

转化思想在两种题型中的应用

压轴题密押

通用的解题思路：

转化思想方法包含三个基本要素：

- 1、把什么东西转化，即转化的对象；
- 2、转化到何处去，即转化的目标；
- 3、如何进行转化，即转化的方法。

转化思想方法应遵循以下五条原则：

- 1、熟悉化原则：将陌生的问题转化成熟悉的问题，以利于我们运用熟悉的知识、经验和问题来解决；
- 2、简单化原则：将复杂问题转化成简单问题，通过对简单问题的解决，达到解决复杂问题的目的，或获得某种解题的启示和依据；
- 3、和谐化原则：转化问题的条件或结论，使其表现形式更符合数与形内部所表示和谐统一的形式，或者转化命题，使其推演有利于运用某种数学方法或符合人们的思维规律；
- 4、直观化原则：将比较抽象的问题转化为比较直观的问题来解决；
- 5、正难则反原则：当问题正面讨论遇到困难时，应想到考虑问题的反面，设法从问题的反面去探求，使问题获得解决或证明的可能性。

压轴题预测

题型一：圆中的转化思想

题目 1 (2023·齐齐哈尔) 综合与实践：

数学模型可以用来解决一类问题，是数学应用的基本途径。通过探究图形的变化规律，再结合其他数学知识的内在联系，最终可以获得宝贵的数学经验，并将其运用到更广阔的数学天地。

- (1) 发现问题：如图1，在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle AEF$ 中， $AB = AC$ ， $AE = AF$ ， $\angle BAC = \angle EAF = 30^\circ$ ，连接 BE ， CF ，延长 BE 交 CF 于点 D 。则 BE 与 CF 的数量关系：___ $BE = CF$ __， $\angle BDC =$ _____°；
- (2) 类比探究：如图2，在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle AEF$ 中， $AB = AC$ ， $AE = AF$ ， $\angle BAC = \angle EAF = 120^\circ$ ，连接 BE ， CF ，延长 BE ， FC 交于点 D 。请猜想 BE 与 CF 的数量关系及 $\angle BDC$ 的度数，并说明理由；
- (3) 拓展延伸：如图3， $\triangle ABC$ 和 $\triangle AEF$ 均为等腰直角三角形， $\angle BAC = \angle EAF = 90^\circ$ ，连接 BE ， CF ，且点 B ， E ， F 在一条直线上，过点 A 作 $AM \perp BF$ ，垂足为点 M 。则 BF ， CF ， AM 之间的数量关系：_____；
- (4) 实践应用：正方形 $ABCD$ 中， $AB = 2$ ，若平面内存在点 P 满足 $\angle BPD = 90^\circ$ ， $PD = 1$ ，则 $S_{\triangle ABP} =$ _____。

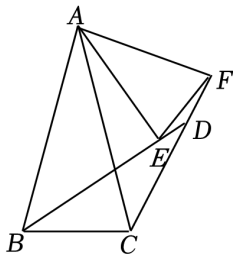


图1

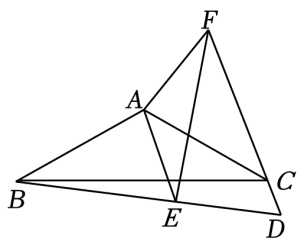


图2

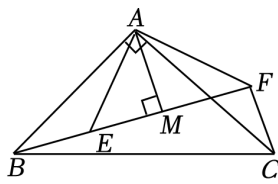
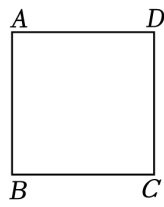


图3



备用图

题目 2 (2024·介休市模拟) 阅读与思考

如图是小强同学的数学课堂笔记本，请仔细阅读，并完成相应的任务。

平面直角坐标系与直角三角形

x 年 $\times$ 月 $\times$ 日 星期三

原理:根据直角三角形的定义,性质,判定,以直角三角形顶点分三种情况进行分类讨论. 口诀:“两线一圆”

作图:举例如下:已知 $A(3,0)$ 、 $B(0,4)$,在直线 $x=1$ 上求点 C ,使得 $\triangle ABC$ 为直角三角形. 以下分三种情况讨论:

情况一:当 A 为直角顶点时,过点 A 作 AB 的垂线 l 交直线 $x=1$ 于点 C ,则交点即为所求点 C . 如图①,有 C_1 一个点;

情况二:当 B 为直角顶点时,过点 B 作 AB 的垂线 l 交直线 $x=1$ 于点 C ,则交点即为所求点 C . 如图②,有 C_2 一个点;

情况三:当 C 为直角顶点时,以 AB 为直径作圆,则该圆与直线 $x=1$ 的交点即为所求点 C . 如图③,有 C_3, C_4 两个点;

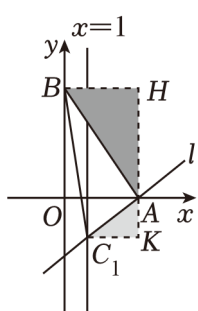


图1

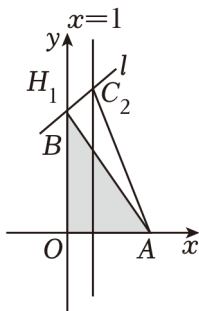


图2

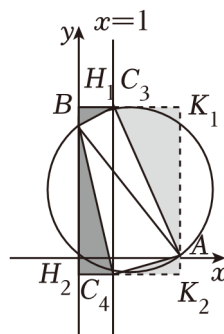


图3

方法:一、几何法:构造“K型”或“一线三垂直”相似;

二、代数法:两点间的距离公式,列方程,解方程,检验根;

三、解析法:求垂线解析式,联立方程组求交点.

任务:(1)上面课堂笔记中的分析过程,主要运用的数学思想是 CD (从下面选项中选出两个即可);

A. 数形结合

B. 统计思想

C. 分类讨论

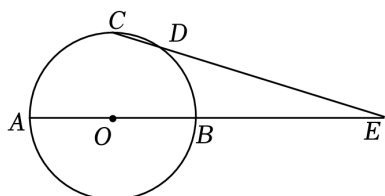
D. 转化思想

(2)选择一种课堂笔记本中记载的方法,求出“情况一”中 C_1 的坐标.

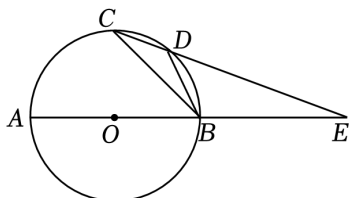
(3)直接写出“情况二”中 C_2 的坐标 _____;

(4)请你写出在“情况三”中,确定 C_3, C_4 的坐标位置及求坐标过程中,所依据的数学定理或原理(写出一个即可).

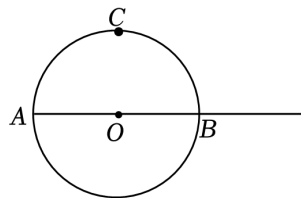
题目 3 (2023·吴川市二模) 已知: $\odot O$ 的直径 $AB=10$, C 是 $\widehat{AB}$ 的中点, D 是 $\odot O$ 上的一个动点 (不与点 A, B, C 重合), 射线 CD 交射线 AB 于点 E .



(图1)



(图2)



(备用图)

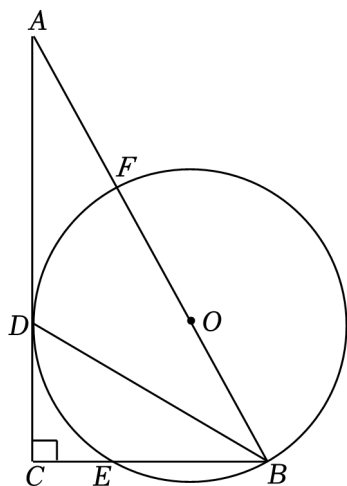
(1)如图1,当 $BE=AB$ 时,求线段 CD 的长;

(2)如图2,当点 D 在 $\widehat{BC}$ 上运动时,连接 BC, BD , $\triangle BCD$ 中是否存在度数保持不变的角? 如果存在,请指出这个角并求其度数; 如果不存在,请说明理由;

(3)联结 OD , 当 $\triangle ODE$ 是以 DE 为腰的等腰三角形时,求 $\triangle ODE$ 与 $\triangle CBE$ 面积的比值.

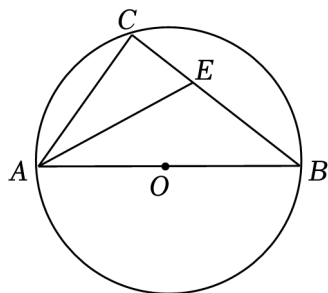
题目 4 (2023·微山县二模) 如图, $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $\angle ABC$ 的平分线交 AC 于点 D , 点 O 在 AB 上, 以点 O 为圆心, 以 OB 为半径的圆经过点 D , 交 BC 于点 E , 交 AB 于点 F .

- (1) 求证: AC 与 $\odot O$ 相切;
- (2) 若 $BD = 10$, $\sin \angle DBC = \frac{3}{5}$, 求 AF 的长.



题目 5 (2023·花都区一模) 如图, $\odot O$ 是 $\triangle ABC$ 的外接圆, 直径 $AB = 10$, $BC = 8$, AE 平分 $\angle CAB$ 交 BC 于点 E .

- (1) 尺规作图: 在 AE 的延长线上取一点 F , 使得 $BF = BE$, 连接 BF ; (保留作图痕迹, 不写作法)
- (2) 在 (1) 所作的图中:
 - ① 证明: BF 是 $\odot O$ 的切线;
 - ② 求 $\frac{AE}{EF}$ 的值.



题目 6 (2023·阿城区模拟) 已知: AB 、 DF 是 $\odot O$ 的直径, 弦 $CD \perp AB$, 垂足为 E , 过点 F 的切线与 DC 的延长线交于点 G , 连接 BC .

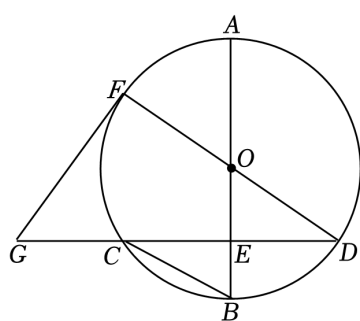


图1

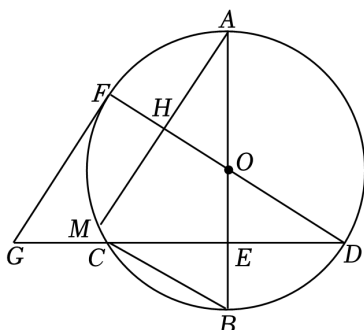


图2

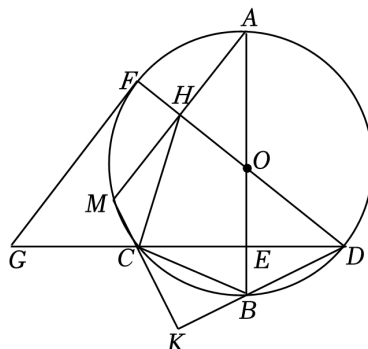


图3

?

- (1) 如图1, 求证: $\angle FGD = 2\angle BCD$;
 (2) 如图2, 过点 A 作 $AH \perp DF$ 交 $\odot O$ 于点 M , 垂足为 H , 求证 $AM = CD$;
 (3) 如图3, 在(2)的条件下, 连接 MC 并延长与 DB 的延长线交于点 K , 连接 BC , 若 $\angle HDC = 2\angle MHC$, $MK = 6$, 求 FG 的长.

题目 7 (2023·松江区二模) 如图1, AB 是半圆 O 的直径, C 是半圆 O 上一点, 点 O' 与点 O 关于直线 AC 对称, 射线 AO' 交半圆 O 于点 D , 弦 AC 交 $O'O$ 于点 E 、交 OD 于点 F .

(1) 如图2, O' 恰好落在半圆 O 上, 求证: $\widehat{O'A} = \widehat{BC}$;

(2) 如果 $\angle DAB = 30^\circ$, 求 $\frac{EF}{O'D}$ 的值;

(3) 如果 $OA = 3$, $O'D = 1$, 求 OF 的长.

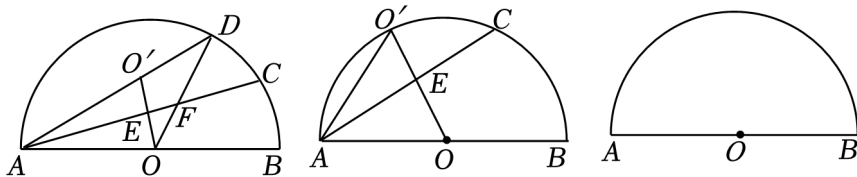


图1

图2

(备用图)

题目 8 (2023·碑林区校级模拟) 如图①, 已知线段 AB 与直线 l , 过 A, B 两点, 作 $\odot O$ 使其与直线 l 相切, 切点为 P , 易证 $\angle APB = \angle AHB > \angle AQB$, 可知点 P 对线段 AB 的视角最大.

问题提出

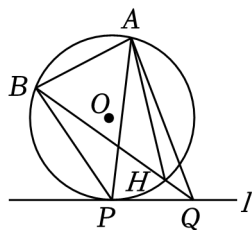
(1) 如图②, 已知 $\triangle ABP$ 的外接圆为 $\odot O$, PQ 与 $\odot O$ 相切于点 P , 交 AB 的延长线于点 Q .

①请判断 $\angle BPQ$ 与 $\angle A$ 的大小关系, 并说明理由.

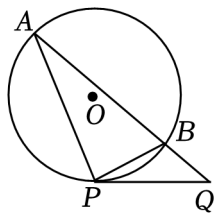
②若 $QB = 2$, $AB = 6$, 求 PQ 的长.

问题解决

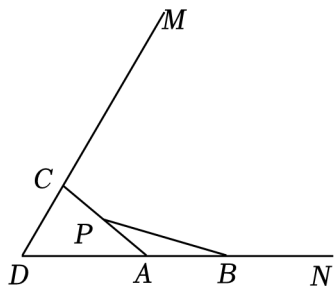
(2) 如图③, 一大型游乐场入口 AB 设在道路 DN 边上, 在“雪亮工程”中, 为了加强安全管理, 结合现实情况, 相关部门准备在与地面道路 DN 夹角为 60° 的射线 DM 方向上 (位于垂直于地面的平面内) 确定一个位置 C , 并架设斜杆 AC , 在斜杆 AC 的中点 P 处安装一摄像头, 对入口 AB 实施监控 (其中点 A, B, D, P, C, M, N 在同一平面内), 已知 $DA = 40$ 米, $AB = 25$ 米, 调研发现, 当 $\angle APB$ 最大时监控效果最好, 请问在射线 DM 上是否存在一点 C , 使得 $\angle APB$ 达到最大? 若存在, 请确定点 C 在 DM 上的位置及斜杆 AC 的长度; 若不存在, 请说明理由.



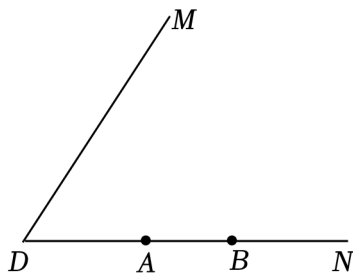
图①



图②



图③



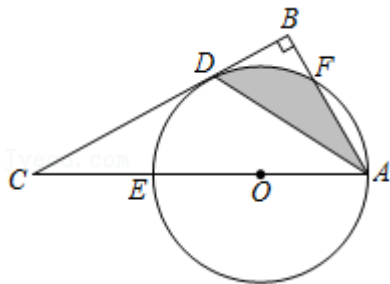
备用图

题目 9 (2021·滨城区一模) 如图, 在 $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle B = 90^\circ$, $\widehat{ED} = \widehat{DF}$, 点 E 在 AC 上, 以 AE 为直径的 $\odot O$ 经过点 D .

(1) 求证: ① BC 是 $\odot O$ 的切线;

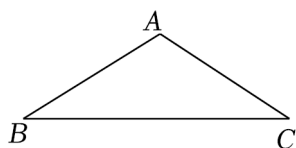
② $CD^2 = CE \cdot CA$;

(2) 若点 F 是劣弧 AD 的中点, 且 $CE = 3$, 试求阴影部分的面积.

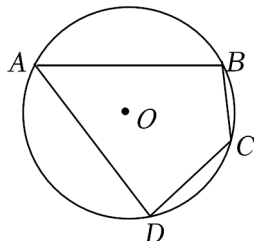


题目 10 (2022·雁塔区校级四模) (1) 如图①, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, $\angle BAC = 120^\circ$, $BC = 12$, 求 $\triangle ABC$ 外接圆的半径 r ;

(2) 如图②, $\odot O$ 是一个半径为 200 米的圆形广场, 弦 AB 是广场上长为 $200\sqrt{3}$ 米的纳凉演绎舞台, 现计划在广场上建一个长为 200 米的手工艺集市 CD , 并在舞台 AB 和集市 CD 之间修建两个休闲长廊 AD 和 BC , 规划长廊、舞台、集市围成四边形 $ABCD$ 为活动区域, 那么能否在优弧 AB 上确定两点 C 、 D , 使得长廊 $AD + BC$ 最长? 若能, 请求出 $AD + BC$ 的最大值, 并计算此时 $\angle BAD$ 的度数及四边形 $ABCD$ 的面积; 若不能, 请说明理由.



图①



图②

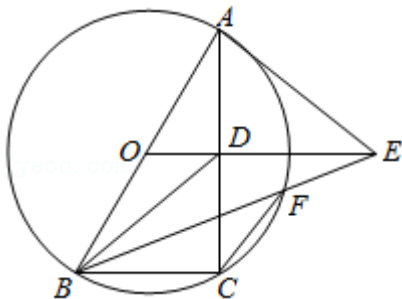
题目 11 (2022·青秀区校级一模) 如图, AB 是 $\odot O$ 的直径, AC 是弦, 点 E 在圆外, $OE \perp AC$ 于点 D , BE 交

⊙O 于点 F, 连接 BD、BC、CF, $\angle BFC = \angle AED$.

(1) 求证: AE 是 ⊙O 的切线;

(2) 求证: $OB^2 = OD \cdot OE$;

(3) 设 $\triangle BAD$ 的面积为 S_1 , $\triangle BDE$ 的面积为 S_2 , 若 $\tan \angle ODB = \frac{2}{3}$, 求 $\frac{S_1}{S_2}$ 的值.



题型二: 函数中的转化思想

题目 12 (2021·南岸区校级模拟) 初中阶段的函数学习中, 我们经历了列表、描点、连线画函数图象, 并结合图象研究函数性质的过程, 以下我们研究函数 $y = \left| \frac{2x}{x-2} \right| - 2$ 性质及应用的部分过程, 请按要求完成下列各小题.

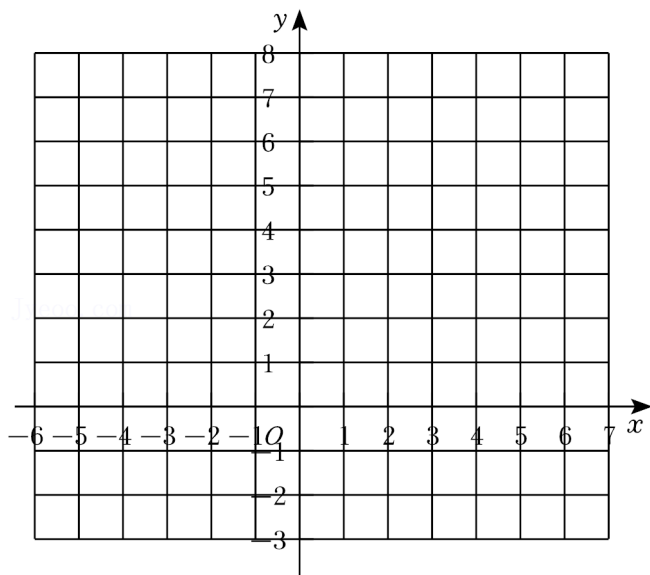
(1) 下表是 x 与 y 的几组值, 请在表格中的空白处填上恰当的数字;

x	...	-4	-3	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	3	4	5	...
y	...	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{4}{5}$	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{8}{5}$	_____	$-\frac{4}{3}$	0	4	_____	$\frac{4}{3}$	...

(2) 在平面直角坐标系中, 补全描出表格中数据对应的各点, 补全函数图象;

(3) 观察函数 $y = \left| \frac{2x}{x-2} \right| - 2$ 的图象, 请写出函数的一条性质: _____.

(4) 若方程 $y + \frac{1}{2}x = t$ (t 为常数) 有三个实数解, 则 t 的取值范围为 _____.



题目 13 (2021·望奎县模拟) 自主学习, 请阅读下列解题过程.

解一元二次不等式: $x^2 - 5x > 0$.

题目 14 (2024·全椒县一模) 如图 1, 抛物线 $y = x^2 - 4x$ 与 x 轴相交于原点 O 和点 A , 直线 $y = x$ 与抛物线在第

一象限的交点为 B 点, 抛物线的顶点为 C 点.

- (1) 求点 B 和点 C 的坐标;
- (2) 抛物线上是否存在点 D , 使得 $\angle DOB = \angle OBC$? 若存在, 求出所有点 D 的坐标; 若不存在, 请说明理由;
- (3) 如图 2, 点 E 是点 B 关于抛物线对称轴的对称点, 点 F 是直线 OB 下方的抛物线上的动点, EF 与直线 OB 交于点 G . 设 $\triangle BFG$ 和 $\triangle BEG$ 的面积分别为 S_1 和 S_2 , 求 $\frac{S_1}{S_2}$ 的最大值.

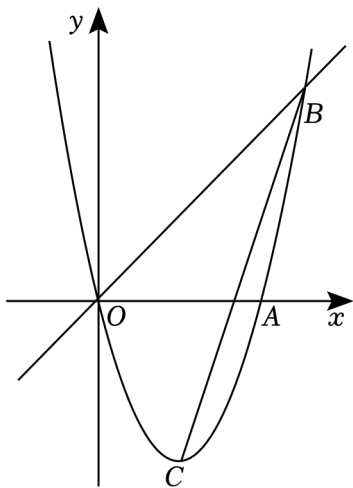


图1

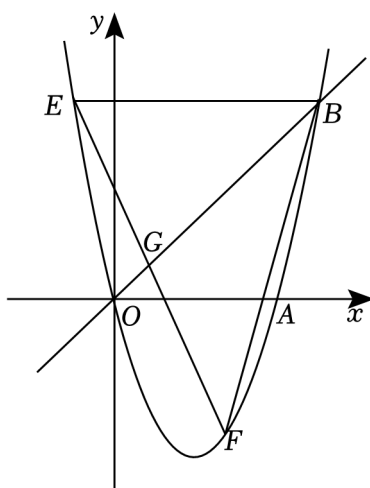
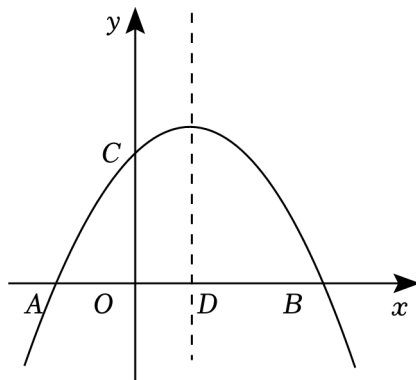
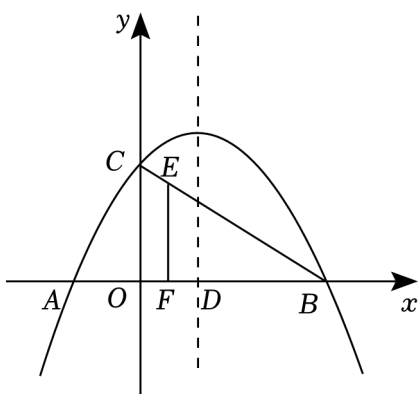


图2

题目 15 (2023·沭阳县模拟) 如图, 在平面直角坐标系中, 二次函数 $y = ax^2 + bx + 3$ 的图象与 x 轴交于点 $A(-\sqrt{3}, 0)$, $B(3\sqrt{3}, 0)$, 与 y 轴交于点 C , 其对称轴与 x 轴交于点 D .

- (1) 求二次函数的解析式;
- (2) 若点 E 是线段 BC 上的一点, 过点 E 作 x 轴的垂线, 垂足为 F , 且 $EF = 2EC$, 求点 E 的坐标;
- (3) 若 P 为 y 轴上的一个动点, 连接 PD , 直接写出 $\frac{1}{2}PC + PD$ 的最小值;
- (4) 若点 P 是抛物线对称轴上的一个动点, 连接 PA, PC , 设点 P 的纵坐标为 t , 当 $\angle APC$ 不小于 60° 时, 求 t 的取值范围.



备用图

转化思想在两种题型中的应用

压轴题密押

通用的解题思路：

转化思想方法包含三个基本要素：

- 1、把什么东西转化，即转化的对象；
- 2、转化到何处去，即转化的目标；
- 3、如何进行转化，即转化的方法。

转化思想方法应遵循以下五条原则：

- 1、熟悉化原则：将陌生的问题转化成熟悉的问题，以利于我们运用熟悉的知识、经验和问题来解决；
- 2、简单化原则：将复杂问题转化成简单问题，通过对简单问题的解决，达到解决复杂问题的目的，或获得某种解题的启示和依据；
- 3、和谐化原则：转化问题的条件或结论，使其表现形式更符合数与形内部所表示和谐统一的形式，或者转化命题，使其推演有利于运用某种数学方法或符合人们的思维规律；
- 4、直观化原则：将比较抽象的问题转化为比较直观的问题来解决；
- 5、正难则反原则：当问题正面讨论遇到困难时，应想到考虑问题的反面，设法从问题的反面去探求，使问题获得解决或证明的可能性。

压轴题预测

题型一：圆中的转化思想

题目 1 (2023·齐齐哈尔) 综合与实践：

数学模型可以用来解决一类问题，是数学应用的基本途径。通过探究图形的变化规律，再结合其他数学知识的内在联系，最终可以获得宝贵的数学经验，并将其运用到更广阔的数学天地。

- (1) 发现问题：如图1，在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle AEF$ 中， $AB = AC$ ， $AE = AF$ ， $\angle BAC = \angle EAF = 30^\circ$ ，连接 BE ， CF ，延长 BE 交 CF 于点 D 。则 BE 与 CF 的数量关系：___ $BE = CF$ __， $\angle BDC =$ _____°；
- (2) 类比探究：如图2，在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle AEF$ 中， $AB = AC$ ， $AE = AF$ ， $\angle BAC = \angle EAF = 120^\circ$ ，连接 BE ， CF ，延长 BE ， FC 交于点 D 。请猜想 BE 与 CF 的数量关系及 $\angle BDC$ 的度数，并说明理由；
- (3) 拓展延伸：如图3， $\triangle ABC$ 和 $\triangle AEF$ 均为等腰直角三角形， $\angle BAC = \angle EAF = 90^\circ$ ，连接 BE ， CF ，且点 B ， E ， F 在一条直线上，过点 A 作 $AM \perp BF$ ，垂足为点 M 。则 BF ， CF ， AM 之间的数量关系：_____；
- (4) 实践应用：正方形 $ABCD$ 中， $AB = 2$ ，若平面内存在点 P 满足 $\angle BPD = 90^\circ$ ， $PD = 1$ ，则 $S_{\triangle ABP} =$ _____。

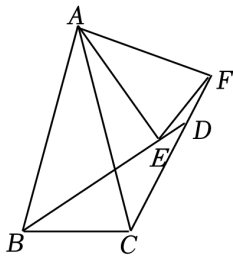


图1

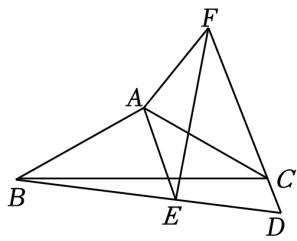


图2

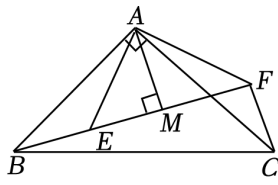
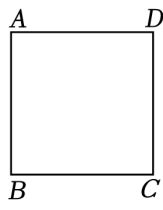


图3



备用图

【分析】(1) 根据等腰三角形的性质，利用 SAS 证明 $\triangle ABE \cong \triangle ACF$ 即可得出结论；

(2) 根据等腰三角形的性质，利用 SAS 证明 $\triangle BAE \cong \triangle CAF$ 即可得出结论；

(3) 根据等腰直角三角形的性质，利用 SAS 证明 $\triangle BAE \cong \triangle CAF$ 即可得出结论；

(4) 根据直径所对的圆周角是直角，先找到点 P ，利用勾股定理计算出 BP ，再利用第3小题的结论得到三角形的高， $\triangle ABP$ 的面积即可求出。

【解答】解：(1) $BE = CF$, $\angle BDC = 30^\circ$,

理由如下：如图1所示：

$\because \triangle ABC$ 和 $\triangle ADE$ 都是等腰三角形，

$\therefore AB = AC$, $AE = AF$,

又 $\because \angle BAC = \angle EAF = 30^\circ$,

$\therefore \triangle ABE \cong \triangle ACF(SAS)$,

$\therefore BE = CF$,

$\therefore \angle ABE = \angle ACD$,

$\because \angle AOE = \angle ABE + \angle BAC$,

$\angle AOE = \angle ACD + \angle BDC$,

$\therefore \angle BDC = \angle BAC = 30^\circ$;

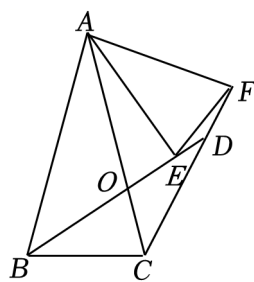


图1

(2) $BE = CF$, $\angle BDC = 60^\circ$,

理由如下：如图2所示：

证明： $\because \angle BAC = \angle EAF = 120^\circ$,

$\therefore \angle BAC - \angle EAC = \angle EAF - \angle EAC$,

即 $\angle BAE = \angle CAF$,

又 $\because \triangle ABC$ 和 $\triangle AEF$ 都是等腰三角形，

$\therefore AB = AC$, $AE = AF$,

$\therefore \triangle BAE \cong \triangle CAF(SAS)$

$\therefore BE = CF$,

$\therefore \angle AEB = \angle AFC$,

$\because \angle EAF = 120^\circ$, $AE = AF$,

$\therefore \angle AEF = \angle AFE = 30^\circ$,

$\therefore \angle BDC = \angle BEF - \angle EFD = \angle AEB + 30^\circ - (\angle AFC - 30^\circ) = 60^\circ$;

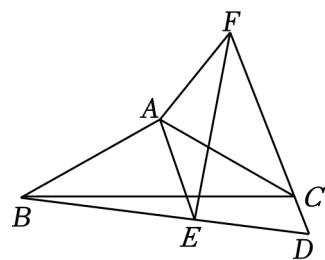


图2

(3) $BF = CF + 2AM$,

理由如下：如图3所示：

$\because \triangle ABC$ 和 $\triangle AEF$ 都是等腰三角形，

$\therefore \angle CAB = \angle EAF = 90^\circ$, $AB = AC$, $AE = AF$,

$\therefore \angle CAB - \angle CAE = \angle FAE - \angle CAE$,

即： $\angle BAE = \angle CAF$,

$\therefore \triangle BAE \cong \triangle CAF(SAS)$,

$\therefore BE = CF$,

$\because AM \perp BF$, $AE = AF$, $\angle EAF = 90^\circ$,

$\therefore EF = 2AM$,

$\because BF = BE + EF$,

$\therefore BF = CF + 2AM$;

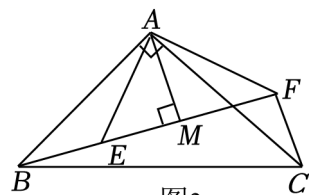


图3

(4) 如图4所示：

连接 BD ，以 BD 为直径作圆，

由题意，取满足条件的点 P , P' ，则 $PD = P'D = 1$. $\angle BPD = \angle BP'D = 90^\circ$,

$\therefore BD = 2\sqrt{2}$,

$$\therefore BP = \sqrt{BD^2 - PD^2} = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 - 1^2} = \sqrt{7},$$

连接 PA , 作 $AF \perp PB$ 于点 F , 在 BP 上截取 $BE = PD$,

$$\therefore \angle PDA = \angle ABE, AD = AB,$$

$$\therefore \triangle ADP \cong \triangle ABE (SAS),$$

$$\therefore AP = AE, \angle BAE = \angle DAP,$$

$$\therefore \angle PAE = 90^\circ,$$

由 (3) 可得: $PB - PD = 2AF$,

$$\therefore AF = \frac{PB - PD}{2} = \frac{\sqrt{7} - 1}{2},$$

$$\therefore S_{\triangle PAB} = \frac{1}{2} PB \cdot AF = \frac{7 - \sqrt{7}}{4},$$

$$\text{同理可得: } S_{\triangle P'AB} = \frac{7 + \sqrt{7}}{4},$$

故 $\triangle ABP$ 的面积为: $\frac{7 + \sqrt{7}}{4}$ 或 $\frac{7 - \sqrt{7}}{4}$.

【点评】本题是几何变换综合题,主要考查了全等三角形的判定,等腰三角形和等腰直角三角形的性质,圆周角定理,勾股定理,三角形的面积等知识,熟练掌握全等三角形的判定是解题的关键.

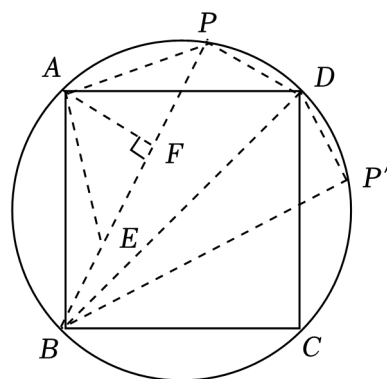


图4

题目 2 (2024·介休市模拟) 阅读与思考

如图是小强同学的数学课堂笔记本,请仔细阅读,并完成相应的任务.

平面直角坐标系与直角三角形

x 年 $\times$ 月 $\times$ 日 星期三

原理:根据直角三角形的定义,性质,判定,以直角三角形顶点分三种情况进行分类讨论. 口诀:“两线一圆”

作图:举例如下:已知 $A(3,0)$ 、 $B(0,4)$,在直线 $x=1$ 上求点 C ,使得 $\triangle ABC$ 为直角三角形. 以下分三种情况讨论:

情况一:当 A 为直角顶点时,过点 A 作 AB 的垂线 l 交直线 $x=1$ 于点 C ,则交点即为所求点 C . 如图①,有 C_1 一个点;

情况二:当 B 为直角顶点时,过点 B 作 AB 的垂线 l 交直线 $x=1$ 于点 C ,则交点即为所求点 C . 如图②,有 C_2 一个点;

情况三:当 C 为直角顶点时,以 AB 为直径作圆,则该圆与直线 $x=1$ 的交点即为所求点 C . 如图③,有 C_3, C_4 两个点;

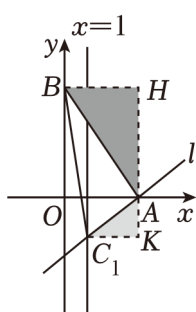


图1

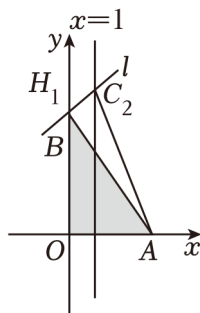


图2

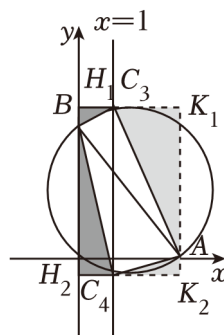


图3

方法:一、几何法:构造“K型”或“一线三垂直”相似;

二、代数法:两点间的距离公式,列方程,解方程,检验根;

三、解析法:求垂线解析式,联立方程组求交点.

任务:(1)上面课堂笔记中的分析过程,主要运用的数学思想是 CD (从下面选项中选出两个即可);

A. 数形结合

B. 统计思想

C. 分类讨论

D. 转化思想

(2)选择一种课堂笔记本中记载的方法,求出“情况一”中 C_1 的坐标.

(3)直接写出“情况二”中 C_2 的坐标 _____;

(4)请你写出在“情况三”中,确定 C_3 、 C_4 的坐标位置及求坐标过程中,所依据的数学定理或原理(写出一个即可).

【分析】(1)根据题意即可解答.

(2)选几何法,先证三角形相似,再根据相似三角形的对应边成比例即可求解.

(3)根据一线三等角的模型得出三角形相似,然后用相似三角形的性质即可解答,在求解过程中依据的定理是相似三角形的对应边成比例.

【解答】解:(1)上面课堂笔记中的分析过程,主要运用的数学思想是数形结合和转化思想.

故选:CD.

(2)当 A 为直角顶点时,过点 A 作 AB 的垂线 l 交直线 $x=1$ 于点 C ,

$$\therefore \angle BAC_1 = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BAH + \angle KAC_1 = 90^\circ,$$

$$\text{又} \because \angle BAH + \angle HBA = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle KAC_1 = \angle HBA,$$

$$\therefore \triangle ABH \sim \triangle C_1SK,$$

$$\therefore \frac{BH}{AK} = \frac{AH}{C_1K}, BH=3, AH=4, KC_1=2,$$

$$\therefore \frac{3}{AK} = \frac{4}{2}, \text{解得 } AK = \frac{3}{2},$$

$$\therefore C_1 \text{ 的坐标为 } \left(1, -\frac{3}{2}\right).$$

(3)过 C_2 作 $C_2H_1 \perp y$ 轴交 y 轴于点 H_1 ,如图:

$$\text{则 } \angle C_2H_1 = 90^\circ = \angle BOA,$$

当 B 为直角顶点时,过点 B 作 AB 的垂线 l 交直线 $x=1$ 于点 C ,

$$\therefore \angle C_2BA = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle H_1BC_2 + \angle OBA = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle OBA + \angle OAB = 90^\circ.$$

$$\therefore \angle H_1BC_2 = \angle OAB,$$

$$\therefore \triangle AOB \sim \triangle BH_1C_2,$$

$$\therefore \frac{H_1B}{AO} = \frac{H_1C_2}{BO}, AO=3, BO=4, H_1C_2=2,$$

$$\therefore \frac{H_1B}{3} = \frac{1}{4}, \text{解得 } H_1B = \frac{3}{4},$$

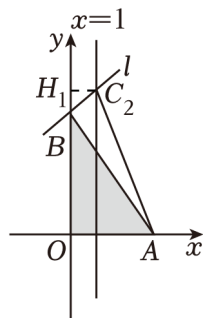
$$\therefore C_2 \text{ 的坐标为 } \left(1, \frac{9}{2}\right).$$

(3)当 C 为直角顶点时,以 AB 为直径作圆,则该圆与直线 $x=1$ 的交点即为所求点 C .

$$\therefore \angle BC_3A = 90^\circ, \angle BC_4A = 90^\circ,$$

与(2)同理可得 $\triangle BH_1C_3 \sim \triangle C_3K_1A$, $\triangle BH_2C_4 \sim \triangle C_4K_2A$,

$$\therefore \frac{H_1C_3}{K_1A} = \frac{BH_1}{C_3K_1}, \frac{BH_2}{C_4K_2} = \frac{H_2C_4}{AK_2},$$



设 C_3 的坐标为 $(1, a)$, C_4 的坐标为 $(1, m)$,

则 $H_1C_3=1$, $BH_1=a-4$, $C_3K_1=2$, $AK_1=4$; $BH_2=m+4$, $H_2C_4=2$, $AK_2=m$, $C_4K_2=2$,

$$\therefore \frac{1}{4} = \frac{a-4}{2}, \frac{m+4}{2} = \frac{1}{m},$$

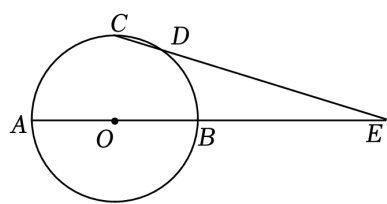
解得 $a = \frac{9}{2}$, $m = \sqrt{6} - 2$ 或 $-\sqrt{6} - 2$ (舍去),

$\therefore C_3$ 的坐标为 $(1, \frac{9}{2})$, C_4 的坐标为 $(1, \sqrt{6} - 2)$,

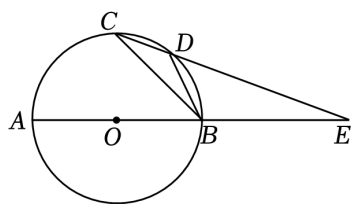
在求解过程中依据的定理是相似三角形的对应边成比例.

【点评】本题考查相似三角形的判定和性质, 一线三垂直模型等, 构造构造相似三角形是解题关键.

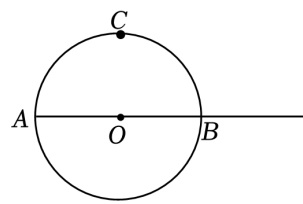
题目 3 (2023·吴川市二模) 已知: $\odot O$ 的直径 $AB=10$, C 是 $\widehat{AB}$ 的中点, D 是 $\odot O$ 上的一个动点 (不与点 A 、 B 、 C 重合), 射线 CD 交射线 AB 于点 E .



(图1)



(图2)



(备用图)

(1) 如图1, 当 $BE=AB$ 时, 求线段 CD 的长;

(2) 如图2, 当点 D 在 $\widehat{BC}$ 上运动时, 连接 BC 、 BD , $\triangle BCD$ 中是否存在度数保持不变的角? 如果存在, 请指出这个角并求其度数; 如果不存在, 请说明理由;

(3) 联结 OD , 当 $\triangle ODE$ 是以 DE 为腰的等腰三角形时, 求 $\triangle ODE$ 与 $\triangle CBE$ 面积的比值.

【分析】(1) 连接 OC 、 BC 、 AD , 由勾股定理求出 CE , 由 $\triangle AED \sim \triangle CEB$ 求出 DE , 则 $CD = CE - DE$.

(2) $\angle BDC$ 不变, 连接 AC , 则 $\angle CAB = 45^\circ$, 由圆内接四边形的对角互补得 $\angle BCD = 135^\circ$.

(3) ①当点 E 在 AB 的延长线上时, 证明 $\triangle OCD$ 是等边三角形, 求出 $CD = OC = DE = 5$, 由勾股定理求出 OE , 分别求出两个三角形的面积作比, 即可得到结果. ②当点 E 在 OB 上时, 设 $DE = OD = x$, 证明 $\triangle ODE \sim \triangle DOC$, 用 x 表示出 CE , 由 $OC^2 + OE^2 = CE^2$, 列出关于 x 的方程并求出 x , 再求出两个三角形的面积即可得结果. ③当点 E 在 OA 上时, DE , OD 长度没变, BE 长度变了, 依据②中的数值可求得结果.

【解答】(1) 解: 如图1, 连接 OC 、 BC 、 AD ,

$\because C$ 是 $\widehat{AB}$ 的中点, OC 是半径,

$\therefore OC \perp AB$,

$\because BE = AB = 10$,

$\therefore AE = AB + BE = 20$, $OE = OB + BE = 5 + 10 = 15$,

$\therefore CE = \sqrt{OC^2 + OE^2} = \sqrt{5^2 + 15^2} = 5\sqrt{10}$,

$\because \angle DAE = \angle BCE$, $\angle AED = \angle CEB$,

$\therefore \triangle ADE \sim \triangle CBE$,

$$\therefore \frac{AE}{CE} = \frac{DE}{BE},$$

$$\therefore \frac{20}{5\sqrt{10}} = \frac{DE}{10},$$

$$\therefore DE = 4\sqrt{10},$$

$$\therefore CD = CE - DE = 5\sqrt{10} - 4\sqrt{10} = \sqrt{10}.$$

(2) $\angle BDC$ 不变, $\angle BDC = 135^\circ$.

如图2, 连接 AC ,

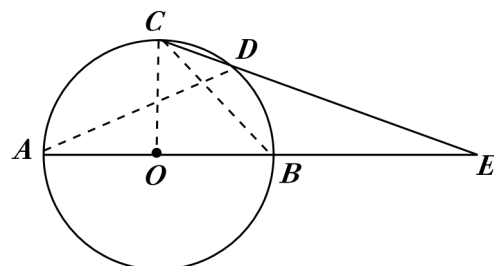


图1

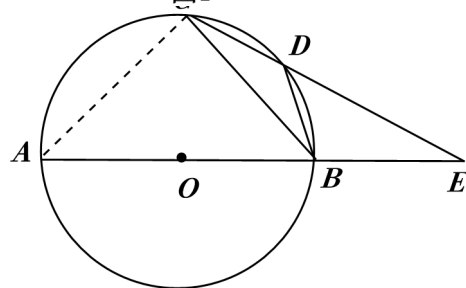


图2

$$\therefore CE = \frac{25}{x} - x,$$


由 $OC^2 + OE^2 = CE^2$ 得,

$$5^2 + x^2 = \left(\frac{25}{x} - x\right)^2,$$

$$\therefore x = \frac{5\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore OE = DE = \frac{5\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore CE = \frac{10\sqrt{3}}{3}, BE = 5 - \frac{5\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore OG = \frac{OC \cdot OE}{CE} = \frac{5}{2},$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle ODE}}{S_{\triangle CBE}} = \frac{\frac{1}{2}DE \cdot OG}{\frac{1}{2}BE \cdot OC} = \frac{\frac{5\sqrt{3}}{3} \times \frac{5}{2}}{\left(5 - \frac{5\sqrt{3}}{3}\right) \times 5} = \frac{\sqrt{3} + 1}{4}.$$

③如图5,当点E在OA上时,

$$OE = DE, \text{长度与②中相同}, BE = OB + OE = 5 + \frac{5\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle ODE}}{S_{\triangle CBE}} = \frac{\frac{5\sqrt{3}}{3} \times \frac{5}{2}}{\left(5 + \frac{5\sqrt{3}}{3}\right) \times 5} = \frac{\sqrt{3} - 1}{4},$$

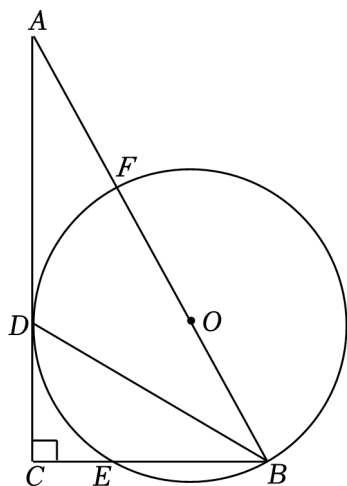
综上得, $\triangle ODE$ 与 $\triangle CBE$ 面积的比值为: $\frac{3 + \sqrt{3}}{4}$ 或 $\frac{\sqrt{3} + 1}{4}$ 或 $\frac{\sqrt{3} - 1}{4}$.

【点评】本题考查了圆中垂径定理,圆内接四边形的性质,三角形相似,勾股定理等知识,综合性较强,解答本题需要我们熟练掌握各部分的内容,对学生的综合能力要求较高,一定要注意将所学知识贯穿起来.

题目 4 (2023·微山县二模) 如图, $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $\angle ABC$ 的平分线交 AC 于点 D , 点 O 在 AB 上, 以点 O 为圆心, 以 OB 为半径的圆经过点 D , 交 BC 于点 E , 交 AB 于点 F .

(1) 求证: AC 与 $\odot O$ 相切;

(2) 若 $BD = 10$, $\sin \angle DBC = \frac{3}{5}$, 求 AF 的长.



【分析】(1) 连接 OD , 利用 $OD = OB$ 及角平分线得 $OD \parallel BC$ 即可;

(2) 连接 DF , 先利用 $\sin \angle DBC$ 计算 CD 、 BC , 然后证明 $\triangle CDB \sim \triangle DFB$ 求 BF , 再证明 $\triangle ADO \sim \triangle ACB$ 即可求 AF .

【解答】(1) 证明: 连接 OD ,

$\therefore OD$ 是半径

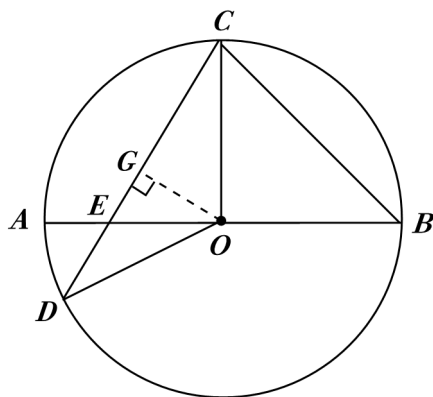


图5

$\therefore OD = OB$,
 $\therefore \angle ODB = \angle OBD$,
 $\because \angle ABC$ 的平分线交 AC 于点 D ,
 $\therefore \angle ABD = \angle CBD$,
 $\therefore \angle ODB = \angle CBD$,
 $\therefore OD \parallel BC$,
 $\therefore \angle ADO = \angle C = 90^\circ$,
 $\therefore AC$ 是 $\odot O$ 的切线;

(2) 解: 连接 DF ,

$$\because \sin \angle DBC = \frac{3}{5} = \frac{CD}{BD} = \frac{CD}{10},$$

$$\therefore CD = 6,$$

$$\therefore BC = 8,$$

$\because FB$ 为直径,

$$\therefore \angle BDF = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BDF = \angle C,$$

$$\because \angle CBD = \angle FBD,$$

$$\therefore \triangle CDB \sim \triangle DFB,$$

$$\therefore \frac{BD}{BF} = \frac{BC}{BD},$$

$$\therefore BF = \frac{25}{2},$$

$$\therefore OD = OE = OB = \frac{25}{4},$$

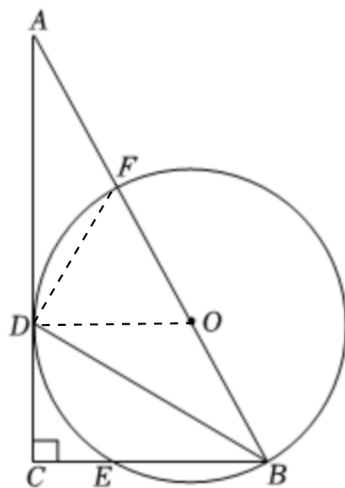
$$\because OD \parallel BC,$$

$$\therefore \triangle ADO \sim \triangle ACB,$$

$$\therefore \frac{AO}{AB} = \frac{OD}{BC}, \text{ 即: } \frac{AF + \frac{25}{4}}{AF + \frac{25}{2}} = \frac{\frac{25}{4}}{8},$$

$$\text{解得: } AF = \frac{225}{14}.$$

【点评】本题主要考查了切线的判定, 相似三角形的判定及性质, 熟记性质定理并能灵活运用是解决本题的关键.



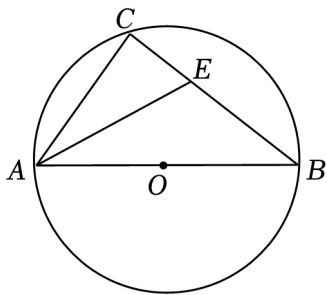
题目 5 (2023·花都区一模) 如图, $\odot O$ 是 $\triangle ABC$ 的外接圆, 直径 $AB = 10$, $BC = 8$, AE 平分 $\angle CAB$ 交 BC 于点 E .

(1) 尺规作图: 在 AE 的延长线上取一点 F , 使得 $BF = BE$, 连接 BF ; (保留作图痕迹, 不写作法)

(2) 在 (1) 所作的图中:

① 证明: BF 是 $\odot O$ 的切线;

② 求 $\frac{AE}{EF}$ 的值.



【分析】(1) 以 B 为圆心, 以 BE 的长为半径画弧, 交 AE 的延长线于点 F 即可.

(2) ①先证 $\angle ABF = 90^\circ$, 再由 OB 是半径即可得结论. ②先证 $\triangle BEG \sim \triangle BAC$, 得出 EG 的长, 再证 $\triangle AEG \sim \triangle AFB$ 即可.

【解答】(1) 如图 1, 以 B 为圆心, 以 BE 的长为半径画弧, 交 AE 的延长线于点 F , 则点 F 即为所求.

(2) ①证明: $\because AB$ 是 $\odot O$ 的直径,

$$\therefore \angle C = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle CAE + \angle AEC = 90^\circ,$$

$$\because BF = BE,$$

$$\therefore \angle BEF = \angle BFE,$$

$$\because \angle AEC = \angle BEF,$$

$$\therefore \angle AEC = \angle BFE,$$

$$\therefore \angle CAE + \angle BFE = 90^\circ,$$

$$\because AE \text{ 平分 } \angle CAB,$$

$$\therefore \angle CAE = \angle BAF,$$

$$\therefore \angle BAF + \angle BFE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ABF = 90^\circ,$$

又 $\because OB$ 是半径,

$\therefore BF$ 是 $\odot O$ 的切线.

②解: 如图 2, 过点 E 作 $EG \perp AB$, 垂足为 G ,

$$\because \angle C = 90^\circ, AE \text{ 平分 } \angle CAB,$$

$$\therefore EG = CE,$$

$$\therefore BE = BC - CE = BC - EG = 8 - EG,$$

$$\because \angle C = 90^\circ,$$

$$\therefore AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6.$$

$$\because \angle EGB = \angle C = 90^\circ, \angle EBG = \angle ABC,$$

$$\therefore \triangle BEG \sim \triangle BAC,$$

$$\therefore \frac{EG}{AC} = \frac{BE}{AB},$$

$$\therefore \frac{EG}{6} = \frac{8 - EG}{10},$$

解得 $EG = 3$,

$$\therefore BE = BC - EG = 8 - 3 = 5,$$

$$\therefore BF = BE = 5,$$

$$\because \angle AEG = \angle ABF = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle AEG \sim \triangle AFB,$$

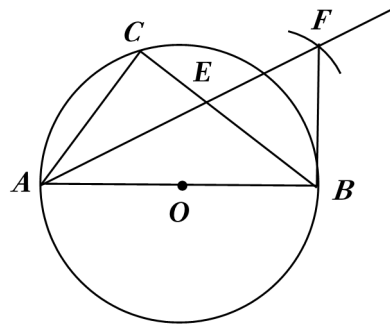


图1

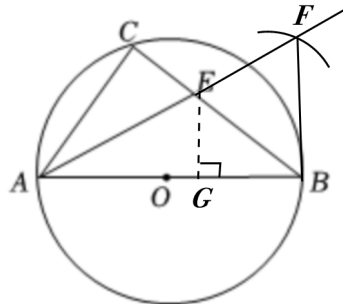


图2

$$\therefore \frac{AE}{AF} = \frac{EG}{BF} = \frac{3}{5},$$

$$\therefore \frac{AE}{AF} = \frac{3}{2}.$$

【点评】本题主要考查了圆的切线的性质与判定,相似三角形的性质与判定等知识,把所学知识融会贯通,灵活运用是解题的关键.

题目 6 (2023·阿城区模拟) 已知: AB 、 DF 是 $\odot O$ 的直径, 弦 $CD \perp AB$, 垂足为 E , 过点 F 的切线与 DC 的延长线交于点 G , 连接 BC .

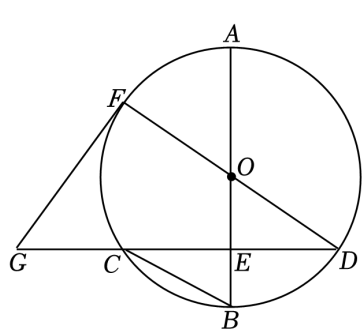


图1

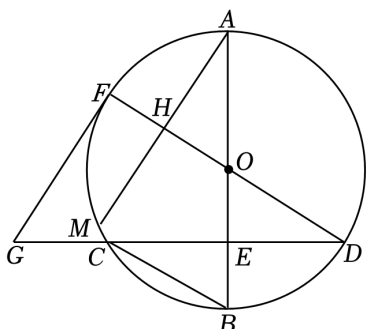


图2

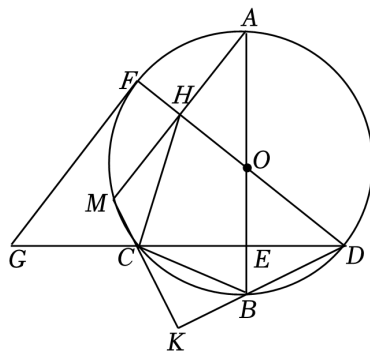


图3

?

- (1) 如图1, 求证: $\angle FGD = 2\angle BCD$;
- (2) 如图2, 过点 A 作 $AH \perp DF$ 交 $\odot O$ 于点 M , 垂足为 H , 求证 $AM = CD$;
- (3) 如图3, 在(2)的条件下, 连接 MC 并延长与 DB 的延长线交于点 K , 连接 BC , 若 $\angle HDC = 2\angle MHC$, $MK = 6$, 求 FG 的长.

【分析】(1) 利用切线的性质和 $CD \perp AB$ 可证 $\angle FGD = \angle BOD$, 根据圆周角定理可得 $\angle BOD = 2\angle BCD$, 即可得证;

(2) 利用垂径定理可得 $AM = 2AH$, $CD = 2DE$, 证明 $\triangle AOH \cong \triangle DOE$, 得出 $AH = DE$, 即可得证;

(3) 连接 AD , 过 H 作 $HQ \perp AD$ 于 Q , 延长 QH 交 KM 的延长线于点 P , 设 $\angle MHC = \alpha$, $\angle HDC = \angle HAO = 2\alpha$, 利用等角对等边可证 $DH = DC$, 证明 $\triangle DCK \cong \triangle DHQ$, 可得 $DK = DQ$, 进而可证 $PKDQ$ 为正方形, 利用等角的正切值相等可得 $\tan \angle ADH = \tan \angle AHQ = \tan \angle PHM = \frac{PM}{PH} = \frac{1}{2}$, 证明 $\triangle PCH$ 是等腰直角三角形, 可得出 $PC = 2PM = 2MC = CK$, 根据 $OA^2 = OH^2 + AH^2$, $OH + OA = HD = 4\sqrt{5}$, 可求出 $OA = OD = \frac{5\sqrt{5}}{2}$, $OH = \frac{3\sqrt{5}}{2}$, $DF = 5\sqrt{5}$, 根据 $\tan \angle HAO = \tan \angle ODE = \frac{OH}{AH} = \frac{FG}{DF} = \frac{3}{4}$, 即可求出 FG .

【解答】(1) 证明: $\because GF$ 是 $\odot O$ 切线,

$$\therefore \angle GFD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle FGD + \angle FDG = 90^\circ, \angle EOD + \angle FDG = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle FGD = \angle BOD,$$

$$\therefore \widehat{BC} = \widehat{BC},$$

$$\therefore \angle BOD = 2\angle BCD,$$

$$\therefore \angle FGD = 2\angle BCD;$$

(2) 证明: $AH \perp DF$, $AB \perp CD$,

$$\therefore AM = 2AH, CD = 2DE,$$

$$\therefore AH \perp DF,$$

$$\therefore \angle AHO = \angle OED = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AOH = \angle DOE, OA = OD,$$

$$\therefore \triangle AOH \cong \triangle DOE (AAS)$$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/608131101072006072>