2025年普通高等学校招生全国统一考试模拟试题

数学（一）

本试卷共4页，19题．全卷满分150分．考试用时120分钟．

注意事项：

1．答题前，先将自己的姓名、考号等填写在答题卡上，并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置．

2．选择题的作答：选出每小题答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑．写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效．

3．填空题和解答题的作答：用签字笔直接写在答题卡上对应的答题区域内．写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效．

4．考试结束后，请将本试题卷和答题卡一并上交．

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1. 已知集合 $A=\left\{x\in \mathrm{N}\left|\frac{1}{9}<\frac{1}{x}<\frac{1}{4}\right.\right\}$，$B=\left\{x\left||x|<7\right.\right\}$，则 $A\cap B=$(　　).

A. $\{5\}$　　　　B. $\{5,6\}$　　　　C. $\{4,5,6\}$　　　　D. $\{5,6,7\}$

【答案】B

【解析】

【分析】由题意首先求得集合 A 和 B，然后进行交集运算即可.

【详解】由 $\frac{1}{9}<\frac{1}{x}<\frac{1}{4}$ 得 $4<x<9$，又因为 $x\in \mathrm{N}$ 所以 $A=\{5,6,7,8\}$，

由 $|x|<7$ 得 $-7<x<7$，所以 $B=\{x|-7<x<7\}$，因此 $A\cap B=\{5,6\}$.

故选：B.

2. 已知 $\frac{z-1}{z+3}=2-\mathrm{i}$，则 $z=$（　　）

A. $-2-2\mathrm{i}$　　　　B. $-2+2\mathrm{i}$　　　　C. $-5+2\mathrm{i}$　　　　D. $-5-2\mathrm{i}$

【答案】D

【解析】

【分析】由复数的四则运算即可求解.

【详解】由 $\frac{z-1}{z+3}=2-\mathrm{i}$，

可得：$z-1=(2-\mathrm{i})(z+3)$，$z-1=(2-\mathrm{i})z+6-3\mathrm{i}$，

所以：$z=\dfrac{7-3\mathrm{i}}{-1-\mathrm{i}}=\dfrac{(7-3\mathrm{i})(-1+\mathrm{i})}{(-1-\mathrm{i})(-1+\mathrm{i})}=-5-2\mathrm{i}$，

故选：D

3. 在$\triangle ABC$中，D，E分别是边BC，AC的中点，点F满足$\overrightarrow{DF}=2\overrightarrow{FA}$，则$\overrightarrow{EF}=$（　　）

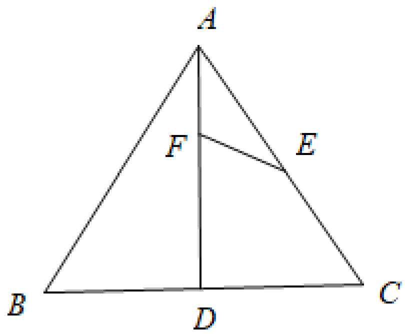
A. $\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$　　B. $\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$　　C. $\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$　　D. $\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

【答案】D

【解析】

【分析】结合图形，由平面向量的加法法则求解即可；

【详解】



$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{6}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$，

故选：D.

4. 已知$\sin(\alpha-\beta)=m$，$\tan\alpha=4\tan\beta$，则$\sin(\alpha+\beta)=$（　　）

A. $\frac{5m}{3}$　　B. $\frac{2m}{3}$　　C. $\frac{3m}{2}$　　D. $\frac{3m}{4}$

【答案】A

【解析】

【分析】根据题设条件可求$\sin\alpha\cos\beta,\cos\alpha\sin\beta$的值，求出$\sin(\alpha+\beta)$.

【详解】由已知可得$\begin{cases}\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta=m,\\ \tan\alpha=4\tan\beta,\end{cases}$

可知$\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=4\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta},\sin\alpha\cdot\cos\beta=4\cos\alpha\cdot\sin\beta$

解得$\begin{cases}\sin\alpha\cdot\cos\beta=\dfrac{4m}{3},\\ \cos\alpha\cdot\sin\beta=\dfrac{m}{3},\end{cases}$，

所以$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta=\dfrac{5m}{3}$,

故选：A.

5. 已知圆柱和圆锥的底面半径相等，体积相等，且它们的侧面积之比为$1:3$，则圆锥的高与底面半径之比为（　　）

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{9}$　　B. $\dfrac{1}{3}$　　C. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　D. $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

【答案】C

【解析】

【分析】分别表示出圆柱和圆锥的体积与以及圆柱和圆锥的侧面积，然后依据题意比值求解；

【详解】设圆柱和圆锥的底面半径为r，高分别为h_1,h_2，

$V_{圆锥}=\dfrac{1}{3}\pi r^2h_2,V_{圆柱}=\pi r^2h_1$,

所以$h_1=\dfrac{1}{3}h_2$，(1)

圆柱的侧面积$S_1=2\pi rh_1$，(2)

圆锥的侧面积$S_2=\dfrac{1}{2}\times2\pi r\cdot l=\pi r\sqrt{{h_2}^2+r^2}$，$(3)$

又因为$\dfrac{S_1}{S_2}=\dfrac{1}{3}$，代入$(1)(2)(3)$，

解得：$3{h_2}^2=r^2$，即$\dfrac{h_2}{r}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$,

故选：C.

6. 若函数$f(x)=\begin{cases}-x^2+2ax-6,\ x\le1\\ a\ln x+5,\ x>1\end{cases}$在$\mathbf{R}$上是增函数，则$a$的取值范围为（　　）

A. $[1,+\infty)$　　B. $[1,6]$

C. $(-\infty,1]\cup[6,+\infty)$　　D. $(0,1]\cup[6,+\infty)$

【答案】B

【解析】

【分析】由分段函数在 R 上递增需满足条件可得答案.

【详解】设 $g\left(x\right)=-x^{2}+2ax-6$，$x\le 1$；$h\left(x\right)=a\ln x+5$，$x>1$.

为使 $f\left(x\right)$ 在 R 上递增，则 $g\left(x\right)$ 在 $\left(-\infty,1\right]$ 上递增，$h\left(x\right)$ 在 $\left(1,+\infty\right)$ 上递增，

且 $g\left(1\right)\le h\left(1\right)$，即 $\begin{cases}a\ge 1\\ a>0\\ 2a-7\le 5\end{cases}\Rightarrow 1\le a\le 6$.

故选：B

7. 函数 $f\left(x\right)=3\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)-\sin 3x$ 在区间 $\left[0,3\pi\right]$ 上的零点个数为（　　）

A. 4　　　　B. 5　　　　C. 6　　　　D. 8

【答案】C

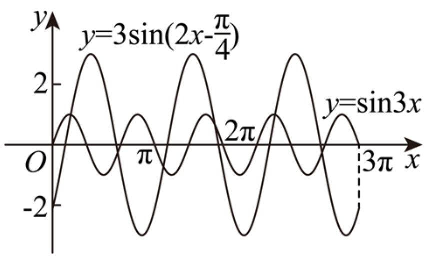
【解析】

【分析】将问题转化成 $y=3\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right),y=\sin 3x$ 图象交点个数即可.

【详解】由题意可将问题转化成 $3\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)-\sin 3x=0$，在 $\left[0,3\pi\right]$ 上的根的个数，

也即 $y=3\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right),y=\sin 3x$ 在 $\left[0,3\pi\right]$ 上的交点个数，

通过五点作图法画出两函数图象：



由图象可知共有 6 个交点，

所以 $f\left(x\right)=3\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)-\sin 3x$ 在区间 $\left[0,3\pi\right]$ 上的零点个数为 6.

故选：C

8. 已知函数 $f\left(x\right)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，$f\left(x+2\right)$ 为偶函数，$f\left(x\right)-1$ 为奇函数，且 $f\left(x\right)$ 在区间 $\left[6,8\right]$ 上是增函数．记 $a=f\left(-33\right)$，$b=f\left(19\right)$，$c=f\left(88\right)$，则（　　）

A. $a<b<c$　　　　B. $c<b<a$　　　　C. $b<c<a$　　　　D. $a<c<b$

【答案】D

【解析】

【分析】由题意可知函数周期$T=8$，$f(x)$在$[-2,0]$上是减函数，且$f(0)=1$，又$a=f(-1)$，$b=2-f(-1)$，$c=1$，进而可得结果.

【详解】根据题意，函数$f\left(x\right)$的定义域为$\mathbf{R}$，$f\left(x+2\right)$为偶函数，

即$f\left(x\right)=f\left(4-x\right)$，

又$f\left(x\right)-1$为奇函数，则$f\left(x\right)+f\left(-x\right)=2$，即$f\left(x\right)=2-f\left(-x\right)$，

所以$f\left(4+x\right)=2-f\left(x\right)$，则$f\left(x+8\right)=2-f\left(x+4\right)=2-\left[2-f(x)\right]=f(x)$，

即函数$f\left(x\right)$周期为8，

$f\left(x\right)$在区间$\left[6,8\right]$上是增函数，则在区间$\left[-2,0\right]$上是增函数，

又$f\left(x\right)-1$为奇函数，则$f(0)=1$，所以$f(-1)<1$，

而$a=f\left(-33\right)=f\left(-1\right)<1$，$b=f\left(19\right)=f\left(3\right)=f\left(1\right)=2-f\left(-1\right)>1$，

$c=f\left(88\right)=f\left(0\right)=1$，

所以$a<c<b$.

故选：D

【点睛】关键点点睛：由题意可知函数周期$T=8$，$f(x)$在$\left[-2,0\right]$上是减函数，且$f(0)=1$，进而可比较大小.

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分．

9. 某体育器材厂生产一批篮球，单个篮球的质量Y（单位：克）服从正态分布$N\left(600,\sigma^2\right)$，则（　　）

A. $P\left(Y>600\right)=\dfrac{1}{2}$

B. σ越小，$P\left(599<Y<601\right)$越大

C. $P\left(Y<595\right)=P\left(Y>605\right)$

D. $P\left(592<Y<598\right)<P\left(602<Y<606\right)$

【答案】ABC

【解析】

【分析】由正态分布的对称性即可判断.

【详解】由条件可知$\mu=600$，由正太密度曲线的对称性可知：

$P\left(Y>600\right)=\frac{1}{2}$，$P\left(Y<595\right)=P\left(Y>605\right)$，

$P\left(592<Y<598\right)=P\left(602<Y<608\right)>P\left(602<Y<606\right)$，

σ 越小，说明数据越集中，故 $P\left(599<Y<601\right)$ 越大，

故选：ABC

10. 已知 $x=2$ 是函数 $f\left(x\right)=\left(x+2\right)^2\left(x+a\right)$ 的极小值点，则（　　）

A. $a=-4$

B. $f\left(x\right)$ 在区间 $\left[-3,1\right]$ 上的值域为 $\left[-27,0\right]$

C. 不等式 $f\left(x^2+4x+8\right)>f\left(x^2+4\right)$ 的解集为 $\left(1,+\infty\right)$

D. 当 $x<-2$ 时，$f\left(-4-x\right)>f\left(x\right)$

【答案】ABD

【解析】

【分析】求出 $f'\left(x\right)$，令 $f'\left(2\right)=0$，即可解得 $a=-4$；由 $f'\left(x\right)$，可求得 $f\left(x\right)$ 的单调性，进而求得 $f\left(x\right)$ 在区间 $\left[-3,1\right]$ 上的值域；利用 $f\left(x\right)$ 的单调性，即可求得不等式 $f\left(x^2+4x+8\right)>f\left(x^2+4\right)$ 的解集；利用作差法，结合 $x<-2$，即可判断 $f\left(-4-x\right)>f\left(x\right)$.

【详解】因为函数 $f\left(x\right)=\left(x+2\right)^2\left(x+a\right)$，

所以 $f'\left(x\right)=\left(x+2\right)\left(3x+2a+2\right)$，

对于 A，因为 $x=2$ 是函数 $f\left(x\right)=\left(x+2\right)^2\left(x+a\right)$ 的极小值点，

所以 $f'\left(2\right)=\left(2+2\right)\left(3\times2+2a+2\right)=0$，解得 $a=-4$，

则 $f\left(x\right)=\left(x+2\right)^2\left(x-4\right)$，$f'\left(x\right)=\left(x+2\right)\left(3x-6\right)$，

令 $f'\left(x\right)=\left(x+2\right)\left(3x-6\right)=0$，解得 $x=-2$ 或 $x=2$，

所以当 $x\in\left(-\infty,-2\right)$，$x\in\left(2,+\infty\right)$ 时，$f'\left(x\right)>0$，$f\left(x\right)$ 单调递增，

当 $x\in\left(-2,2\right)$ 时，$f'\left(x\right)<0$，$f\left(x\right)$ 单调递减，

所以 $x=2$ 是函数 $f\left(x\right)=\left(x+2\right)^2\left(x+a\right)$ 的极小值点，故 A 正确；

对于 B，由 A 知，当 $x\in\left[-3,1\right]$ 时，$f\left(x\right)$ 在 $\left[-3,-2\right]$ 上单调递增，在 $\left(-2,1\right]$ 上单调递减， 因为

$f\left(-2\right)=\left(-2+2\right)^2\left(-2-4\right)=0$，

$f\left(-3\right)=\left(-3+2\right)^2\left(-3-4\right)=-7$，$f\left(1\right)=\left(1+2\right)^2\left(1-4\right)=-27$，

所以$f\left(x\right)$在区间$\left[-3,1\right]$上的值域为$\left[-27,0\right]$，故B正确；

对于C，因为$x^2+4x+8=\left(x+2\right)^2+4\geq 4, x^2+4\geq 4$，

所以不等式$f\left(x^2+4x+8\right)>f\left(x^2+4\right)$时，

$x^2+4x+8>x^2+4$，解得$x>-1$，

即不等式$f\left(x^2+4x+8\right)>f\left(x^2+4\right)$的解集为$\left(-1,+\infty\right)$，故C错误；

对于D，因为$f\left(-4-x\right)=\left(-4-x+2\right)^2\left(-4-x-4\right)=\left(x+2\right)^2\left(-8-x\right)$，

所以$f\left(-4-x\right)-f\left(x\right)=\left(x+2\right)^2\left(-8-x\right)-\left(x+2\right)^2\left(x-4\right)=\left(x+2\right)^2\left(-2x-4\right)$，

当$x<-2$时，$-2x-4>0$，则$f\left(-4-x\right)-f\left(x\right)=\left(x+2\right)^2\left(-2x-4\right)>0$，

即$f\left(-4-x\right)>f\left(x\right)$，故D正确.

故选：ABD.

11. 已知曲线C上的点满足：到定点$F\left(0,1\right)$的距离与到定直线l：$y=3$的距离之和为4，则（　　）

A. C恰好经过4个整点（横、纵坐标均为整数的点）

B. 当点$\left(x_0,y_0\right)$在C上时，$-4\sqrt{3}\leq x_0\leq 4\sqrt{3}$

C. C上的点到直线$\sqrt{3}x-y-15=0$的距离的最大值为12

D. C上的点与点F的距离的取值范围为$\left[1,4\right]$

【答案】ACD

【解析】

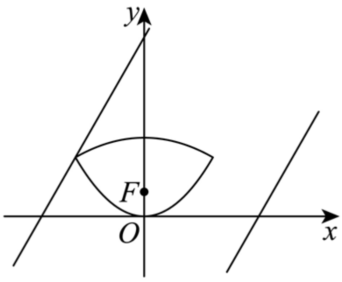
【分析】由两点间距离公式得到分段函数的解析式，再作图像，由解析式中y的范围可得B错误；由x的取值范围代入表达式可得A正确；由点到直线的距离公式可得C正确；由曲线C的性质可得D正确；

【详解】设曲线C上的点$\left(x,y\right)$到定点$F(0,1)$的距离与到定直线l：$y=3$的距离之和为4，

则$\sqrt{x^2+\left(y-1\right)^2}+\left|y-3\right|=4$，即$x^2+\left(y-1\right)^2=\left(4-\left|y-3\right|\right)^2$，

整理$y=\frac{1}{4}x^2, y\leq 3$或$y=4-\frac{x^2}{12}, y>3$，

画出函数图像，



对于 B，$y>3$ 即 $4-\frac{x^2}{12}>3\Rightarrow -2\sqrt{3}<x<2\sqrt{3}$；$y\le 3$ 即 $\frac{x^2}{4}\le 3\Rightarrow -2\sqrt{3}\le x\le 2\sqrt{3}$，故 B 错误；

对于 A，由 B 可得 x 可取 $\pm3,\pm2,\pm1,0$，

当 $x=\pm3$ 时，$y=\frac{9}{4}$ 或 $\frac{13}{4}$，无整点；

当 $x=\pm2$ 时，$y=1$ 或 $\frac{11}{3}$，整点为 $(-2,1),(2,1)$；

当 $x=\pm1$ 时，$y=\frac{1}{4}$ 或 $\frac{47}{12}$，无整点；

当 $x=0$ 时，$y=0$ 或 4，整点为 $(0,0),(0,4)$；

所以共有 4 个整点，故 A 正确；

对于 C，作直线的平行线 $y=\sqrt{3}x+m$，

当平行线过点 $(-2\sqrt{3},3)$，两平行线间距离最大，即 $\frac{|-6-3-15|}{\sqrt{1+3}}=12$，故 C 正确；

对于 D，C 上的点到定直线 $y=3$ 的距离范围为 $[0,3]$，则 C 上的点与点 F 的距离的取值范围为 $[1,4]$，故 D 正确；

故选：ACD.

【点睛】关键点点睛：本题的关键是由两点间距离公式推导出函数的表达式，再根据 y 的取值范围去掉绝对值符号，得到分段函数.

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

12. 已知双曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>0$，$b>0$）的左、右焦点分别为 F_1，F_2，P，Q 是 C 上关于原点对称的两点，且 $|PQ|=|F_1F_2|=10$，$|PF_1|=3|PF_2|$，则 C 的离心率为________.

【答案】$\sqrt{2}$

【解析】

【分析】由图，题意，双曲线对称性可得$\triangle F_1PF_2$为直角三角形，然后设$|PF_2|=x$，由$|PF_1|=3|PF_2|$及勾股定理可表示出a，c，即可得答案.

【详解】由双曲线对称性及$|PQ|=|F_1F_2|=10$，可知$|OP|=|OQ|=|OF_1|$，

则$\triangle F_1PF_2$为以F_1为顶点的直角三角形.又由双曲线对称性，

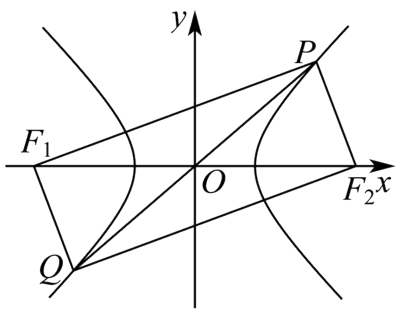
可知四边形F_1PF_2Q为平行四边形，结合$\angle PF_1Q=\dfrac{\pi}{2}$，

可知四边形F_1PF_2Q为矩形，则$\triangle F_1PF_2$为直角三角形.

设$|PF_2|=x$，则$|PF_1|=3x\Rightarrow 2a=2x,|F_1F_1|=\sqrt{|PF_1|^2-|PF_2|^2}=2c=2\sqrt{2}x$.

故$e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{2c}{2a}=\sqrt{2}$.

故答案为：$\sqrt{2}$



13. 若直线$y=kx-2k$是曲线$f(x)=e^{x-1}$的切线，也是曲线$g(x)=\ln(x-2)+m$的切线，则$m=$

________.

【答案】3

【解析】

【分析】分别求出两曲线的导数，得到切线的斜率，再设出两切点，根据切点在直线和曲线上，列方程解出即可；

【详解】由题意可得$f'(x)=e^{x-1}$，设直线$y=kx-2k$与曲线$f(x)=e^{x-1}$的切点为(x_1,y_1)，

则$e^{x_1-1}=k$，即$x_1=\ln k+1$，

又切点在曲线上，所以$y_1=e^{x_1-1}=e^{\ln k+1-1}=k$，

代入直线方程可得$k=k(\ln k+1)-2k$，即$k(2-\ln k)=0$，解得$k=0$或e^2，

又$e^{x_1-1}=k$，所以$k=0$舍去，

$g'(x)=\frac{1}{x-2}$，设直线 $y=kx-2k$ 与曲线 $g(x)=\ln(x-2)+m$ 的切点为(x_2,y_2)，

所以 $k=\frac{1}{x_2-2}$，由 $k=e^2$ 代入可得 $x_2=2+\frac{1}{e^2}$，

又 $\begin{cases} y_2=\ln(x_2-2)+m \\ y_2=kx_2-2k \end{cases}$，所以 $y_2=e^2\left(2+\frac{1}{e^2}\right)-2e^2=1$，

所以将 $\left(2+\frac{1}{e^2},1\right)$ 代入曲线 $g(x)=\ln(x-2)+m$ 可得 $1=\ln\frac{1}{e^2}+m$，

解得 $m=3$.

故答案为：3.

14. 某盒子中有 12 个大小相同的球，分别标号为 1，2，…，12，从盒中任取 3 个球，取出的 3 个球的标号之和能被 4 整除的概率为________.

【答案】$\frac{1}{4}$

【解析】

【分析】先求出从 12 个球中任取 3 个球的方法数，再求出取出的 3 个球的标号之和能被 4 整除的方法数，最后利用古典概型的概率计算公式即可求概率.

【详解】从 12 个球中任取 3 个球有 $C_{12}^3=220$ 种不同的方法，

1-12 中能被 4 整除的有 $4,8,12$，除 4 余 1 的有 $1,5,9$，除 4 余 2 的有 $2,6,10$，除 4 余 3 的有 $3,7,11$，故将 1-12 划分为以上四类，

能被 4 整除可分：3 个数都来自 $4,8,12$，或一个数来自 $4,8,12$，两个数来自 $2,6,10$，或一个数来自 $4,8,12$，一个数来自 $1,5,9$，一个数来自 $3,7,11$，或两个数来自 $1,5,9$，一个数来自 $2,6,10$，或两个数来自 $3,7,11$，一个数来自 $2,6,10$.

共有：$C_3^3+C_3^1C_3^2+C_3^1C_3^1C_3^1+C_3^1C_3^2+C_3^1C_3^2=37$，

所以取出的 3 个球的标号之和能被 4 整除的概率 $P=\frac{55}{220}=\frac{1}{4}$.

故答案为：$\frac{1}{4}$.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

15. 记 $\triangle ABC$ 的内角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，已知 $b+c=2a\cos\left(B-\frac{\pi}{3}\right)$.