

第 I 卷 (选择题, 共 60 分)

$$\text{所以 } \cos \langle \vec{a}, \vec{a} - \vec{b} \rangle = \frac{\vec{a} \cdot (\vec{a} - \vec{b})}{|\vec{a}| |\vec{a} - \vec{b}|} = \frac{\vec{a}^2 - \vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{a} - \vec{b}|} = \frac{t^2}{t \times \sqrt{2}t} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

由于 $\langle \vec{a}, \vec{a} - \vec{b} \rangle \in [0, \pi]$,

所以 $\vec{a}$ 与 $\vec{a} - \vec{b}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{4}$.

故选: C.

4. 国家速滑馆又称“冰丝带”, 是北京 2022 年冬奥会的标志性场馆, 拥有亚洲最大的全冰面设计, 但整个系统的碳排放接近于零, 做到了真正的智慧场馆、绿色场馆, 并且为了倡导绿色可循环的理念, 场馆还配备了先进的污水、雨水过滤系统, 已知过滤过程中废水的污染物数量 N (mg/L) 与时间 t 的关系为 $N = N_0 e^{-kt}$ (N_0 为最初污染物数量). 如果前 2 个小时消除了 20% 的污染物, 那么前 6 个小时消除了污染物的 ()

- A. 51.2% B. 48.8% C. 52% D. 48%

【答案】B

【解析】依题意有 $N_0 e^{-2k} = (1 - 20\%) N_0$, 可得 $e^{-2k} = 0.8$,

$$\text{当 } t = 6 \text{ 时, } N_0 e^{-6k} = N_0 (e^{-2k})^3 = 0.512 N_0 = (1 - 48.8\%) N_0$$

因此, 前 6 个小时消除了污染物的 48.8%.

故选: B.

5. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 满足: 首项 $a_1 > 0$, 公比为 q , 前 n 项和为 S_n , 则 $S_n > 0$ 对任意的 $n \in \mathbf{N}^*$ 恒成立”是“ $q > 0$ ”的 ()

- A. 充分必要条件 B. 充分而不必要条件
C. 必要而不充分条件 D. 既不充分也不必要条件

【答案】C

【解析】若 $a_1 > 0$, 且公比 $q > 0$, 则 $a_n = a_1 q^{n-1} > 0$,

所以对于任意 $n \in \mathbf{N}^*$, $S_n > 0$ 成立, 故必要性成立;

若 $a_1 > 0$, 且 $q = -\frac{1}{2}$, 则

$$S_n = \frac{a_1 \left[1 - \left(-\frac{1}{2} \right)^n \right]}{1 - \left(-\frac{1}{2} \right)} = \frac{2}{3} a_1 \left[1 - \left(-\frac{1}{2} \right)^n \right] = \frac{2}{3} a_1 \left[1 - (-1)^n \times \left(\frac{1}{2} \right)^n \right] > 0$$

所以由对于任意的 $n \in \mathbf{N}^*$, $S_n > 0$, 推不出 $q > 0$, 故充分性不成立;

高级中学名校试卷

则“ $S_n > 0$ 对任意的 $n \in \mathbf{N}^*$ 恒成立”是“ $q > 0$ ”的必要不充分条件，

故选:C.

6. 已知抛物线 $C: y^2 = 4x$ 的焦点为 F ，准线为 l ， P 是 l 上一点， Q 是直线 PF 与 C 的交

点，若 $\vec{FP} = 4\vec{FQ}$ ，则 $|FQ| =$ ()

A. $\frac{3}{2}$

B. $\frac{2}{3}$

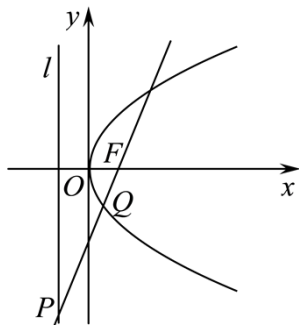
C. $\frac{3}{4}$

D. $\frac{4}{3}$

【答案】A

【解析】易知抛物线 $C: y^2 = 4x$ 的焦点为 $F(1,0)$ ，准线方程为 $x = -1$ ，设点 $P(-1, t)$ 、

$Q(x, y)$ ，



因为 $\vec{FP} = 4\vec{FQ}$ ，即 $(-2, t) = 4(x-1, y)$ ，

$$\text{可得} \begin{cases} 4(x-1) = -2 \\ 4y = t \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{t}{4} \end{cases},$$

即点 $Q\left(\frac{1}{2}, \frac{t}{4}\right)$ ，

由抛物线的焦半径公式可得 $|FQ| = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$.

故选: A.

7. 已知圆锥的轴截面是边长为 2 的等边三角形，现往圆锥内放入一个体积最大的球，则球的表面积与圆锥的侧面积之比是 ()

A. 1:3

B. 2:3

C. 3:2

D. 4:5

【答案】B

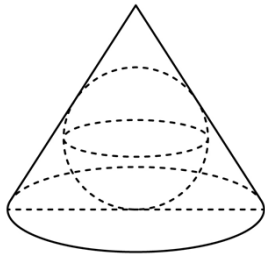
【解析】圆锥内放入一个体积最大的球，其半径为圆锥的轴截面等边三角形的内切圆半径，

故该球的半径为 $2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ，故球的表面积为 $4\pi \times \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{4\pi}{3}$ ，

圆锥的侧面积为 $\frac{1}{2} \times 2 \times \pi \times 2 = 2\pi$,

则球的表面积与圆锥的侧面积之比是 $\frac{4\pi}{\frac{3}{2\pi}} = \frac{2}{3}$.

故选: B.



8. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, $f(x-2)$ 为偶函数, $f(x-3)+f(-x+1)=0$, 当

$x \in [-1, 0]$ 时, $f(x) = x+1$, 则 $\sum_{k=1}^{19} f(k) = (\quad)$

- A. 19 B. 0 C. 1 D. -1

【答案】D

【解析】因为 $f(x-2)$ 是偶函数, 所以 $f(x-2) = f(-x-2)$,

将 x 换为 $x+2$, 得 $f(x) = f(-4-x)$ ①(即对称轴 $x=-2$),

又因为 $f(x-3)+f(-x+1)=0$, 所以 $f(x-3) = -f(-x+1)$,

将 x 换为 $x+3$ 得 $f(x) = -f(-x-2)$ ②(即对称中心 $(-1, 0)$).

由①②得 $f(-4-x) = -f(-x-2)$,

令 $t = -x-2$, 则 $-4-x = t-2$, 所以 $f(t-2) = -f(t)$,

将 t 换 x 得 $f(x-2) = -f(x)$ ③,

将 t 换为 $x-2$ 得 $f(x-4) = -f(x-2)$ ④.

由③④得 $f(x-4) = f(x)$, 将 x 换为 $x+4$ 得 $f(x) = f(x+4)$ ⑤

所以函数 $f(x)$ 是周期为 4 的周期函数 (由对称中心和对称轴也可直接得到周期为 4),

当 $x \in [-1, 0]$ 时, $f(x) = x+1$, 则 $f(0) = 1$, $f(-1) = 0$,

由③得 $f(-2) = -f(0) = -1$, 由④得 $f(-3) = -f(-1) = 0$,

根据周期性⑤得:

$f(1) = f(-3) = 0$, $f(2) = f(-2) = -1$, $f(3) = f(-1) = 0$, $f(4) = f(0) = 1$,

高级中学名校试卷

所以 $f(1)+f(2)+f(3)+f(4)=0-1+0+1=0$,

又因为 $19=4\times 4+3$, 故

$$\sum_{k=1}^{19} f(k) = 4[f(1)+f(2)+f(3)+f(4)] + f(1)+f(2)+f(3) = 4\times 0+0-1+0 = -1.$$

故选: D.

二、多项选择题 (本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项是符合题目要求的. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分)

9. 下列说法正确的是 ()

A. 若等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 则其前 n 项和为 $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$

B. 已知数列 $\{a_n\}$ 为等差数列, 若 $m+n=p+q$ (其中 $m, n, p, q \in \mathbf{N}^*$), 则

$$a_m + a_n = a_p + a_q$$

C. 若数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$, 其前 n 项和为 S_n , 则 $S_{2024} = \frac{2023}{2024}$

D. 若数列 $\{a_n\}$ 的首项为 1, 其前 n 项和为 S_n , 且 $a_1+2a_2+3a_3+\dots+na_n=2^n-1$, 则

$$a_n = \frac{2^{n-1}}{n}$$

【答案】BD

【解析】对于 A 选项, 当 $q=1$ 时, $S_n=na_1$; 当 $q \neq 1$ 时, $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$.

$$\text{即 } S_n = \begin{cases} na_1, & q=1 \\ \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}, & q \neq 1 \end{cases}, \text{ A 错;}$$

对于 B 选项, 因为数列 $\{a_n\}$ 为等差数列, 若 $m+n=p+q$ (其中 $m, n, p, q \in \mathbf{N}^*$),

则 $a_m+a_n=a_p+a_q$, B 对;

对于 C 选项, 因为 $a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$,

$$\text{所以, } S_{2024} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2024} - \frac{1}{2025}\right) = 1 - \frac{1}{2025} = \frac{2024}{2025}, \text{ C}$$

错;

高级中学名校试卷

对于 D 选项, 对任意的 $n \in \mathbf{N}^*$, $a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \dots + na_n = 2^n - 1$,

当 $n=1$ 时, 则有 $a_1 = 2 - 1 = 1$,

当 $n \geq 2$ 时, 由 $a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \dots + na_n = 2^n - 1$ 可得

$$a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \dots + (n-1)a_{n-1} = 2^{n-1} - 1,$$

上述两个等式作差可得 $na_n = 2^n - 2^{n-1} = 2^{n-1}$, 则 $a_n = \frac{2^{n-1}}{n}$,

$a_1 = 1$ 也满足 $a_n = \frac{2^{n-1}}{n}$, 故对任意的 $n \in \mathbf{N}^*$, $a_n = \frac{2^{n-1}}{n}$, D 对.

故选: BD.

10. 关于函数 $f(x) = \sin|x| + |\sin x|$ 有下述四个结论, 其中结论正确的是 ()

A. $f(x)$ 是偶函数

B. $f(x)$ 在区间 $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ 单调递增

C. $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 有 3 个零点

D. $f(x)$ 的最大值为 2

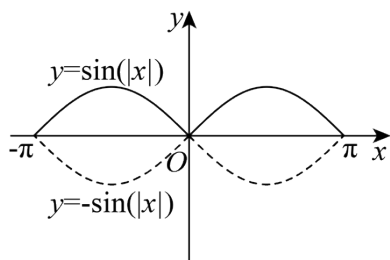
【答案】ACD

【解析】对于 A: $f(-x) = \sin|-x| + |\sin(-x)| = \sin|x| + |\sin x| = f(x)$, 又函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, A 正确;

对于 B: 当 $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ 时, $f(x) = \sin x + \sin x = 2\sin x$, 其在 $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ 单调递减, B 错误;

对于 C: 令 $f(x) = \sin|x| + |\sin x| = 0$, 即 $\sin|x| = -|\sin x|$,

画出函数 $y = \sin|x|$, $y = -|\sin x|$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上的图象如下图:



$y = \sin|x|$ 为实线图象, $y = -|\sin x|$ 为虚线图象,

观察图象可得, 两个函数图象在 $[-\pi, \pi]$ 上有 3 个交点, 横坐标分别为 $-\pi, 0, \pi$,

高级中学名校试卷

故 $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 有 3 个零点，C 正确；

对于 D：对于 $y = \sin|x|$ ，明显其最大值可以取到 1，

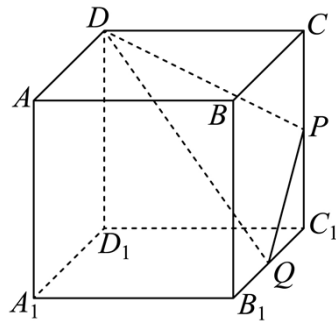
对于 $y = |\sin x|$ ，明显其最大值也可以取到 1，

当 $x = \frac{\pi}{2}$ 时， $y = \sin|x|$ 和 $y = |\sin x|$ 可同时取到最大值 1，

所以 $f(x)$ 的最大值为 2，D 正确.

故选：ACD.

11. 如图，在棱长为 2 的正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中， Q 为线段 B_1C_1 的中点， P 为线段 CC_1 上的动点（含端点），则下列结论正确的有（ ）



A. 三棱锥 $P - ADD_1$ 的体积为 $\frac{4}{3}$

B. 直线 DQ 与下底面所成角的正弦值为 $\frac{2}{3}$

C. P 为线段 CC_1 的中点时，过 D, P, Q 三点的平面截正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 所得截面的周长为 $2(\sqrt{2} + \sqrt{5})$

D. 三棱锥 $P - C_1D_1Q$ 的外接球体积的最大值为 $\frac{9\pi}{2}$

【答案】ABD

【解析】对于 A： P 为线段 CC_1 上的动点，

又 $CC_1 \parallel$ 平面 ADD_1 ，

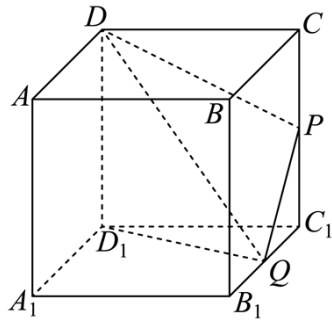
所以 $V_{P-ADD_1} = V_{C-ADD_1} = \frac{1}{3} \times 2 \times \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = \frac{4}{3}$ ，正确；

对于 B：连接 D_1Q ，

因为 $D_1D \perp$ 面 $A_1B_1C_1D_1$ ，

所以 $\angle DQD_1$ 为直线 DQ 与下底面所成角，

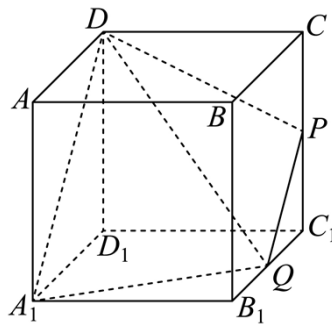
所以 $\sin \angle DQD_1 = \frac{DD_1}{DQ} = \frac{2}{\sqrt{2^2+2^2+1}} = \frac{2}{3}$, 正确;



对于 C: 连接 A_1D, A_1Q , 明显有 $PQ \parallel DA_1$,

所以过 D, P, Q 三点的平面截正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 所得截面为四边形 A_1B_1PQ ,

四边形 A_1B_1PQ 的周长为 $\sqrt{1+1} + \sqrt{1+4} + \sqrt{1+4} + \sqrt{4+4} = 3\sqrt{2} + 2\sqrt{5}$, 错误;

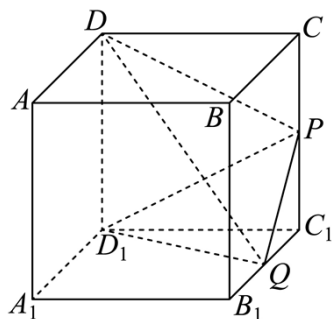


对于 D: 因为 C_1P, C_1Q, C_1D_1 两两垂直,

所以三棱锥 $P-C_1D_1Q$ 的外接球半径为 $\frac{1}{2}\sqrt{C_1P^2 + C_1Q^2 + C_1D_1^2} = \frac{1}{2}\sqrt{C_1P^2 + 5}$,

故当 C_1P 最大时, 三棱锥 $P-C_1D_1Q$ 的外接球半径最大,

此时 $C_1P = 2$, $\frac{1}{2}\sqrt{C_1P^2 + 5} = \frac{3}{2}$, 此时体积为 $\frac{4}{3}\pi\left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{9}{2}\pi$, 正确.



故选: ABD.

12. 某学校数学课外兴趣小组研究发现: 椭圆的两条互相垂直的切线交点的轨迹是以椭圆

中心为圆心的圆, 称为该椭圆的“蒙日圆”. 利用此结论解决下列问题: 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$

$=1(a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, F_1, F_2 为 C 的左、右焦点且 $|F_1F_2| = 2$, A 为 C 上一动

点, 直线 $l: bx + ay - a^2 = 0$. 说法中正确的有 ()

A. 椭圆 C 的“蒙日圆”的面积为 3π

B. 对直线 l 上任意点 P , 都有 $|PF_1| + |PF_2| > 2a$

C. 椭圆 C 的标准方程为 $C: \frac{x^2}{2} + y^2 = 1$

D. 椭圆 C 的“蒙日圆”的两条弦 PM, PN 都与椭圆 C 相切, 则 $\triangle PMN$ 面积的最大值为 6

【答案】AC

【解析】因为 $|F_1F_2| = 2$, 又 $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 所以 $a^2 = 2, b = c = 1$,

故椭圆的方程为 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$, 所以选项 C 正确;

对于选项 A, 设蒙日圆的半径为 r , 所以蒙日圆的方程为 $x^2 + y^2 = r^2$,

如图 1, 过椭圆右顶点和上顶点分别作椭圆的切线, 相交于点 G ,

易知点 G 的坐标为 $(\sqrt{2}, 1)$, 且点 G 在蒙日圆上, 所以 $r^2 = 2 + 1 = 3$, 故“蒙日圆”的面积为 3π , 所以选项 A 正确;

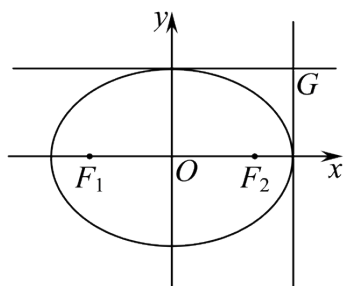


图1

对于选项 B, 因为直线 l 的方程为 $x + \sqrt{2}y - 2 = 0$, 椭圆方程 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$,

$$\text{联立} \begin{cases} \frac{x^2}{2} + y^2 = 1 \\ x + \sqrt{2}y - 2 = 0 \end{cases}, \text{消 } x \text{ 得 } 4y^2 - 4\sqrt{2}y + 2 = 0, \text{ 则 } \Delta = (4\sqrt{2})^2 - 4 \times 4 \times 2 = 0,$$

所以直线与椭圆相切, 由椭圆定义知, 切点到两焦点的距离和为 $2a$, 所以选项 B 错误;

对于选项 D, 由蒙日圆的定义可知, $MP \perp PN$, 则 MN 为蒙日圆的直径,

如图 2, 连接 OP , 设 $P(a, b)$, 则 $|OP| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{3}$,

$$|MN| = 2|OP| = 2\sqrt{a^2 + b^2},$$

高级中学名校试卷

设 $|MP|=m, |PN|=n$,

所以 $m^2 + n^2 = |MN|^2 = 4(a^2 + b^2)$, 又 $m^2 + n^2 \geq 2mn$ (当且仅当 $m = n$ 时取等号),

所以 $4(a^2 + b^2) \geq 2mn$, 即 $mn \leq 2(a^2 + b^2)$,

所以 $S_{\text{VMPN}} = \frac{1}{2}mn \leq \frac{1}{2} \cdot 2(a^2 + b^2) = a^2 + b^2 = 3$ ，故选项 D 错误；

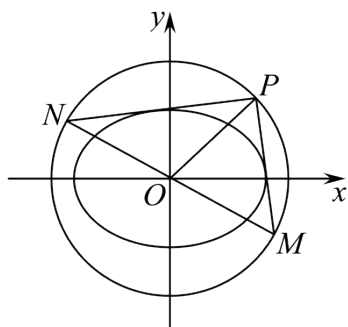


图2

故选: AC.

第II卷（非选择题，共90分）

注意事项:

第II卷用黑色碳素笔在答题卡上各题的答题区域内作答,在试题卷上作答无效.

三、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

13. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且满足 $a_1=1, S_3=52$, 则 $S_7=$ _____.

【答案】 $\frac{35}{2}$

【解析】 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d ，

$$\text{由已知 } S_{13} = \frac{13(a_1 + a_{13})}{2} = \frac{13(1 + a_{13})}{2} = 52,$$

得 $a_{13} = 7$,

$$\text{所以 } d = \frac{a_{13} - a_1}{13 - 1} = \frac{7 - 1}{13 - 1} = \frac{1}{2},$$

所以 $S_7 = 7a_1 + \frac{7 \times 6}{2}d = 7 + \frac{7 \times 6}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{35}{2}$.

故答案为: $\frac{35}{2}$.

14. 一组数据按从小到大排列为1、4、4、4、 x 、7、8，若该组数据的第60百分位

数是众数的 $\frac{7}{4}$ 倍，则这组数据的平均数是_____.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：

<https://d.book118.com/608122122016007030>