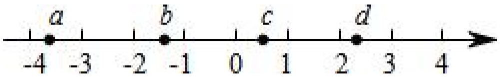
2024年广东省广州市天河中学中考数学一模试卷

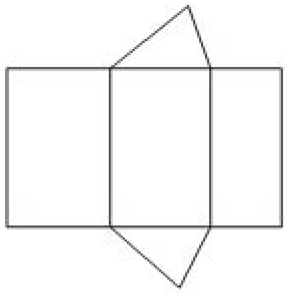
一、选择题：本题共10小题，每小题3分，共30分。在每小题给出的选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 实数a，b，c，d在数轴上的对应点的位置如图所示，这四个数中，绝对值最大的是(   )



A. a　　B. b　　C. c　　D. d

2. 如图是某个几何体的展开图，该几何体是(   )



A. 三棱柱

B. 三棱锥

C. 四棱柱

D. 圆柱

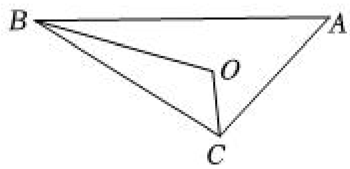
3. 下列计算正确的是(   )

A. $\sqrt{12}=3\sqrt{2}$　　B. $(-a^2)^2=-a^4$　　C. $3ab-ab=2$　　D. $2^{-2}=\frac{1}{4}$

4. 将直线$y=3x$沿y轴向上平移3个单位，得到的直线与y轴的交点坐标为(   )

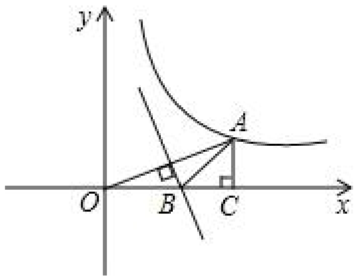
A. $(3,0)$　　B. $(-3,0)$　　C. $(0,3)$　　D. $(0,-3)$

5. 如图，$\triangle ABC$中，$\angle ABC=50^\circ$，$\angle ACB=80^\circ$，点O是内心，则$\angle BOC$的度数是(   )



A. 50°　　B. 100°　　C. 115°　　D. 120°

6. 如图，点$A(3,n)$在双曲线$y=\frac{3}{x}$上，过点A作$AC\perp x$轴，垂足为C.线段OA的垂直平分线交OC于点B，则$\triangle ABC$周长的值是(   )



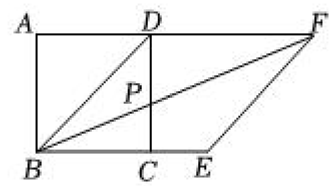
A. 8

B. 6

C. $1+2\sqrt{3}$

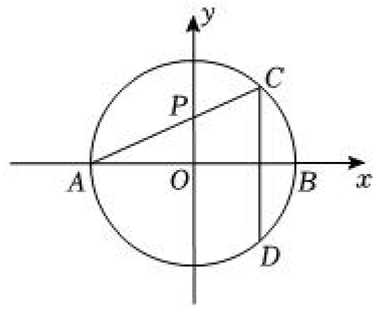
D. 4

7. 如图，正方形 $ABCD$ 的对角线 BD 是菱形 $BEFD$ 的一边，菱形 $BEFD$ 的对角线交正方形 $ABCD$ 的一边 CD 于点 P，则 $\angle PBC$ 的度数是(　)



A. 22.5°　　B. 45°　　C. 25°　　D. 67.5°

8. 如图，在平面直角坐标系中，以原点 O 为圆心的圆与 x 轴交于 A、B 两点，弦 $CD\perp AB$，AC 与 y 轴相交于点 P，若点 A 的坐标为 $(4a,0)$，且 $AP=2PC$. 则弦 CD 的长为(　)



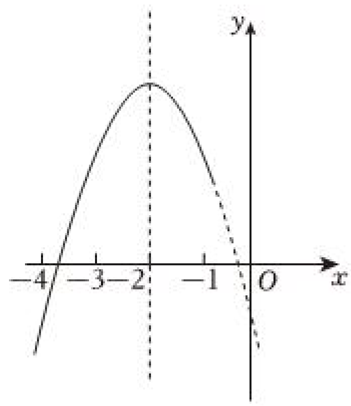
A. $4a$

B. $-4a$

C. $-2\sqrt{3}a$

D. $-4\sqrt{3}a$

9. 抛物线 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 的图象如图所示，对称轴为直线 $x=-2$. 下列说法错误的是(　)



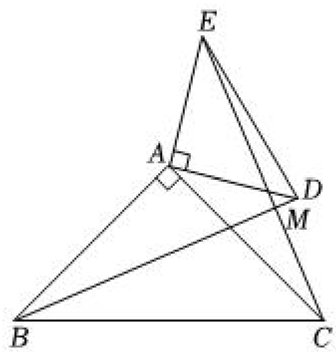
A. $c-3a>0$

B. $4a-2b\geqslant m(am+b)$(m 为全体实数)

C. $4a^2-2ab\geqslant at(at+b)$($t$ 为全体实数)

D. 若图象上存在点 $A(x_1,y_1)$ 和点 $B(x_2,y_2)$，当 $n<x_1<x_2<n+3$ 时，满足 $y_1=y_2$，则 n 的取值范围为 $-5<n<-2$

10. 如图，$\triangle ABC$ 和 $\triangle ADE$ 是以点 A 为直角顶点的等腰直角三角形，把 $\triangle ADE$ 以 A 为中心顺时针旋转，点 M 为射线 BD、CE 的交点.若 $AB=\sqrt{3}$，$AD=1$. 以下结论：① $BD=CE$；② $BD\perp CE$；③当点 E 在 BA 的延长线上时，$MC=\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}$；④在旋转过程中，当线段 MB 最短时，$\triangle MBC$ 的面积为 $\dfrac{1}{2}$. 其中正确结论有(　)



A. 1 个

B. 2 个

C. 3 个

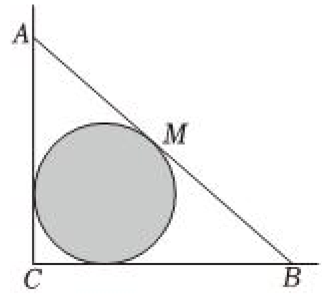
D. 4 个

二、填空题：本题共 6 小题，每小题 3 分，共 18 分。

11. 函数 $y=\sqrt{2x-3}$ 的自变量 x 的取值范围是______.

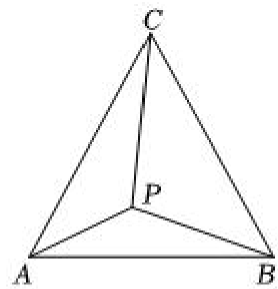
12.

13. 如图，公路 AC，BC 互相垂直，公路 AB 的中点 M 与点 C 被一片草地隔开.若测得 AB 的长为 $1km$，则 M，C 两点间的距离为______ km.

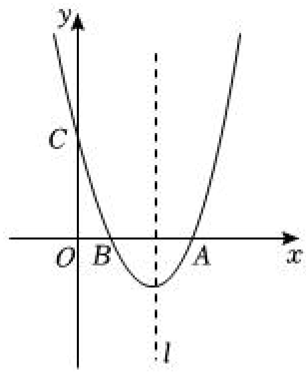


14. 不等式组 $\begin{cases}2x-1>0\\3x-1<x+4\end{cases}$ 的整数解为______.

15. 如图，$\triangle ABC$ 为等边三角形，$AB=2\sqrt{3}$，若 P 为 $\triangle ABC$ 内一动点，且满足 $\angle PAB=\angle ACP$，则点 P 运动的路径长为______.



16. 如图，二次函数 $y=x^2+bx+c$ 的图象与 x 轴交于 A，B 两点，与 y 轴交于 C 点，其中 $B(1,0)$，$C(0,3)$. 点 Q 是对称轴 l 上一点，且点 Q 的纵坐标为 a，当 $\triangle QAC$ 是锐角三角形时，则 a 的取值范围是______.



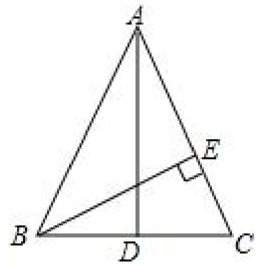
三、计算题：本大题共 **1** 小题，共 **4** 分。

17. 解方程：$x(x-2)+x-2=0$.

四、解答题：本题共 **8** 小题，共 **68** 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

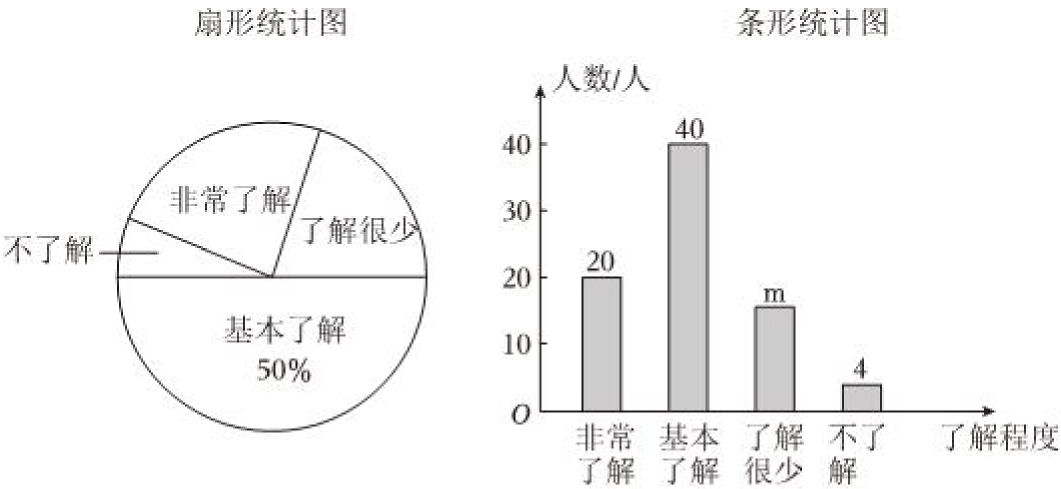
18.（本小题 4 分）

如图，在 $\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，AD 是 BC 边上的中线，$BE\perp AC$ 于点 E. 求证：$\angle CBE=\angle BAD$.



19.（本小题 6 分）

中学生心理健康受到社会的广泛关注，某校开展心理健康教育专题讲座，就学生对心理健康知识的了解程度，采用随机抽样调查的方式，根据收集到的信息进行统计，绘制了下面两幅尚不完整的统计图.



根据图中信息回答下列问题：

(1) 接受问卷调查的学生共有______人，条形统计图中 m 的值为______，扇形统计图中“非常了解”部分所对应扇形的圆心角的度数为______；

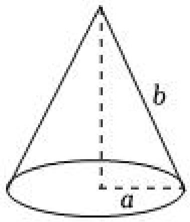
(2) 若某班要从对心理健康知识达到“非常了解”程度的 2 名男生和 2 名女生中随机抽取 2 人参加心理健康知识竞赛，请用列表或画树状图的方法，求恰好抽到 2 名女生的概率.

20.（本小题 8 分）

已知 $M=(\frac{1}{a-b}-\frac{1}{a+b})\div\frac{ab^2}{a^2-b^2}$.

(1) 化简 M;

(2) 如图，a，b 分别为圆锥的底面半径和母线的长度，若圆锥的侧面积为24π，求 M 的值.

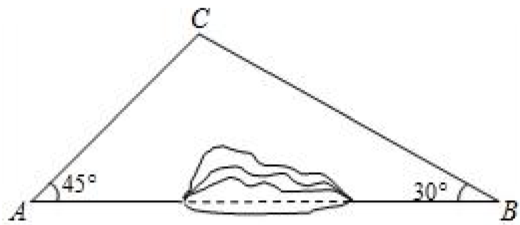


21.（本小题 8 分）

为加快城乡对接，建设全域美丽乡村，某地区对 A、B 两地间的公路进行改建．如图，A、B 两地之间有一座山，汽车原来从 A 地到 B 地需途经 C 地沿折线 ACB 行驶，现开通隧道后，汽车可直接沿直线 AB 行驶．已知 $BC=80$ 千米，$\angle A=45°$，$\angle B=30°$.

(1) 开通隧道前，汽车从 A 地到 B 地大约要走多少千米？

(2) 开通隧道后，汽车从 A 地到 B 地大约可以少走多少千米？（结果精确到 0.1 千米）(参考数据：$\sqrt{2}\approx1.41$，$\sqrt{3}\approx1.73$)

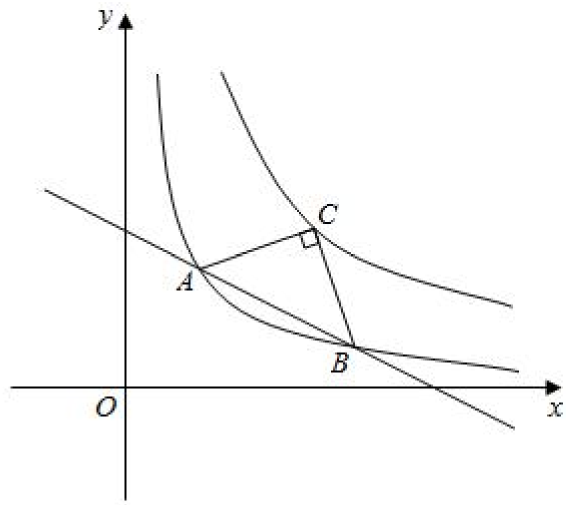


22.（本小题 8 分）

如图，直线 $y=kx+2$ 与双曲线 $y=\frac{1.5}{x}$ 相交于点 A、B，已知点 A 的横坐标为1.

(1) 求直线 $y=kx+2$ 的解析式及点 B 的坐标；

(2) 以线段 AB 为斜边在直线 AB 的上方作等腰直角三角形 ABC. 求经过点 C 的双曲线的解析式.



23.（本小题 10 分）

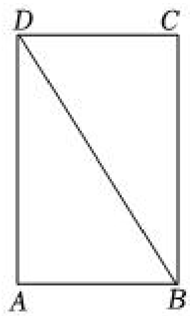
如图，BD 是矩形 $ABCD$ 的对角线.

(1) 求作 $\odot A$，使得 $\odot A$ 与 BD 相切（要求：尺规作图，不写作法，保留作图痕迹）；

(2) 在 (1) 的条件下，设 BD 与 $\odot A$ 相切于点 E，$CF\perp BD$，垂足为 F. 若直线 CF 与 $\odot A$ 相切于点 G.

①求证：四边形 $AEFG$ 是正方形；

②求 $\tan\angle ADB$ 的值.



24.（本小题 12 分）

平面直角坐标系中，抛物线 $y=ax^2-3ax+1$ 与 y 轴交于点 A.

(1) 求点 A 的坐标及抛物线的对称轴；

(2) 若 $-1\leqslant x\leqslant 3$，y 有最大值为 3，求 a 的值；

(3) 已知点 $P(0,2)$、$Q(a+2,1)$，若线段 PQ 与抛物线只有一个公共点，结合函数图象，求 a 的取值范围.

25.（本小题 12 分）

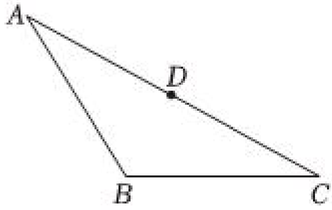
如图，在等腰 $\triangle ABC$ 中，$\angle ABC=120^\circ$，$AB=BC$，D 是边 AC 中点，E 是线段 AD 上的一动点，边 BC 关于 BE 对称的线段为 BF，连接 AF.

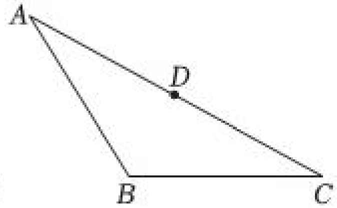
(1) 若 $\angle ABE=15^\circ$，求证：$\triangle ABF$ 是等腰直角三角形；

(2) 延长 FA，交射线 BE 于点 G.

①$\triangle BGF$ 能否为等腰三角形？如果能，求此时 $\angle ABE$ 的度数：如果不能，请说明理由；

②若 $AB=\sqrt{3}+3$，求 $\triangle BGF$ 面积的最大值，并求此时 AE 的长.





备用图

答案和解析

1.【答案】A

【解析】【分析】

此题主要考查了有理数大小的比较方法，数轴以及绝对值的定义．根据数轴的特征，以及绝对值的含义即可判断出这四个数绝对值的大小．

【解答】

解：根据绝对值的定义，距离原点越远绝对值越大可知这四个数中，绝对值最大的是a.

故选：A.

2.【答案】A

【解析】解：从展开图可知，该几何体有五个面，两个三角形的底面，三个长方形的侧面，因此该几何体是三棱柱，

故选：A.

通过展开图的面数，展开图的各个面的形状进行判断即可．

本题考查棱柱的展开与折叠，掌握棱柱展开图的特征是正确判断的关键．

3.【答案】D

【解析】解：A、$\sqrt{12}=2\sqrt{3}$，故该项不正确，不符合题意；

B、$(-a^2)^2=a^4$，故该项不正确，不符合题意；

C、$3ab-ab=2ab$，故该项不正确，不符合题意；

D、$2^{-2}=\dfrac{1}{4}$，故该项正确，符合题意；

故选：D.

根据幂的乘方与积的乘方法则、算术平方根的性质、合并同类项的方法、负整数指数幂法则进行解题即可．

本题考查幂的乘方与积的乘方、算术平方根、合并同类项、负整数指数幂，熟练掌握运算法则是解题的关键．

4.【答案】C

【解析】解：将直线$y=3x$沿y轴向上平移3个单位，得到的直线$y=3x+3$，

当$x=0$时，$y=3$，

$\therefore$平移后的直线与y轴的交点坐标为$(0,3)$，

故选：C.

根据一次函数平移的性质，可得平移后的解析式，进一步即可求出直线与 y 轴交点坐标.

本题考查了一次函数图象的平移，熟练掌握一次函数平移的性质是解题的关键.

5.【答案】C

【解析】解：$\because$ 点 O 是 $\triangle ABC$ 的内心，

$\therefore BO$ 平分 $\angle ABC$，CO 平分 $\angle ACB$，

$\because \angle ABC = 50^\circ$，$\angle ACB = 80^\circ$，

$\therefore \angle OBC = \angle ABO = \frac{1}{2}\angle ABC = 25^\circ$，$\angle OCB = \angle ACO = \frac{1}{2}\angle ACB = 40^\circ$，

$\therefore \angle BOC = 180^\circ - \angle OBC - \angle OCB = 180^\circ - 25^\circ - 40^\circ = 115^\circ$，

故选：C.

由点 O 是 $\triangle ABC$ 的内心，求得 $\angle OBC = \frac{1}{2}\angle ABC = 25^\circ$，$\angle OCB = \frac{1}{2}\angle ACB = 40^\circ$，则 $\angle BOC = 180^\circ - \angle OBC - \angle OCB = 115^\circ$，于是得到问题的答案.

此题重点考查三角形的内心的定义、三角形内角和定理等知识，求得 $\angle OBC = \frac{1}{2}\angle ABC = 25^\circ$，$\angle OCB = \frac{1}{2}\angle ACB = 40^\circ$ 是解题的关键.

6.【答案】D

【解析】解：$\because$ 点 $A(3,n)$ 在双曲线 $y = \frac{3}{x}$ 上，

$\therefore n = 1$，

$\therefore A(3,1)$，

$\therefore OC = 3$，$AC = 1$.

$\because OA$ 的垂直平分线交 OC 于 B，

$\therefore AB = OB$，

$\therefore \triangle ABC$ 的周长 $= AB + BC + AC = OB + BC + AC = OC + AC = 3 + 1 = 4$.

故选：D.

先求出点 A 的坐标，根据点的坐标的定义得到 $OC = 3$，$AC = 1$，再根据线段垂直平分线的性质可知 $AB = OB$，由此推出 $\triangle ABC$ 的周长 $= OC + AC$.

本题主要考查了反比例函数的图象性质和线段中垂线的性质，将求 $\triangle ABC$ 的周长转换成求 $OC + AC$ 是解题的关键.

7.【答案】A

【解析】解：由正方形 *ABCD*，菱形 *BEFD*，

得 $\angle DBC=45^\circ$，$\angle PBC=\dfrac{1}{2}\angle DBC=\dfrac{1}{2}\times45^\circ=22.5^\circ$.

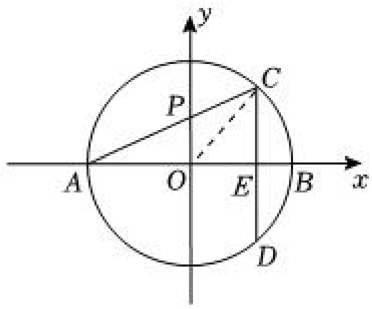
故选：A.

由正方形 *ABCD*，菱形 *BEFD*，即可得 $\angle DBC=45^\circ$，$\angle PBC=\dfrac{1}{2}\angle DBC=\dfrac{1}{2}\times45^\circ=22.5^\circ$.

本题主要考查了正方形的性质，解题关键是正确应用菱形的性质.

8.【答案】D

【解析】解：连接 *OC*，*CD* 交 *AB* 于 *E* 点，如图，



$\because CD\perp AB$，

$\therefore CE=DE$，

$\because$点 *A* 的坐标为$(4a,0)$，

$\therefore OC=OA=-4a$，

$\because OP//CE$，

$\therefore \dfrac{OA}{OE}=\dfrac{AP}{PC}=\dfrac{2PC}{PC}=2$，

$\therefore OE=\dfrac{1}{2}OA=-2a$，

在$\mathrm{Rt}\triangle OCE$中，$CE=\sqrt{OC^2-OE^2}=\sqrt{(4a)^2-(-2a)^2}=-2\sqrt{3}a$，

$\therefore CD=2CE=-4\sqrt{3}a$.

故选：D.

连接 *OC*，*CD* 交 *AB* 于 *E* 点，如图，先根据垂径定理得到$CE=DE$，再利用平行线分线段成比例定理得到$OE=\dfrac{1}{2}OA=-2a$，然后利用勾股定理计算出 *CE*，从而得到 *CD* 的长.

本题考查了垂径定理：垂直于弦的直径平分这条弦，并且平分弦所对的两条弧．也考查了坐标与图形性质、平行线分线段成比例定理和勾股定理.

9.【答案】C

【解析】解：$\because$抛物线开口向下，

$\therefore a<0$，

$\because$对称轴为直线$x=-2$，

$\therefore -\dfrac{b}{2a}=-2$，

$\therefore b=4a$，代入原解析式得：$y=ax^2+4ax+c$，

由图象可得：当$x=-1$时，$y>0$，

即：$a\times(-1)^2+4a\times(-1)+c>0$，

$\therefore c-3a>0$，故A正确；

$\because x=-2$时，函数有最大值$4a-2b+c\geqslant am^2+bm+c$，

即$4a-2b\geqslant m(am+b)$，故B正确；

$\because t$为全体实数时，$4a-2b\geqslant t(at+b)$，$a<0$，

$\therefore 4a^2-2ab\leqslant at(at+b)(t$为全体实数$)$，故$C$错误；

由题意得：x_1、x_2是一元二次方程$ax^2+bx+c=0$的两个根，

从图象上看，由于二次函数具有对称性，x_1、x_2关于直线$x=-2$对称，

$\therefore$当且仅当$n<-2<n+3$时，存在点$A(x_1,y_1)$和$B(x_2,y_2)$，

当$n<x_1<x_2<n+3$时，满足$y_1=y_2$，

即m的取值范围为$-5<n<-2$，故D正确.

故选：C.

由抛物线的对称轴得出$b=4a$，由图象可得，当$x=-1$时，$y>0$，即可判断A；利用二次函数的最值即可判断B；根据二次函数的最值以及a的符号即可判断C；利用二次函数的对称性即可判断D.

本题主要考查了二次函数字母系数与图象的关系、二次函数与一元二次方程的关系等知识，熟练掌握相关性质是解答本题的关键.

10.【答案】D

【解析】解：$\because\triangle ABC$和$\triangle ADE$是以点A为直角顶点的等腰直角三角形，

$\therefore BA=CA$，$DA=EA$，$\angle BAC=\angle DAE=90^\circ$，

$\therefore\angle BAD=\angle CAE$，

在$\triangle BAD$和$\triangle CAE$中

$$\begin{cases}BA=CA\\ \angle BAD=\angle CAE\\ DA=EA\end{cases}$$

$\therefore\triangle BAD\cong\triangle CAE(SAS)$，

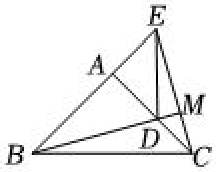
$\therefore BD=CE$，$\angle ABD=\angle ACE$，故①正确；

设$\angle ABD=\angle ACE=x$，$\angle DBC=45^\circ-x$，

$\therefore\angle EMB=\angle DBC+\angle BCM=\angle DBC+\angle BCA+\angle ACE=45^\circ-x+45^\circ+x=90^\circ$，

$\therefore BD\perp CE$，故②正确；

当点 E 在 BA 的延长线上时，如图：



同理可得 $\angle DMC=90^\circ$，

$\therefore \angle DMC=\angle EAC$，

$\because \angle DCM=\angle ECA$，

$\therefore \angle DCM\backsim \triangle ECA$

$\therefore \dfrac{MC}{AC}=\dfrac{CD}{EC}$，

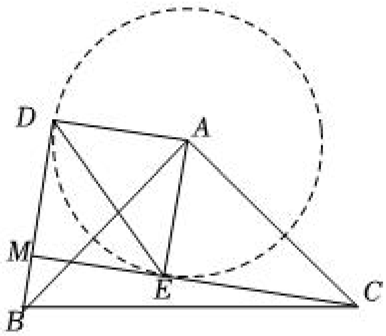
$\because AB=\sqrt{3}=AC$，$AD=1=AE$，

$\therefore CD=AC-AD=\sqrt{3}-1$，$CE=\sqrt{AE^2+AC^2}=2$，

$\therefore \dfrac{MC}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$，

$\therefore MC=\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}$，故③正确；

④以 A 为圆心，AD 为半径画圆，如图：



$\because \angle BMC=90^\circ$，

$\therefore$ 当 CE 在 $\odot A$ 的下方与 $\odot A$ 相切时，MB 的值最小，

$\therefore \angle ADM=\angle DME=\angle AEM=90^\circ$，

$\because AE=AD$，

$\therefore$ 四边形 $AEMD$ 是正方形，

$\therefore MD=AE=1$，

$\because BD=\sqrt{AB^2-AD^2}=\sqrt{(\sqrt{3})^2-1^2}=\sqrt{2}$，

$\therefore CE=BD=\sqrt{2}$，$BM=BD-MD=\sqrt{2}-1$，

$\therefore MC = CE + ME = \sqrt{2} + 1$，

$\therefore \triangle MBC$ 的面积为$\dfrac{1}{2} \times (\sqrt{2} + 1) \times (\sqrt{2} - 1) = \dfrac{1}{2}$，故④正确，

故选：D.

证明$\triangle BAD \cong \triangle CAE$可判断①，由三角形的外角的性质可判断②，证明$\angle DCM \backsim \angle ECA$，有$\dfrac{MC}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3} - 1}{2}$，即可判断③；以$A$为圆心，$AD$为半径画圆，当$CE$在$\odot A$的下方与$\odot A$相切时，$MB$的值最小，可得四边形$AEMD$是正方形，在$\mathrm{Rt}\triangle MBC$中，$MC = CE + EM = \sqrt{2} + 1$，然后根据三角形的面积公式可判断④.

本题考查等腰直角三角形的旋转问题，涉及全等三角形的判定与性质，相似三角形的判定与性质，最短路径等知识，解题的关键是掌握旋转的性质.

11.【答案】$x \geqslant \dfrac{3}{2}$

【解析】解：$\because 2x - 3 \geqslant 0$，

$\therefore x \geqslant \dfrac{3}{2}$.

故答案为：$x \geqslant \dfrac{3}{2}$.

根据二次根式的被开方数是非负数即可得出答案.

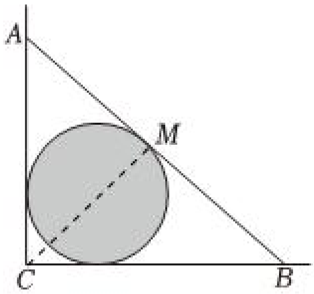
本题考查了函数自变量的取值范围，掌握二次根式的被开方数是非负数是解题的关键.

12.【答案】

【解析】

13.【答案】0.5

【解析】解：连接 CM，



$\because AC \perp BC$，

$\therefore \angle ACB = 90^{\circ}$，

$\because$点 M 是 AB 的中点，$AB = 1km$，

$\therefore CM = \frac{1}{2}AB = 0.5(km)$，

$\therefore M$，C 两点间的距离为 $0.5km$，

故答案为：0.5.

连接 CM，利用直角三角形斜边上的中线性质进行计算，即可解答.

本题考查了直角三角形斜边上的中线，熟练掌握直角三角形斜边上的中线性质是解题的关键.

14.【答案】1 和 2

【解析】解：由 $2x - 1 > 0$，得：$x > \frac{1}{2}$，

由 $3x - 1 < x + 4$，得：$x < \frac{5}{2}$，

则不等式组的解集为 $\frac{1}{2} < x < \frac{5}{2}$，

所以不等式组的整数解为 1 和 2.

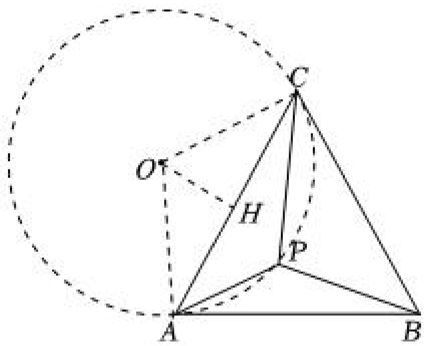
故答案为：1 和 2.

先分别解不等式，求出不等式组的解集，即可得出整数解.

本题考查的是解一元一次不等式组，正确求出每一个不等式解集是基础，熟知“同大取大；同小取小；大小小大中间找；大大小小找不到”的原则是解答此题的关键.

15.【答案】$\frac{4\pi}{3}$

【解析】解：$\because \triangle ABC$ 是等边三角形，



$\therefore \angle BAC = 60^{\circ}$，$AC = AB = 2\sqrt{3}$，

$\therefore \angle PAB + \angle PAC = 60^{\circ}$，

$\because \angle PAB = \angle ACP$，

$\therefore \angle PAC + \angle ACP = 60°$，

$\therefore \angle APC = 120°$，

$\therefore P$ 的运动路线是弧 AC，如图所示，

过 O 作 $OH \perp AC$ 于 H，连接 OC，OA，

$\therefore AH = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} = \sqrt{3}$，

$\because OA = OC$，

$\therefore \angle OAH = \angle OCH$，

$\because \angle AOC = 360° - 2 \times 120° = 120°$，

$\therefore \angle OAH = \frac{1}{2} \times (180° - 120°) = 30°$，

$\therefore OH = \frac{\sqrt{3}}{3}AH = 1$，

$\therefore OB = 2OH = 2$，

$\therefore$弧 AC 的长$= \frac{120\pi \times 2}{180} = \frac{4\pi}{3}$.

$\therefore$点 P 运动的路径长为$\frac{4\pi}{3}$.

故答案为：$\frac{4\pi}{3}$.

由等边三角形的性质推出 $AC = AB = 2\sqrt{3}$，$\angle PAB + \angle PAC = 60°$，得到$\angle PAC + \angle ACP = 60°$，求出$\angle APC = 120°$，得到 P 的运动路线是弧 AC，过 O 作 $OH \perp AC$ 于 H，连接 OC，OA，由垂径定理得到 $AH = \frac{1}{2}AC = \sqrt{3}$，求出$\angle AOC = 120°$，得到$\angle OAH = 30°$，求出$OH = \frac{\sqrt{3}}{3}AH = 1$，得到 $OB = 2OH = 2$，由弧长公式求出弧 AC 的长，.即可得到点 P 运动的路径长.

本题考查等边三角形的性质，圆周角定理，弧长的计算，垂径定理，含 30 度角的直角三角形，关键是求出$\angle APC = 120°$，得到 P 的运动路线是弧 AC.

16.【答案】$\frac{3+\sqrt{17}}{2} < a < 5$或$-1 < a < \frac{3-\sqrt{17}}{2}$

【解析】解：将点 $B(1,0)$，$C(0,3)$代入$y = x^2 + bx + c$，

$\therefore \begin{cases} 1 + b + c = 0 \\ c = 3 \end{cases}$.

$\therefore \begin{cases} b = -4 \\ c = 3 \end{cases}$.

$\therefore$二次函数为$y = x^2 - 4x + 3$.

$\therefore$抛物线的对称轴是直线$x = -\frac{-4}{2} = 2$.