称为 2n 条直线的 Clifford 点；
- 任取平面内两两相交，且任意三条直线都不共点的 2n+1条直线，则其中每 2n 条直线可拟定一种 Clifford 点，共拟定 2n+1个点，那么这 2n+1 个点共圆，称为 2n+1 条直线的 Clifford 圆。

三、直线方程

- 用平面几何的措施归纳地证明 Clifford 定理几乎是不可能的，我们已经看到 n=7 的情况图形有多么复杂，实际上五点共圆问题已经够复杂了。那么用平面解析几何呢？用复平面呢？这么就能够**充分借助当代数学的工具。**让我们来试一试。
- 目前考虑**复平面 C**, 建立原点，实轴和虚轴。



- 用 x_1, t_1 分别表达两个**拟定的复数**，其中 t_1 的模为1，也就是说，t_1在单位圆上。其次，用 x, t 表达**两个复变量**，其中 t 的模为1，也就是说 t 在单位圆上运动。



- 考察公式

$$x = \frac{x_1 t_1}{t_1 - t}$$

- 当 t 在单位圆周上运动时，x 跑过原点 0 和点 x_1 **连线的垂直平分线**。

- 实际上，$x-0=\frac{x_1t_1}{t_1-t}$ 而 $x-x_1=\frac{x_1t}{t_1-t}$
因为 t 和 t_1 的模都是1， 故

$$|x-0|=|x-x_1|$$

- 另一方面， 当 t 趋近于 t_1 时， x 的模趋近于无穷大；而且 x 是 t 的连续函数。所以我们**得到了一条直线**。