

专题 11 最值模型-阿氏圆问题

最值问题在中考数学常以压轴题的形式考查，“阿氏圆”又称“阿波罗尼斯圆”，主要考查转化与化归等的数学思想。在各类考试中都以高档题为主，中考说明中曾多处涉及。本专题就最值模型中的阿氏圆问题进行梳理及对应试题分析，方便掌握。

【模型背景】已知平面上两点 A 、 B ，则所有满足 $PA=k \cdot PB$ ($k \neq 1$) 的点 P 的轨迹是一个圆，这个轨迹最早由古希腊数学家阿波罗尼斯发现，故称“阿氏圆”。

【模型解读】如图 1 所示， $\odot O$ 的半径为 r ，点 A 、 B 都在 $\odot O$ 外， P 为 $\odot O$ 上一动点，已知 $r=k \cdot OB$ ，连接 PA 、 PB ，则当“ $PA+k \cdot PB$ ”的值最小时， P 点的位置如何确定？

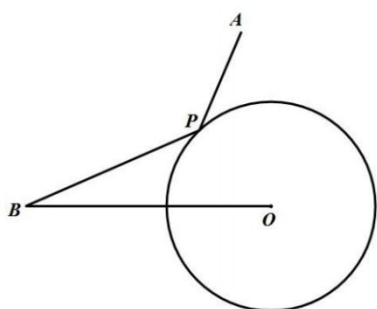


图1

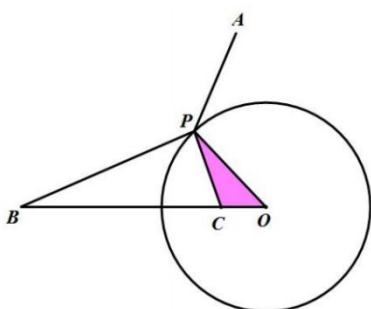


图2

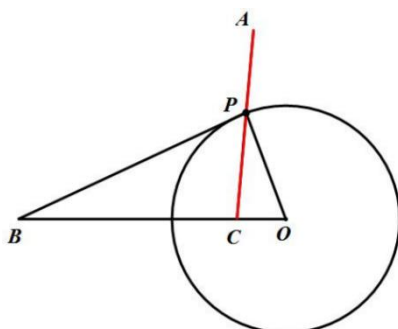


图3

如图 2，在线段 OB 上截取 OC 使 $OC=k \cdot r$ ，则可说明 $\triangle BPO$ 与 $\triangle PCO$ 相似，即 $k \cdot PB=PC$ 。

故本题求“ $PA+k \cdot PB$ ”的最小值可以转化为“ $PA+PC$ ”的最小值，

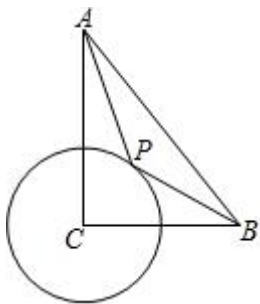
其中与 A 与 C 为定点， P 为动点，故当 A 、 P 、 C 三点共线时，“ $PA+PC$ ”值最小。如图 3 所示：

注意区分胡不归模型和阿氏圆模型：

在前面的“胡不归”问题中，我们见识了“ $k \cdot PA+PB$ ”最值问题，其中 P 点轨迹是直线，而当 P 点轨迹变为圆时，即通常我们所说的“阿氏圆”问题。

【最值原理】两点之间线段最短及垂线段最短解题。

例 1. (2022·安徽·九年级期末) 如图，在 $Rt\triangle ABC$ 中， $\angle ACB=90^\circ$ ， $CB=7$ ， $AC=9$ ，以 C 为圆心、3 为半径作 $\odot C$ ， P 为 $\odot C$ 上一动点，连接 AP 、 BP ，则 $\frac{1}{3}AP+BP$ 的最小值为 ()

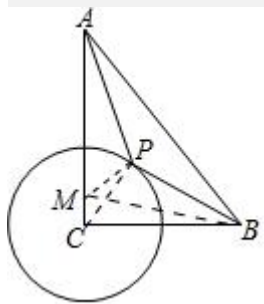


A. 7

B. $5\sqrt{2}$ C. $4+\sqrt{10}$ D. $2\sqrt{13}$ **【答案】** B

【详解】思路引领：如图，在 CA 上截取 CM ，使得 $CM=1$ ，连接 PM ， PC ， BM 。利用相似三角形的性质证明 $MP=\frac{1}{3}PA$ ，可得 $\frac{1}{3}AP+BP=PM+PB\geq BM$ ，利用勾股定理求出 BM 即可解决问题。

答案详解：如图，在 CA 上截取 CM ，使得 $CM=1$ ，连接 PM ， PC ， BM 。



$$\because PC=3, CM=1, CA=9, \therefore PC^2=CM\cdot CA, \therefore \frac{PC}{CA}=\frac{CM}{CP},$$

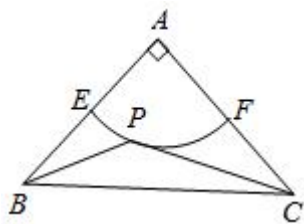
$$\because \angle PCM=\angle ACP, \therefore \triangle PCM\sim\triangle ACP, \therefore \frac{PM}{PA}=\frac{PC}{AC}=\frac{1}{3},$$

$$\therefore PM=\frac{1}{3}PA, \therefore \frac{1}{3}AP+BP=PM+PB,$$

$$\because PM+PB\geq BM, \text{ 在 Rt}\triangle BCM \text{ 中, } \because \angle BCM=90^\circ, CM=1, BC=7,$$

$$\therefore BM=\sqrt{1^2+7^2}=5\sqrt{2}, \therefore \frac{1}{3}AP+BP\geq 5\sqrt{2}, \therefore \frac{1}{3}AP+BP \text{ 的最小值为 } 5\sqrt{2}. \text{ 故选: B.}$$

例 2. (2020·广西中考真题) 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $AB=AC=4$ ，点 E ， F 分别是 AB ， AC 的中点，点 P 是扇形 AEF 的 $\widehat{EF}$ 上任意一点，连接 BP ， CP ，则 $\frac{1}{2}BP+CP$ 的最小值是_____。

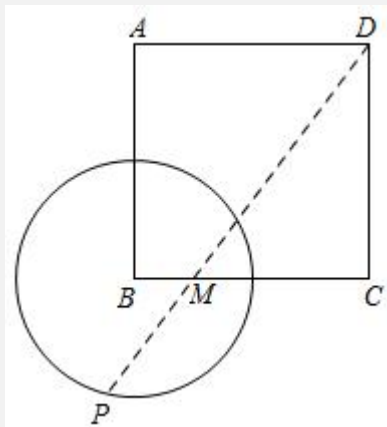
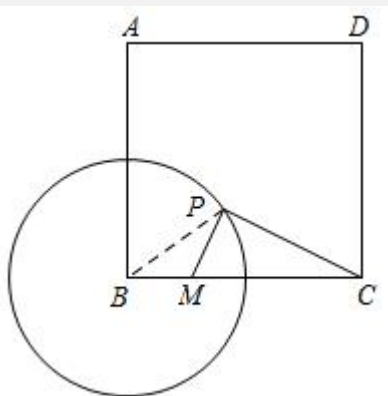
**【答案】** $\sqrt{17}$ 。

【分析】在 AB 上取一点 T ，使得 $AT=1$ ，连接 PT ， PA ， CT 。证明 $\triangle PAT\sim\triangle BAP$ ，推出 $\frac{PT}{PB}=\frac{AP}{AB}=\frac{1}{2}$ ，

推出 $PT=\frac{1}{2}PB$ ，推出 $\frac{1}{2}PB+CP=CP+PT$ ，根据 $PC+PT\geq TC$ ，求出 CT 即可解决问题。

【详解】解：在 AB 上取一点 T ，使得 $AT=1$ ，连接 PT ， PA ， CT 。

$$\because \angle PBM = \angle CBP \therefore \triangle BPM \sim \triangle BCP \therefore \frac{MP}{PC} = \frac{BM}{BP} = \frac{1}{2} \therefore MP = \frac{1}{2}PC \therefore PD - \frac{1}{2}PC = PD - MD$$



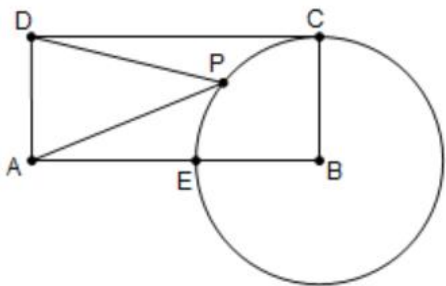
在 $\triangle PDM$ 中, $PD - PM < DM$, 当 D, M, P 共线时, $PD - PM = DM$ 为最大值,

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形 $\therefore \angle C = 90^\circ$

在 $Rt\triangle CDM$ 中, $DM = \sqrt{DC^2 + MC^2} = \sqrt{6^2 + \left(\frac{9}{2}\right)^2} = \frac{15}{2}$ 故答案为: $\frac{15}{2}$.

【点睛】 本题考查了圆的性质, 相似三角形的性质与判定, 勾股定理, 构造 $\frac{1}{2}PC$ 是解题的关键.

例 4. (2022·浙江·舟山九年级期末) 如图, 矩形 $ABCD$ 中, $AB = 4$, $AD = 2$, 以 B 为圆心, 以 BC 为半径画圆交边 AB 于点 E , 点 P 是弧 CE 上的一个动点, 连结 PD, PA , 则 $\frac{1}{2}AP + DP$ 的最小值为 ()



A. $\sqrt{10}$

B. $\sqrt{11}$

C. $\sqrt{13}$

D. $\sqrt{14}$

【答案】C

【分析】 连接 BP , 取 BE 的中点 G , 连接 PG , 通过两组对应边成比例且夹角相等, 证明 $\triangle BPG \sim \triangle BAP$, 得到 $PG = \frac{1}{2}AP$, 则 $\frac{1}{2}AP + DP = PG + DP$, 当 P, D, G 三点共线时, 取最小值, 求出 DG 的长得到最小值.

【详解】 解: 如图, 连接 BP , 取 BE 的中点 G , 连接 PG ,

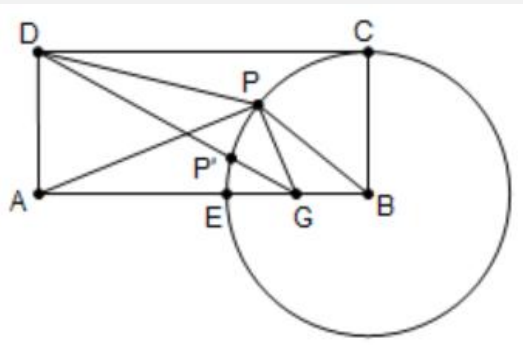
$$\because AD = BC = BP = 2, \quad AB = 4, \quad \therefore \frac{BP}{BA} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2},$$

$$\because G \text{ 是 } BE \text{ 的中点}, \quad \therefore \frac{BG}{BP} = \frac{1}{2}, \quad \therefore \frac{BP}{BA} = \frac{BG}{BP},$$

$\because \angle PBG = \angle ABP$, $\therefore \triangle BPG \sim \triangle BAP$, $\therefore \frac{PG}{AP} = \frac{BP}{BA} = \frac{1}{2}$, $\therefore PG = \frac{1}{2}AP$,

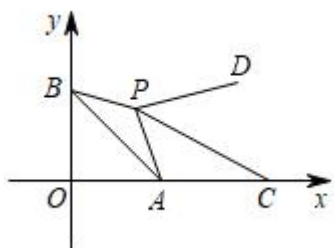
则 $\frac{1}{2}AP + DP = PG + DP$, 当 P、D、G 三点共线时, 取最小值, 即 DG 长,

$DG = \sqrt{AD^2 + AG^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$. 故选: C.



【点睛】 本题考查矩形和圆的基本性质, 相似三角形的性质和判定, 解题的关键是构造相似三角形将 $\frac{1}{2}AP$ 转换成 PG , 再根据三点共线求出最小值.

例 5. (2022·广东·广州市第二中学九年级阶段练习) 如图, 在平面直角坐标系中, $A(2, 0)$, $B(0, 2)$, $C(4, 0)$, $D(5, 3)$, 点 P 是第一象限内一动点, 且 $\angle APB = 135^\circ$, 则 $4PD + 2PC$ 的最小值为_____.



【答案】 20

【分析】 取一点 $T(1, 0)$, 连接 OP , PT , TD , 首先利用四点共圆证明 $OP = 2$, 再利用相似三角形的性质证明 $PT = \frac{1}{2}PC$, 推出 $4PD + 2PC = 4(PD + \frac{1}{2}PC) = 4(PD + PT)$, 根据 $PD + PT \geq DT$, 过点 D 作 $DE \perp OC$ 交 OC 于点 E , 即可求出 DT 的最小值, 即可得.

【详解】 解: 如图所示, 取一点 $T(1, 0)$, 连接 OP , PT , TD ,

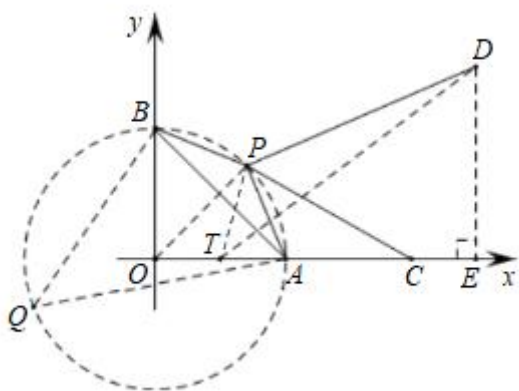
$\because A(2, 0)$, $B(0, 2)$, $C(4, 0)$, $\therefore OA = OB = 2$, $OC = 4$,

以 O 为圆心, OA 为半径作 $\odot O$, 在优弧 AB 上取一点 Q , 连接 QB , QA ,

$\because \angle Q = \frac{1}{2}\angle AOB = 45^\circ$, $\angle APB = 135^\circ$, $\therefore \angle Q + \angle APB = 45^\circ + 135^\circ = 180^\circ$,

$\therefore A, P, B, Q$ 四点共圆, $\therefore OP = OA = 2$,

$\because OP = 2$, $OT = 1$, $OC = 4$, $\therefore OP^2 = OC \cdot OT$, $\therefore \frac{OP}{OC} = \frac{OT}{OP}$,



$\therefore 4PD+2PC=4(PD+\frac{1}{2}PC)=4(PD+PT)$, 过点 D 作 $DE \perp OC$ 交 OC 于点 E ,

$\therefore PD+PT \geq DT$, $\therefore 4PD+2PC \geq 20$, $\therefore 4PD+2PC$ 的最小值是 20, 故答案为: 20.

例 6. (2021·浙江金华·一模) 问题提出:

(1)尝试解决：为了解决这个问题，下面给出一种解题思路，通过构造一对相似三角形，将 $\frac{1}{3}BP$ 转化为某一条线段长，具体方法如下：(请把下面的过程填写完整)

又 $\because \angle PCD = \angle$ _____

$$\therefore AP + \frac{1}{3}BP = AP + PD$$

(2)自主探索: 如图 3, 矩形 $ABCD$ 中, $BC=6$, $AB=8$, P 为矩形内部一点, 且 $PB=4$, 则 $\frac{1}{2}AP+PC$ 的最小值为_____。(请在图 3 中添加相应的辅助线)

(3)拓展延伸：如图 4，在扇形 COD 中， O 为圆心， $\angle COD = 120^\circ$ ， $OC = 4$ ， $OA = 2$ ， $OB = 3$ ，点 P 是 $\widehat{CD}$ 上一点，求 $2PA + PB$ 的最小值，画出示意图并写出求解过程.

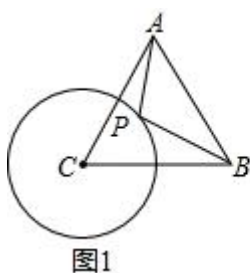


图1

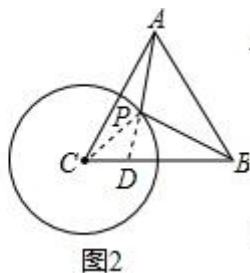


图2

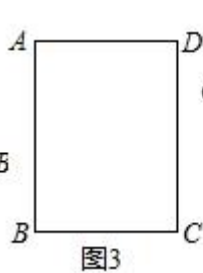


图3

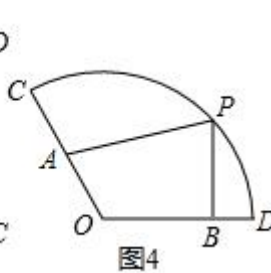


图4

【答案】(1) BCP ， PCD ， BCP ， $\frac{\sqrt{259}}{2}$ ；(2) $2\sqrt{10}$ ；(3) 作图与求解过程见解析， $2PA + PB$ 的最小值为 $\sqrt{97}$.

【分析】(1) 连结 AD ，过点 A 作 $AF \perp CB$ 于点 F ， $AP + \frac{1}{3}BP = AP + PD$ ，要使 $AP + \frac{1}{3}BP$ 最小， $AP + AD$ 最小，当点 A ， P ， D 在同一条直线时， $AP + AD$ 最小，即可求解；

(2) 在 AB 上截取 $BF = 2$ ，连接 PF ， PC ， $AB = 8$ ， $PB = 4$ ， $BF = 2$ ，证明 $\triangle ABP \sim \triangle PBF$ ，当点 F ，点 P ，点 C 三点共线时， $AP + PC$ 的值最小，即可求解；

(3) 延长 OC ，使 $CF = 4$ ，连接 BF ， OP ， PF ，过点 F 作 $FB \perp OD$ 于点 M ，确定 $\frac{OA}{OP} = \frac{1}{2} = \frac{OP}{OF}$ ，且 $\angle AOP = \angle POF$ ， $\triangle AOP \sim \triangle POF$ ，当点 F ，点 P ，点 B 三点共线时， $2AP + PB$ 的值最小，即可求解.

【详解】解：(1) 如图 1，

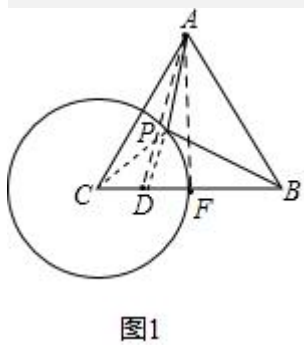


图1

连结 AD ，过点 A 作 $AF \perp CB$ 于点 F ，

$\therefore AP + \frac{1}{3}BP = AP + PD$ ，要使 $AP + \frac{1}{3}BP$ 最小，

$\therefore AP + AD$ 最小，当点 A ， P ， D 在同一条直线时， $AP + AD$ 最小，即： $AP + \frac{1}{3}BP$ 最小值为 AD ，

$\therefore AC = 9$ ， $AF \perp BC$ ， $\angle ACB = 60^\circ \therefore CF = 3$ ， $AF = \frac{9\sqrt{3}}{2}$ ；

$\therefore DF = CF - CD = 3 - 1 = 2$ ， $\therefore AD = \sqrt{AF^2 + DF^2} = \frac{\sqrt{259}}{2}$ ，

$\therefore AP + \frac{1}{3}BP$ 的最小值为 $\frac{\sqrt{259}}{2}$ ；故答案为： $\frac{\sqrt{259}}{2}$ ；

(2)如图 2,

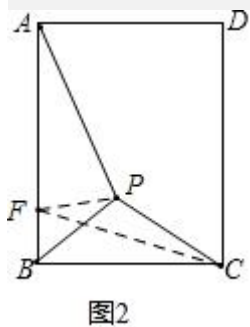


图2

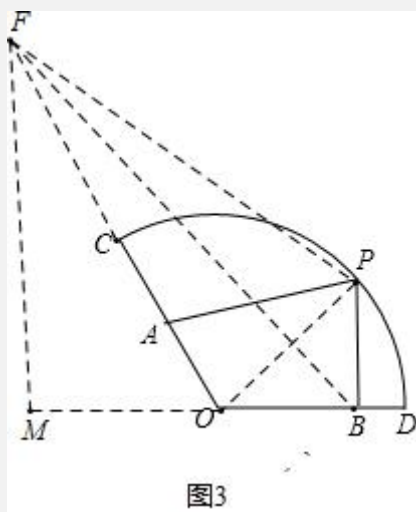


图3

在 AB 上截取 $BF = 2$, 连接 PF , PC , $\because AB = 8$, $PB = 4$, $BF = 2$,

$\therefore \frac{BP}{AB} = \frac{1}{2} = \frac{BF}{BP}$, 且 $\angle ABP = \angle PBF$, $\therefore \triangle ABP \sim \triangle PBF$,

$\therefore \frac{FP}{AP} = \frac{BP}{AB} = \frac{1}{2}$, $\therefore PF = \frac{1}{2}AP$, $\therefore \frac{1}{2}AP + PC = PF + PC$,

$\therefore$ 当点 F , 点 P , 点 C 三点共线时, $AP + PC$ 的值最小,

$\therefore CF = \sqrt{BF^2 + BC^2} = \sqrt{2^2 + 6^2} = 2\sqrt{10}$,

$\therefore \frac{1}{2}AP + PC$ 的值最小值为 $2\sqrt{10}$, 故答案为: $2\sqrt{10}$;

(3)如图 3, 延长 OC , 使 $CF = 4$, 连接 BF , OP , PF , 过点 F 作 $FB \perp OD$ 于点 M ,

$\because OC = 4$, $FC = 4$, $\therefore FO = 8$, 且 $OP = 4$, $OA = 2$,

$\therefore \frac{OA}{OP} = \frac{1}{2} = \frac{OP}{OF}$, 且 $\angle AOP = \angle POF$, $\therefore \triangle AOP \sim \triangle POF$

$\therefore \frac{AP}{PF} = \frac{OA}{OF} = \frac{1}{2}$, $\therefore PF = 2AP$, $\therefore 2PA + PB = PF + PB$,

$\therefore$ 当点 F , 点 P , 点 B 三点共线时, $2AP + PB$ 的值最小,

$\because \angle COD = 120^\circ$, $\therefore \angle FOM = 60^\circ$, 且 $FO = 8$, $FM \perp OM$

$\therefore OM = 4$, $FM = 4\sqrt{3}$, $\therefore MB = OM + OB = 4 + 3 = 7$

$\therefore FB = \sqrt{FM^2 + MB^2} = \sqrt{97}$, $\therefore 2PA + PB$ 的最小值为 $\sqrt{97}$.

【点睛】 本题主要考查了圆的有关知识, 勾股定理, 相似三角形的判定和性质, 解本题的关键是根据材料中的思路构造出相似三角形..

例 7. (2022·广东·二模) (1) 初步研究: 如图 1, 在 $\triangle PAB$ 中, 已知 $PA=2$, $AB=4$, Q 为 AB 上一点且 $AQ=1$, 证明: $PB=2PQ$; (2) 结论运用: 如图 2, 已知正方形 $ABCD$ 的边长为 4, $\odot A$ 的半径为 2, 点 P 是 $\odot A$ 上的一个动点, 求 $2PC+PB$ 的最小值; (3) 拓展推广: 如图 3, 已知菱形 $ABCD$ 的边长为 4, $\angle A=60^\circ$, $\odot A$ 的半径为 2, 点 P 是 $\odot A$ 上的一个动点, 求 $2PC-PB$ 的最大值.

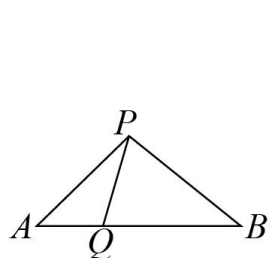


图1

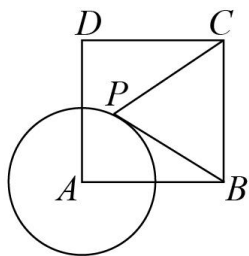


图2

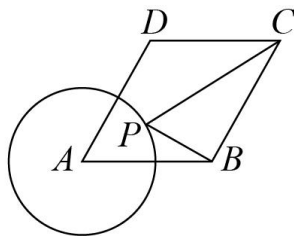


图3

【答案】 (1) 见解析; (2) 10; (3) $2\sqrt{37}$

【分析】 (1) 证明 $\triangle PAQ \sim \triangle BAP$, 根据相似三角形的性质即可证明 $PB=2PQ$;

(2) 在 AB 上取一点 Q , 使得 $AQ=1$, 由 (1) 得 $PB=2PQ$, 推出当点 C 、 P 、 Q 三点共线时, $PC+PQ$ 的值最小, 再利用勾股定理即可求得 $2PC+PB$ 的最小值; (3) 作出如图的辅助线, 同 (2) 法推出当点 P 在 CQ 交 $\odot A$ 的点 P' 时, $PC-PQ$ 的值最大, 再利用勾股定理即可求得 $2PC-PB$ 的最大值.

【详解】 解: (1) 证明: $\because PA=2$, $AB=4$, $AQ=1$, $\therefore PA^2=AQ \cdot AB=4$. $\therefore \frac{PA}{AQ} = \frac{AB}{PA}$.

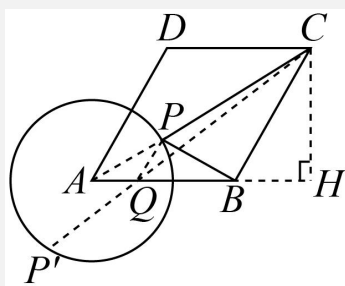
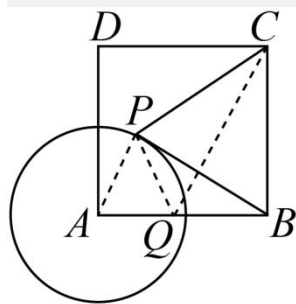
又 $\because \angle A = \angle A$, $\therefore \triangle PAQ \sim \triangle BAP$. $\therefore \frac{PQ}{PB} = \frac{PA}{AB} = \frac{1}{2}$. $\therefore PB=2PQ$;

(2) 如图, 在 AB 上取一点 Q , 使得 $AQ=1$, 连接 AP , PQ , CQ .

$\because AP=2$, $AB=4$, $AQ=1$. 由 (1) 得 $PB=2PQ$, $\therefore 2PC+PB=2PC+2PQ=2(PC+PQ)$.

$\because PC+PQ \geq QC$, $\therefore$ 当点 C 、 P 、 Q 三点共线时, $PC+PQ$ 的值最小.

$\because QC = \sqrt{QB^2 + BC^2} = 5$, $\therefore 2PC+PB=2(PC+PQ) \geq 10$. $\therefore 2PC+PB$ 的最小值为 10.



(3) 如图, 在 AB 上取一点 Q , 使得 $AQ=1$, 连接 AP , PQ , CQ , 延长 CQ 交 $\odot A$ 于点 P' , 过点 C 作 CH 垂直 AB 的延长线于点 H . 易得 $AP=2$, $AB=4$, $AQ=1$.

由 (1) 得 $PB=2PQ$, $\therefore 2PC-PB=2PC-2PQ=2(PC-PQ)$,

$\because PC-PQ \leq QC$, $\therefore$ 当点 P 在 CQ 交 $\odot A$ 的点 P' 时, $PC-PQ$ 的值最大.

$\because QC = \sqrt{QH^2 + CH^2} = \sqrt{37}$, $\therefore 2PC-PB = 2(PC-PQ) \leq 2\sqrt{37}$. $\therefore 2PC-PB$ 的最大值为 $2\sqrt{37}$.

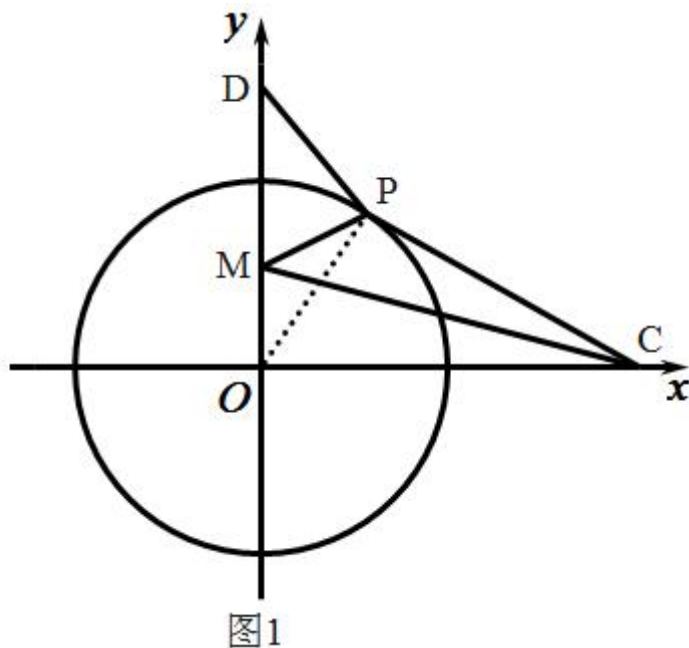
【点睛】 本题考查了圆有关的性质, 正方形的性质, 菱形的性质, 相似三角形的判定和性质、两点之间线段最短等知识, 解题的关键是学会构建相似三角形解决问题, 学会用转化的思想思考问题, 把问题转化为两点之间线段最短解决.

例 8. (2022·江苏·苏州九年级阶段练习) 阅读以下材料, 并按要求完成相应的任务.

已知平面上两点 A, B , 则所有符合 $\frac{PA}{PB} = k (k > 0 \text{ 且 } k \neq 1)$ 的点 P 会组成一个圆. 这个结论最先由古希腊数学家阿波罗尼斯发现, 称阿氏圆.

阿氏圆基本解法: 构造三角形相似.

【问题】 如图 1, 在平面直角坐标中, 在 x 轴, y 轴上分别有点 $C(m, 0), D(0, n)$, 点 P 是平面内一动点, 且 $OP = r$, 设 $\frac{OP}{OD} = k$, 求 $PC + kPD$ 的最小值.



阿氏圆的关键解题步骤:

第一步: 如图 1, 在 OD 上取点 M , 使得 $OM : OP = OP : OD = k$;

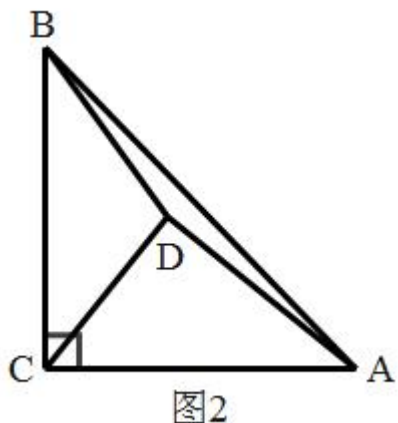
第二步: 证明 $kPD = PM$; 第三步: 连接 CM , 此时 CM 即为所求的最小值.

下面是该题的解答过程(部分):

解: 在 OD 上取点 M , 使得 $OM : OP = OP : OD = k$,

又 $\angle POD = \angle MOP$, $\therefore \triangle POM \sim \triangle DOP$.

任务：(1) 将以上解答过程补充完整。(2) 如图 2，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $AC = 4$ ， $BC = 3$ ， D 为 $\triangle ABC$ 内一动点，满足 $CD = 2$ ，利用(1)中的结论，请直接写出 $AD + \frac{2}{3}BD$ 的最小值。



【答案】 (1) $\sqrt{m^2 + k^2 r^2}$. (2) $\frac{4\sqrt{10}}{3}$.

【分析】 (1) 将 $PC + kPD$ 转化成 $PC + MP$ ，当 $PC + kPD$ 最小，即 $PC + MP$ 最小，图中可以看出当 C、P、M 共线最小，利用勾股定理求出即可；

(2) 根据上一问得出的结果，把图 2 的各个点与图 1 对应代入，C 对应 O，D 对应 P，A 对应 C，B 对应 M，

当 D 在 AB 上时 $AD + \frac{2}{3}BD$ 为最小值，所以 $AD + \frac{2}{3}BD = \sqrt{AC^2 + \left(\frac{2}{3}CD\right)^2} = \sqrt{4^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^2} = \frac{4\sqrt{10}}{3}$

【详解】 解(1) $\therefore MP : PD = k, \therefore MP = kPD$,

$\therefore PC + kPD = PC + MP$ ，当 $PC + kPD$ 取最小值时， $PC + MP$ 有最小值，即 C、P、M 三点共线时有最小值，利

用勾股定理得 $CM = \sqrt{OC^2 + OM^2} = \sqrt{m^2 + (kr)^2} = \sqrt{m^2 + k^2 r^2}$.

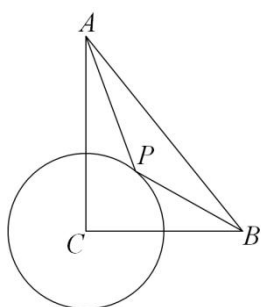
(2) $AD + \frac{2}{3}BD$ 的最小值为 $\frac{4\sqrt{10}}{3}$,

提示： $\because AC = m = 4$ ， $\frac{2}{3}CD = kr = \frac{4}{3}$ ， $\therefore AD + \frac{2}{3}BD$ 的最小值为 $\sqrt{4^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^2} = \frac{4\sqrt{10}}{3}$.

【点睛】 此题主要考查了新定义的理解与应用，快速准确的掌握新定义并能举一反三是解题的关键。

课后专项训练

1. (2022·福建南平九年级期中) 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $CB = 7$, $AC = 9$, 以 C 为圆心、3 为半径作 $\odot C$, P 为 $\odot C$ 上一动点, 连接 AP 、 BP , 则 $\frac{1}{3}AP + BP$ 的最小值为 ()



- A. $3\sqrt{2}$. B. $4\sqrt{3}$ C. $3\sqrt{5}$ D. $5\sqrt{2}$

【答案】D

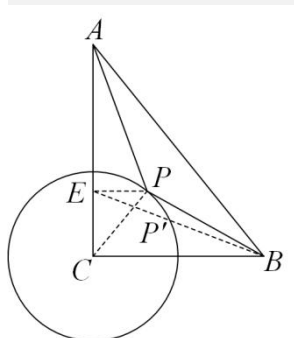
【分析】 作辅助线构造相似三角形, 进而找到 P 在何时会使得 $\frac{1}{3}AP + BP$ 有最小值, 进而得到答案.

【详解】解: 如图, 连接 CP , 作 PE 交 AC 于点 E , 使 $\angle CPE = \angle PAC$

$$\because \angle PCE = \angle ACP \quad \therefore \triangle PCE \sim \triangle APC \quad \therefore \frac{PC}{AC} = \frac{EP}{AP} \quad \because AC = 9, PC = 3 \quad \therefore EP = \frac{1}{3}AP$$

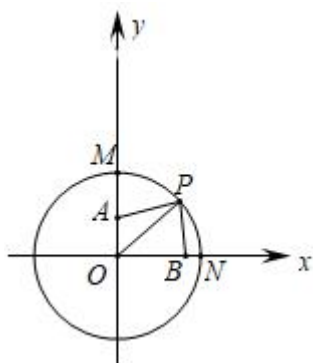
$$\therefore \frac{1}{3}AP + BP = EP + BP, \text{ 当 } B, P, E \text{ 三点共线, 即 } P \text{ 运动到 } P' \text{ 时有最小值 } EB$$

$$\because \frac{EC}{PC} = \frac{PC}{AC} \quad \therefore EC = 1 \quad \therefore EB = \sqrt{EC^2 + CB^2} = 5\sqrt{2} \quad \therefore \frac{1}{3}AP + BP \text{ 的最小值为 } 5\sqrt{2} \quad \text{故选: D.}$$



【点睛】 本题考查相似三角形, 解直角三角形; 懂得依题意作辅助线构造相似三角形是解题的关键.

2. (2022·江苏·无锡市九年级期中) 如图, $\odot O$ 与 y 轴、 x 轴的正半轴分别相交于点 M 、点 N , $\odot O$ 半径为 3, 点 $A(0, 1)$, 点 $B(2, 0)$, 点 P 在弧 MN 上移动, 连接 PA , PB , 则 $3PA + PB$ 的最小值为 ____.



【答案】 $\sqrt{85}$

【分析】如图, 在 y 轴上取一点 $C(0,9)$, 连接 PC , 根据 $\frac{OA}{OP} = \frac{AP}{PC} = \frac{1}{3}$, $\angle AOP$ 是公共角, 可得 $\triangle AOP \sim \triangle POC$, 得 $PC=3PA$, 当 B, C, P 三点共线时, $3PA+PB$ 的值最小为 BC , 利用勾股定理求出 BC 的长即可得答案.

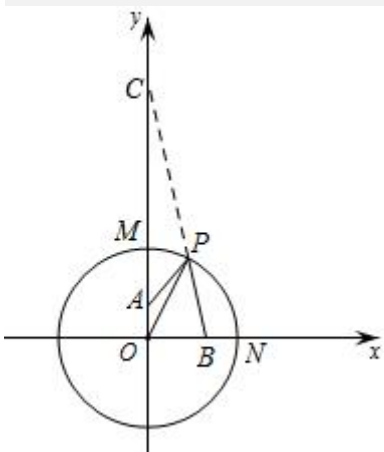
【详解】如图, 在 y 轴上取一点 $C(0,9)$, 连接 PC ,

$\because \odot O$ 半径为 3, 点 $A(0, 1)$, 点 $B(2, 0)$, $\therefore OP=3$, $OA=1$, $OB=2$, $OC=9$,

$\therefore \frac{OA}{OP} = \frac{OP}{OC} = \frac{1}{3}$, $\angle AOP$ 是公共角, $\therefore \triangle AOP \sim \triangle POC$, $\therefore PC=3PA$,

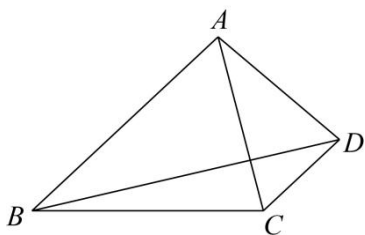
$\therefore 3PA+PB=PC+PB$, $\therefore$ 当 B, C, P 三点共线时, $3PA+PB$ 最小值为 BC ,

$\therefore BC = \sqrt{OC^2 + OB^2} = \sqrt{9^2 + 2^2} = \sqrt{85}$, $\therefore 3PA+PB$ 的最小值为 $\sqrt{85}$. 故答案为: $\sqrt{85}$



【点睛】本题主要考查相似三角形的判定与性质及最小值问题, 正确理解 C, P, B 三点在同一条直线上时 $3PA+PB$ 有最小值, 熟练掌握相似三角形的判定定理是解题关键.

3. (2022·陕西·三模) 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, $AB=2\sqrt{3}$, 对角线 $AC=2$, $\angle BAC=\angle ACD=60^\circ$, 设 $AD=k \cdot BD$, 则 k 的最小值为 _____.



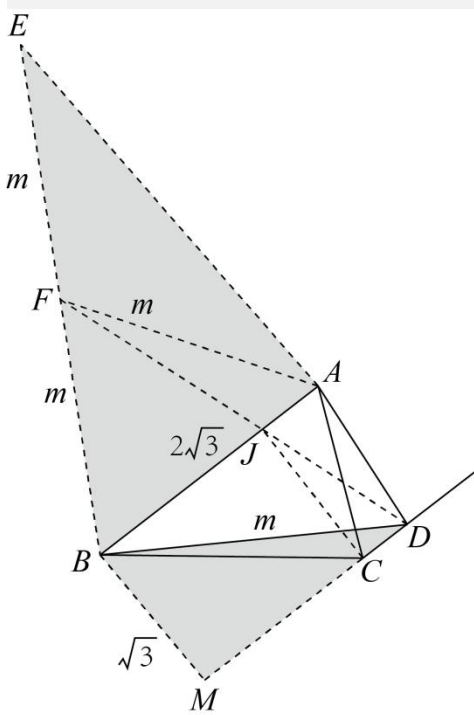
【答案】 $\sqrt{2}-1+\sqrt{2}$

【分析】如图，过点 C 作 $CJ \perp AB$ 于点 J ，过点 B 作 $BM \perp DC$ 交 DC 的延长线于点 M ，在 AB 的上方构造 $Rt\triangle ABE$ ，使得 $\triangle ABE \sim \triangle MBD$ ，取 BE 的中点 F ，连接 AF ， DF 。由 $\triangle ABE \sim \triangle MBD$ ，推出

$$\frac{BE}{DB} = \frac{AB}{MB} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 2, \angle BAE = \angle M = 90^\circ, \text{ 设 } BD = m, \text{ 则 } BE = 2m, \text{ 由勾股定理求得 } DF, \text{ 根据两点之间线段最短可得 } AD \text{ 的最小值, 进而根据 } AD = k \cdot BD, \text{ 即可求解.}$$

短可得 AD 的最小值，进而根据 $AD = k \cdot BD$ ，即可求解。

【详解】解：如图，过点 C 作 $CJ \perp AB$ 于点 J ，过点 B 作 $BM \perp DC$ 交 DC 的延长线于点 M ，在 AB 的上方构造 $Rt\triangle ABE$ ，使得 $\triangle ABE \sim \triangle MBD$ ，取 BE 的中点 F ，连接 AF ， DF 。



在 $Rt\triangle ACJ$ 中， $AC = 2$ ， $\angle CAJ = 60^\circ$ ， $\therefore CJ = AC \cdot \sin 60^\circ = \sqrt{3}$ ， $\therefore \angle ACD = \angle BAC = 60^\circ$ ， $\therefore AB \parallel CD$ ，

$\therefore BM \perp CD$ ， $CJ \perp AB$ ， $\therefore$ 四边形 $BJCM$ 是矩形， $\therefore BM = CJ = \sqrt{3}$ ， $\angle MBJ = 90^\circ$ ，

$\therefore \triangle ABE \sim \triangle MBD$ ， $\therefore \frac{BE}{DB} = \frac{AB}{MB} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 2$ ， $\angle BAE = \angle M = 90^\circ$ ， $\therefore$ 设 $BD = m$ ，则 $BE = 2m$ ，

$\therefore EF = FB$ ， $\therefore AF = \frac{1}{2}BE = m$ ， $\therefore \angle ABE = \angle MBD$ ， $\therefore \angle EBD = \angle ABM = 90^\circ$ ， $\therefore DF = \sqrt{BF^2 + BD^2} = \sqrt{2}m$ ，

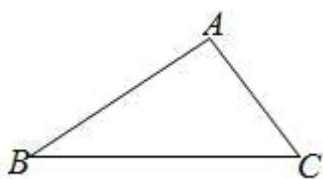
$\because AD \geq DF - AF = \sqrt{2}m - m$, $\therefore AD$ 的最小值为 $\sqrt{2}m - m$,

$\because AD = kBD$, $\therefore k$ 的最小值为 $\frac{\sqrt{2}m - m}{m} = \sqrt{2} - 1$. 故答案为: $\sqrt{2} - 1$.

【点睛】本题考查轴对称问题，勾股定理，相似三角形的性质等知识，解题的关键是相似构造相似三角形解决问题.

4. (2022·湖北武汉·模拟预测) 【新知探究】新定义：平面内两定点 A, B ，所有满足 $\frac{PA}{PB} = k$ (k 为定值) 的 P 点形成的图形是圆，我们把这种圆称之为“阿氏圆”，

【问题解决】如图，在 $\triangle ABC$ 中， $CB = 4$ ， $AB = 2AC$ ，则 $\triangle ABC$ 面积的最大值为_____.



【答案】 $\frac{16}{3}$

【分析】以 A 为顶点， AC 为边，在 $\triangle ABC$ 外部作 $\angle CAP = \angle ABC$ ， AP 与 BC 的延长线交于点 P ，证出 $\triangle APC \sim \triangle BPA$ ，列出比例式可得 $BP = 2AP$ ， $CP = \frac{1}{2}AP$ ，从而求出 AP 、 BP 和 CP ，即可求出点 A 的运动轨迹，最后找出距离 BC 最远的 A 点的位置即可求出结论.

【详解】解：以 A 为顶点， AC 为边，在 $\triangle ABC$ 外部作 $\angle CAP = \angle ABC$ ， AP 与 BC 的延长线交于点 P ，

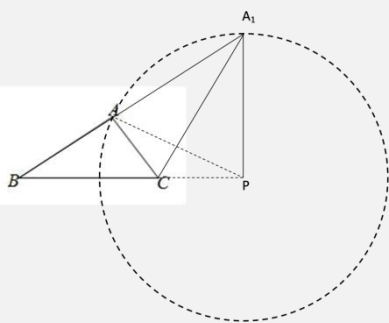
$\because \angle APC = \angle BPA$, $AB = 2AC \therefore \triangle APC \sim \triangle BPA$,

$\therefore \frac{AP}{BP} = \frac{CP}{AP} = \frac{AC}{AB} = \frac{1}{2} \therefore BP = 2AP$, $CP = \frac{1}{2}AP$

$\because BP - CP = BC = 4 \therefore 2AP - \frac{1}{2}AP = 4$ 解得: $AP = \frac{8}{3} \therefore BP = \frac{16}{3}$, $CP = \frac{4}{3}$, 即点 P 为定点

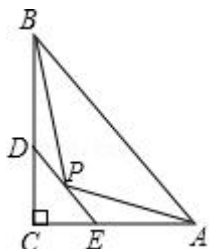
$\therefore$ 点 A 的轨迹为以点 P 为圆心， $\frac{8}{3}$ 为半径的圆上，如下图所示，过点 P 作 BC 的垂线，交圆 P 于点 A_1 ，此时 A_1 到 BC 的距离最大，即 $\triangle ABC$ 的面积最大

$S_{\triangle A_1BC} = \frac{1}{2} BC \cdot A_1P = \frac{1}{2} \times 4 \times \frac{8}{3} = \frac{16}{3}$ 即 $\triangle ABC$ 面积的最大值为 $\frac{16}{3}$ 故答案为: $\frac{16}{3}$.

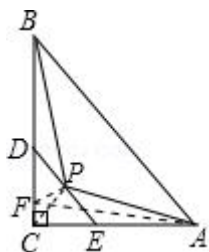


【点睛】此题考查的是相似三角形的判定及性质、确定点的运动轨迹和求三角形的面积，掌握相似三角形的判定及性质、圆的定义和三角形的面积公式是解决此题的关键。

5. (2022·浙江·九年级期中) 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $AC = 6$ ， $BC = 8$ ， D 、 E 分别是边 BC 、 AC 上的两个动点，且 $DE = 4$ ， P 是 DE 的中点，连接 PA ， PB ，则 $PA + \frac{1}{4}PB$ 的最小值为_____。



【解答】解：如图，在 CB 上取一点 F ，使得 $CF = \frac{1}{2}$ ，连接 PF ， AF 。



$$\because \angle DCE = 90^\circ, DE = 4, DP = PE, \therefore PC = \frac{1}{2}DE = 2,$$

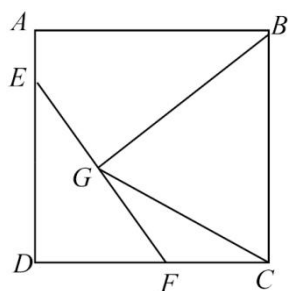
$$\because \frac{CF}{CP} = \frac{1}{4}, \frac{CP}{CB} = \frac{1}{4}, \therefore \frac{CF}{CP} = \frac{CP}{CB}, \because \angle PCF = \angle BCP, \therefore \triangle PCF \sim \triangle BCP,$$

$$\therefore \frac{PF}{PB} = \frac{CF}{CP} = \frac{1}{4}, \therefore PF = \frac{1}{4}PB, \therefore PA + \frac{1}{4}PB = PA + PF,$$

$$\because PA + PF \geq AF, AF = \sqrt{CF^2 + AC^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 6^2} = \frac{\sqrt{145}}{2},$$

$$\therefore PA + \frac{1}{4}PB \geq \frac{\sqrt{145}}{2}, \therefore PA + \frac{1}{4}PB \text{ 的最小值为 } \frac{\sqrt{145}}{2}, \text{ 故答案为 } \frac{\sqrt{145}}{2}.$$

6. (2022·江苏·苏州九年级阶段练习) 如图，正方形 $ABCD$ 的边长为 4，点 E 为边 AD 上一个动点，点 F 在边 CD 上，且线段 $EF = 4$ ，点 G 为线段 EF 的中点，连接 BG 、 CG ，则 $BG + \frac{1}{2}CG$ 的最小值为_____。

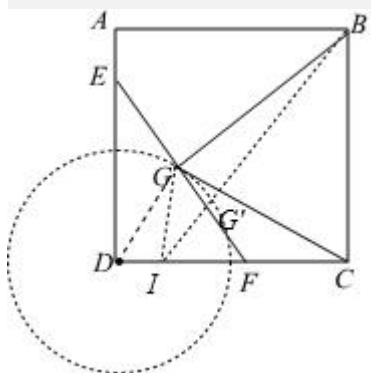


【答案】5

【分析】因为 $DG = \frac{1}{2}EF = 2$ ，所以 G 在以 D 为圆心，2 为半径圆上运动，取 $DI = 1$ ，可证 $\triangle GDI \sim \triangle CDG$ ，

从而得出 $GI = \frac{1}{2}CG$ ，然后根据三角形三边关系，得出 BI 是其最小值

【详解】解：如图，



在 $\text{Rt}\triangle DEF$ 中， G 是 EF 的中点，

$\therefore DG = \frac{1}{2}EF = 2$ ， $\therefore$ 点 G 在以 D 为圆心， 2 为半径的圆上运动，

在 CD 上截取 $DI = 1$ ，连接 GI ，

$\therefore \frac{DI}{DG} = \frac{DG}{CD} = \frac{1}{2}$ ， $\therefore \angle GDI = \angle CDG$ ， $\therefore \triangle GDI \sim \triangle CDG$ ，

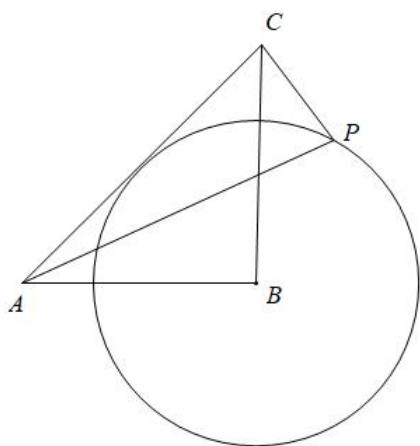
$\therefore \frac{IG}{CG} = \frac{DI}{DG} = \frac{1}{2}$ ， $\therefore IG = \frac{1}{2}CG$ ， $\therefore BG + \frac{1}{2}CG = BG + IG \geq BI$ ，

$\therefore$ 当 B 、 G 、 I 共线时， $BG + \frac{1}{2}CG$ 最小 $= BI$ ，

在 $\text{Rt}\triangle BCI$ 中， $CI = 3$ ， $BC = 4$ ， $\therefore BI = 5$ ，故答案是：5.

【点睛】本题考查了相似三角形的性质与判定，圆的概念，求得点 G 的运动轨迹是解题的关键.

7. (2022·山西·九年级专题练习) 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle B = 90^\circ$ ， $AB = CB = 2$ ，以点 B 为圆心作圆 B 与 AC 相切，点 P 为圆 B 上任一动点，则 $PA + \frac{\sqrt{2}}{2}PC$ 的最小值是_____.



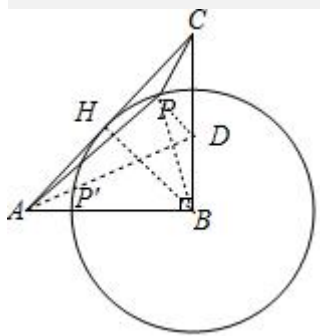
【答案】 $\sqrt{5}$

【分析】作 $BH \perp AC$ 于 H ，取 BC 的中点 D ，连接 PD ，如图，根据切线的性质得 BH 为 $\odot B$ 的半径，再根据等腰直角三角形的性质得到 $BH = \frac{1}{2}AC = \sqrt{2}$ ，接着证明 $\triangle BPD \sim \triangle BCP$ 得到 $PD = \frac{\sqrt{2}}{2}PC$ ，所以 $PA + \frac{\sqrt{2}}{2}PC = PA + PD$ ，而 $PA + PD \geq AD$ （当且仅当 A, P, D 共线时取等号），从而计算出 AD 得到 $PA + \frac{\sqrt{2}}{2}PC$ 的最小值。

【详解】解：作 $BH \perp AC$ 于 H ，取 BC 的中点 D ，连接 PD ，如图，
 $\because AC$ 为切线， $\therefore BH$ 为 $\odot B$ 的半径， $\because \angle ABC = 90^\circ$ ， $AB = CB = 2$ ，
 $\therefore AC = \sqrt{2}BA = 2\sqrt{2}$ ， $\therefore BH = \frac{1}{2}AC = \sqrt{2}$ ， $\therefore BP = \sqrt{2}$ ，
 $\therefore \frac{PB}{BC} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ， $\frac{BD}{BP} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，而 $\angle PBD = \angle CBP$ ， $\therefore \triangle BPD \sim \triangle BCP$ ，
 $\therefore \frac{PD}{PC} = \frac{PB}{BC} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ， $\therefore PD = \frac{\sqrt{2}}{2}PC$ ， $\therefore PA + \frac{\sqrt{2}}{2}PC = PA + PD$ ，

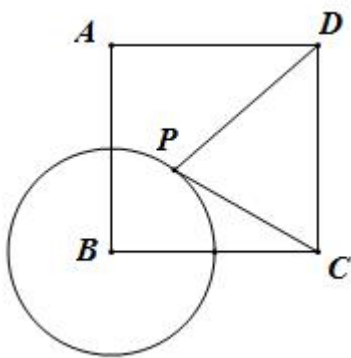
而 $PA + PD \geq AD$ （当且仅当 A, P, D 共线时取等号），

而 $AD = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$ ， $\therefore PA + PD$ 的最小值为 $\sqrt{5}$ ，即 $PA + \frac{\sqrt{2}}{2}PC$ 的最小值为 $\sqrt{5}$ 。故答案为： $\sqrt{5}$ 。



【点睛】本题考查了切线的性质：圆的切线垂直于经过切点的半径。解决问题的关键是利用相似比确定线段 $PD = \frac{\sqrt{2}}{2}PC$ 。也考查了等腰直角三角形的性质。

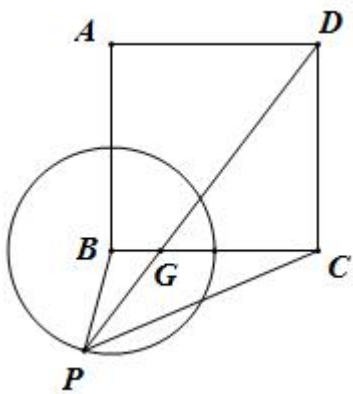
8. (2022·湖北·九年级专题练习) 如图，已知正方形 $ABCD$ 的边长为 4， $\odot B$ 的半径为 2，点 P 是 $\odot B$ 上的一个动点，则 $PD - \frac{1}{2}PC$ 的最大值为_____。



【答案】5

【详解】分析：由 $PD - \frac{1}{2}PC = PD - PG \leq DG$ ，当点 P 在 DG 的延长线上时， $PD - \frac{1}{2}PC$ 的值最大，最大值为 $DG = 5$ 。

详解：在 BC 上取一点 G ，使得 $BG = 1$ ，如图，



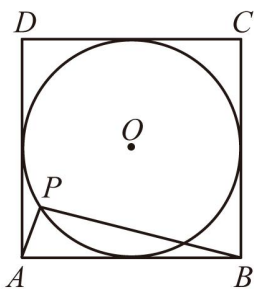
$$\because \frac{PB}{BG} = \frac{2}{1} = 2, \quad \frac{BC}{PB} = \frac{4}{2} = 2, \quad \therefore \frac{PB}{BG} = \frac{BC}{PB},$$

$$\because \angle PBG = \angle PBC, \quad \therefore \triangle PBG \sim \triangle CBP, \quad \therefore \frac{PG}{PC} = \frac{BG}{PB} = \frac{1}{2}, \quad \therefore PG = \frac{1}{2}PC,$$

当点 P 在 DG 的延长线上时， $PD - \frac{1}{2}PC$ 的值最大，最大值为 $DG = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$ 。故答案为 5

点睛：本题考查圆综合题、正方形的性质、相似三角形的判定和性质等知识，解题的关键是学会构建相似三角形解决问题，学会用转化的思想思考问题，把问题转化为两点之间线段最短解决，题目比较难，属于中考压轴题。

9. (2022·北京·九年级专题练习) 如图，边长为 4 的正方形，内切圆记为 $\odot O$ ， P 是 $\odot O$ 上一动点，则 $\sqrt{2}PA + PB$ 的最小值为_____。



【答案】 $2\sqrt{5}$

【分析】 $\sqrt{2}PA + PB = \sqrt{2} \left(PA + \frac{\sqrt{2}}{2}PB \right)$ ，利用相似三角形构造 $\frac{\sqrt{2}}{2}PB$ 即可解答。

【详解】解：设 $\odot O$ 半径为 r ，

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/608107006126006037>