2024届北京市海淀区首都师范大学附属育新学校高三第三次模拟考试数学试卷

考生须知：

1．全卷分选择题和非选择题两部分，全部在答题纸上作答。选择题必须用2B铅笔填涂；非选择题的答案必须用黑色字迹的钢笔或答字笔写在“答题纸”相应位置上。

2．请用黑色字迹的钢笔或答字笔在“答题纸”上先填写姓名和准考证号。

3．保持卡面清洁，不要折叠，不要弄破、弄皱，在草稿纸、试题卷上答题无效。

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

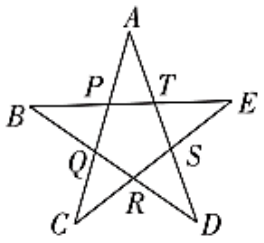
1．已知集合 $A=\{x\mid x\le a,a\in R\}$，$B=\{x\mid 2^x<16\}$，若 $A\subseteq B$，则实数 a 的取值范围是（　　）

A．$\varnothing$　　B．R　　C．$(-\infty,4]$　　D．$(-\infty,4)$

2．M 是抛物线 $y^2=4x$ 上一点，N 是圆 $(x-1)^2+(y-2)^2=1$ 关于直线 $x-y-1=0$ 的对称圆上的一点，则 $|MN|$ 最小值是（　　）

A．$\frac{\sqrt{11}}{2}-1$　　B．$\sqrt{3}-1$　　C．$2\sqrt{2}-1$　　D．$\frac{3}{2}$

3．中国的国旗和国徽上都有五角星，正五角星与黄金分割有着密切的联系，在如图所示的正五角星中，以 A、B、C、D、E 为顶点的多边形为正五边形，且 $PT=\frac{\sqrt{5}-1}{2}AP$，则 $\overrightarrow{AT}-\frac{\sqrt{5}-1}{2}\overrightarrow{ES}=$（　　）



A．$\frac{\sqrt{5}+1}{2}\overrightarrow{QR}$　　B．$\frac{\sqrt{5}+1}{2}\overrightarrow{RQ}$　　C．$\frac{\sqrt{5}-1}{2}\overrightarrow{RD}$　　D．$\frac{\sqrt{5}-1}{2}\overrightarrow{RC}$

4．已知定点 $F_1(-4,0)$，$F_2(4,0)$，N 是圆 $O:x^2+y^2=4$ 上的任意一点，点 F_1 关于点 N 的对称点为 M，线段 F_1M 的垂直平分线与直线 F_2M 相交于点 P，则点 P 的轨迹是（　　）

A．椭圆　　B．双曲线　　C．抛物线　　D．圆

5．已知函数 $f(x)=(2a+2)\ln x+2ax^2+5$.设 $a<-1$，若对任意不相等的正数 x_1，x_2，恒有 $\left|\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}\right|\ge 8$，则实数 a 的取值范围是（　　）

A．$(-3,-1)$　　B．$(-2,-1)$

C．$(-\infty,-3]$　　D．$(-\infty,-2]$

6．若$|\overrightarrow{OA}|=1$，$|\overrightarrow{OB}|=\sqrt{3}$，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$，点 **C** 在 ***AB*** 上，且$\angle AOC=30^{\circ}$，设$\overrightarrow{OC}=m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}\ (m,n\in R)$，则$\frac{m}{n}$的值为（　　）

A．$\frac{1}{3}$　　**B**．3　　**C**．$\frac{\sqrt{3}}{3}$　　**D**．$\sqrt{3}$

7．某地区高考改革，实行“3+2+1”模式，即“3”指语文、数学、外语三门必考科目，“1”指在物理、历史两门科目中必选一门，“2”指在化学、生物、政治、地理以及除了必选一门以外的历史或物理这五门学科中任意选择两门学科，则一名学生的不同选科组合有（　　）

A．8 种　　**B．12 种**　　**C．16 种**　　**D．20 种**

8．已知双曲线$C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的渐近线方程为$y=\pm\frac{3}{4}x$，且其右焦点为$(5,0)$，则双曲线$C$的方程为（　　）

A．$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$　　**B**．$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$　　**C**．$\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{4}=1$　　**D**．$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}=1$

9．等差数列$\{a_n\}$中，已知$3a_5=7a_{10}$，且$a_1<0$，则数列$\{a_n\}$的前n项和$S_n\ (n\in N^*)$中最小的是（　　）

A．S_7或S_8　　**B**．S_{12}　　**C**．S_{13}　　**D**．S_{14}

10．已知$a>0$且$a\neq1$，函数$f(x)=\begin{cases}\log_a x+a, x>0\\ 3^{x+1}-1, x\le 0\end{cases}$，若$f(a)=3$，则$f(-a)=$（　　）

A．2　　**B**．$\frac{2}{3}$　　**C**．$-\frac{2}{3}$　　**D**．$-\frac{8}{9}$

11．已知焦点为F的抛物线$C:y^2=4x$的准线与x轴交于点A，点M在抛物线C上，则当$\frac{|MA|}{|MF|}$取得最大值时，直线MA的方程为（　　）

A．$y=x+1$或$y=-x-1$　　**B**．$y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$或$y=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$　　**C**．$y=2x+2$或$y=-2x-2$

D．$y=-2x+2$

12．对于定义在R上的函数$y=f(x)$，若下列说法中有且仅有一个是错误的，则错误的一个是（　　）

A．$f(x)$在$(-\infty,0]$上是减函数　　**B**．$f(x)$在$(0,+\infty)$上是增函数

C．$f(x)$不是函数的最小值　　**D**．对于$x\in\mathbf{R}$，都有$f(x+1)=f(1-x)$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13．函数$f(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}x-\sin x$在$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上的最小值和最大值分别是_____.

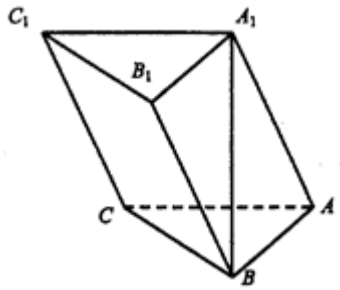
14．已知抛物线$C:y^2=4x$，点P为抛物线C上一动点，过点P作圆$M:(x-3)^2+y^2=4$的切线，切点分别为A,B，则线段AB长度的取值范围为_____.

15．从4名男生和3名女生中选出4名去参加一项活动，要求男生中的甲和乙不能同时参加，女生中的丙和丁至少有一名参加，则不同的选法种数为_____.（用数字作答）

16．设向量$\vec{a}=(m,1)$，$\vec{b}=(2,1)$，且$\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{1}{2}\left(\vec{a}^2+\vec{b}^2\right)$，则$m=$_____.

三、解答题：共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17．（12分）如图，在三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，$A_1B\perp$平面ABC，$AB\perp AC$，且$AB=AC=A_1B=2$.



（1）求棱AA_1与BC所成的角的大小；

（2）在棱B_1C_1上确定一点P，使二面角$P-AB-A_1$的平面角的余弦值为$\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

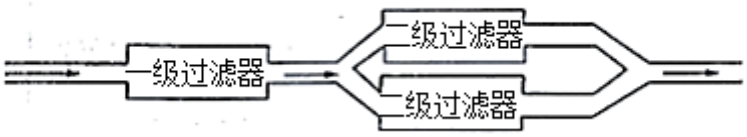
18．（12分）已知函数$f(x)=|2x-a|+|x-1|(a\in R)$.

（Ⅰ）当$a=1$时，求不等式$f(x)\geq 1$的解集；

（Ⅱ）若存在$x\in\mathbf{R}$满足不等式$f(x)<4$，求实数a的取值范围.

19．（12分）已知矩阵$A=\begin{bmatrix}0&1\\a&0\end{bmatrix}$的逆矩阵$A^{-1}=\begin{bmatrix}0&2\\b&0\end{bmatrix}$.若曲线$C_1$：$\frac{x^2}{4}+y^2=1$在矩阵$A$对应的变换作用下得到另一曲线$C_2$，求曲线$C_2$的方程.

20．（12分）某客户准备在家中安装一套净水系统，该系统为二级过滤，使用寿命为十年如图所示两个二级过滤器采用并联安装，再与一级过滤器串联安装.

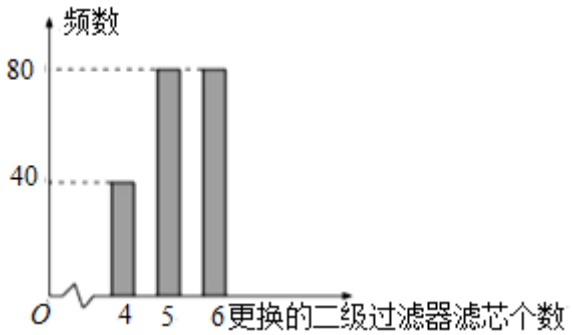


其中每一级过滤都由核心部件滤芯来实现在使用过程中，一级滤芯和二级滤芯都需要不定期更换（每个滤芯是否需要更换相互独立）.若客户在安装净水系统的同时购买滤芯，则一级滤芯每个 160 元，二级滤芯每个 80 元.若客户在使用过程中单独购买滤芯则一级滤芯每个 400 元，二级滤芯每个 200 元.现需决策安装净水系统的同时购买滤芯的数量，为此参考了根据 100 套该款净水系统在十年使用期内更换滤芯的相关数据制成的图表，其中表 1 是根据 100 个一级过滤器更换的滤芯个数制成的频数分布表，图 2 是根据 200 个二级过滤器更换的滤芯个数制成的条形图.

表 1：一级滤芯更换频数分布表

一级滤芯更换的个数	8	9
频数	60	40

图 2：二级滤芯更换频数条形图



以 100 个一级过滤器更换滤芯的频率代替 1 个一级过滤器更换滤芯发生的概率，以 200 个二级过滤器更换滤芯的频率代替 1 个二级过滤器更换滤芯发生的概率.

（1）求一套净水系统在使用期内需要更换的各级滤芯总个数恰好为 16 的概率；

（2）记 X 表示该客户的净水系统在使用期内需要更换的二级滤芯总数，求 X 的分布列及数学期望；

（3）记 m,n 分别表示该客户在安装净水系统的同时购买的一级滤芯和二级滤芯的个数.若 $m+n=19$，且 $m\in\{8,9\}$，以该客户的净水系统在使用期内购买各级滤芯所需总费用的期望值为决策依据，试确定 m,n 的值.

21.（12 分）已知 AB 是圆 O：$x^2+y^2=4$ 的直径，动圆 M 过 A，B 两点，且与直线 $y+2=0$ 相切.

（1）若直线 AB 的方程为 $x-y=0$，求e M 的方程；

（2）在 y 轴上是否存在一个定点 P，使得以 MP 为直径的圆恰好与 x 轴相切？若存在，求出点 P 的坐标；若不存在，请说明理由.

22.（10 分）已知在平面直角坐标系 xOy 中，曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=\cos\theta\\y=2\sin\theta\end{cases}$（$\theta$ 为参数），以坐标原点 O 为极点，x 轴的非负半轴为极轴且取相同的单位长度建立极坐标系，直线 l 的极坐标方程为 $\rho\cos\theta+\rho\sin\theta-3=0$.

（1）求直线 l 的直角坐标方程；

（2）求曲线C上的点到直线l距离的最小值和最大值.

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、D

【解析】

先化简 $B=\{x\mid 2^x<16\}=\{x\mid x<4\}$，再根据 $A=\{x\mid x\le a,a\in R\}$，且 $A\square B$ 求解.

【详解】

因为 $B=\{x\mid 2^x<16\}=\{x\mid x<4\}$，

又因为 $A=\{x\mid x\le a,a\in R\}$，且 $A\square B$，

所以 $a<4$.

故选：D

【点睛】

本题主要考查集合的基本运算，还考查了运算求解的能力，属于基础题.

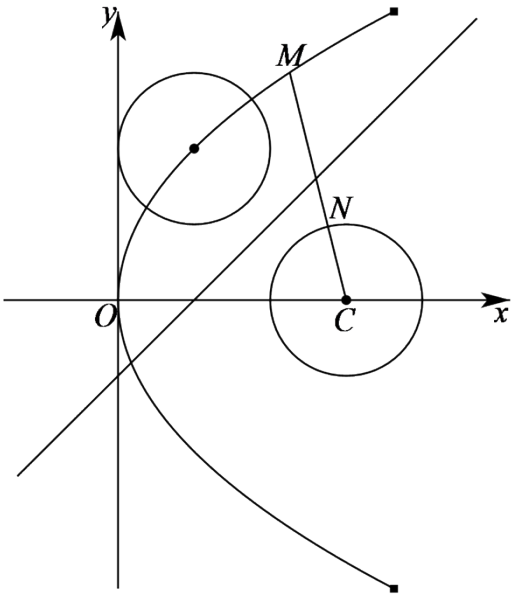
2、C

【解析】

求出点 $(1,2)$ 关于直线 $x-y-1=0$ 的对称点 C 的坐标，进而可得出圆 $(x-1)^2+(y-2)^2=1$ 关于直线 $x-y-1=0$ 的对称圆 C 的方程，利用二次函数的基本性质求出 $|MC|$ 的最小值，由此可得出 $|MN|_{\min}=|MC|_{\min}-1$，即可得解.

【详解】

如下图所示：



设点$(1,2)$关于直线$x-y-1=0$的对称点为点$C(a,b)$，

则$\begin{cases}\dfrac{a+1}{2}-\dfrac{b+2}{2}-1=0\\ \dfrac{b-2}{a-1}=-1\end{cases}$，整理得$\begin{cases}a-b-3=0\\ a+b-3=0\end{cases}$，解得$\begin{cases}a=3\\ b=0\end{cases}$，即点$C(3,0)$，

所以，圆$(x-1)^2+(y-2)^2=1$关于直线$x-y-1=0$的对称圆C的方程为$(x-3)^2+y^2=1$，

设点$M\left(\dfrac{y^2}{4},y\right)$，则$|MC|=\sqrt{\left(\dfrac{y^2}{4}-3\right)^2+y^2}=\sqrt{\dfrac{y^4}{16}-\dfrac{y^2}{2}+9}=\sqrt{\dfrac{1}{16}\left(y^2-4\right)^2+8}$，

当$y=\pm2$时，$|MC|$取最小值$2\sqrt{2}$，因此，$|MN|_{\min}=|MC|_{\min}-1=2\sqrt{2}-1$.

故选：C.

【点睛】

本题考查抛物线上一点到圆上一点最值的计算，同时也考查了两圆关于直线对称性的应用，考查计算能力，属于中等题.

3、A

【解析】

利用平面向量的概念、平面向量的加法、减法、数乘运算的几何意义，便可解决问题.

【详解】

解：$\overrightarrow{AT}-\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\overrightarrow{ES}=\overrightarrow{SD}-\overrightarrow{SR}=\overrightarrow{RD}=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\overrightarrow{QR}$.

故选：A

【点睛】

本题以正五角星为载体，考查平面向量的概念及运算法则等基础知识，考查运算求解能力，考查化归与转化思想，属于基础题.

4、B

【解析】

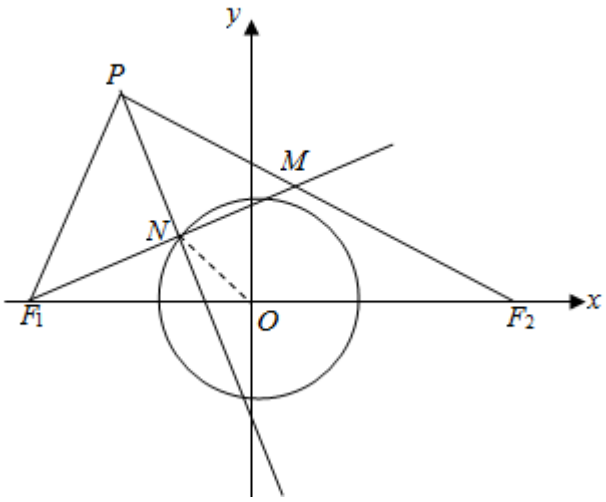
根据线段垂直平分线的性质，结合三角形中位线定理、圆锥曲线和圆的定义进行判断即可.

【详解】

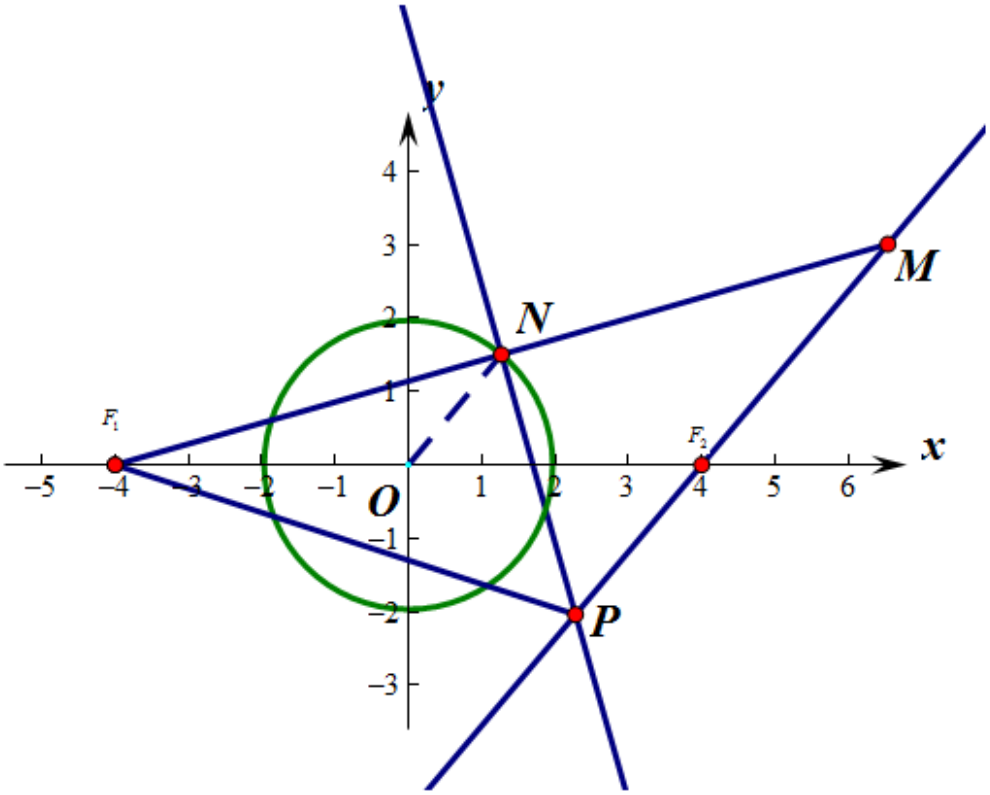
因为线段 F_1M 的垂直平分线与直线 F_2M 相交于点 P，如下图所示：

所以有 $PF_1 = PM = PF_2 - MF_2$，而 O, N 是中点，连接 ON，故 $MF_2 = 2ON = 4$，

因此 $PF_2 - PF_1 = 4(4 < F_2F_1)$



当 N 在如下图所示位置时有，所以有 $PF_1 = PM = PF_2 + MF_2$，而 O, N 是中点，连接 ON，



故$MF_2=2ON=4$，因此$PF_1-PF_2=4(4<F_2F_1)$，

综上所述：有$\left|PF_1-PF_2\right|=4(4<F_2F_1)$，所以点$P$的轨迹是双曲线.

故选：B

【点睛】

本题考查了双曲线的定义，考查了数学运算能力和推理论证能力，考查了分类讨论思想.

5、D

【解析】

求解$f\left(x\right)$的导函数，研究其单调性，对任意不相等的正数x_1,x_2，构造新函数，讨论其单调性即可求解.

【详解】

$f\left(x\right)$的定义域为$\left(0,+\infty\right)$，$f'\left(x\right)=\dfrac{2a+2}{x}+4ax=\dfrac{2\left(2ax^2+a+1\right)}{x}$，

当$a<-1$时，$f'\left(x\right)<0$，故$f\left(x\right)$在$\left(0,+\infty\right)$单调递减；

不妨设$x_1<x_2$，而$a<-1$，知$f\left(x\right)$在$\left(0,+\infty\right)$单调递减，

从而对任意x_1、$x_2\in\left(0,+\infty\right)$，恒有$\left|\dfrac{f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)}{x_1-x_2}\right|\geq 8$，

即$\left|f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)\right| \geq 8\left|x_1-x_2\right|$，

$f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right) \geq 8\left(x_2-x_1\right)$，$f\left(x_1\right)+8x_1 \geq f\left(x_2\right)+8x_2$，

令$g\left(x\right)=f\left(x\right)+8x$，则$g'\left(x\right)=\frac{2a+2}{x}+4ax+8$，原不等式等价于$g\left(x\right)$在$\left(0,+\infty\right)$单调递减，即

$\frac{a+1}{x}+2ax+4 \leq 0$，

从而$a \leq \frac{-4x-1}{2x^2+1}=\frac{\left(2x-1\right)^2}{2x^2+1}-2$，因为$\frac{\left(2x-1\right)^2}{2x^2+1}-2 \geq -2$，

所以实数 *a* 的取值范围是$\left(-\infty,-2\right]$

故选：D.

【点睛】

此题考查含参函数研究单调性问题，根据参数范围化简后构造新函数转换为含参恒成立问题，属于一般性题目.

6、B

【解析】

利用向量的数量积运算即可算出.

【详解】

解：Q$\angle AOC=30^{\circ}$

$\therefore \cos <\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OA}>=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore \frac{\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}}{\left|\overrightarrow{OC}\right|\left|\overrightarrow{OA}\right|}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore \frac{\left(m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}\right)\cdot\overrightarrow{OA}}{\left|m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}\right|\left|\overrightarrow{OA}\right|}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore \frac{m\left|\overrightarrow{OA}\right|^2+n\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OA}}{\sqrt{m^2\left|\overrightarrow{OA}\right|^2+2mn\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+n^2\left|\overrightarrow{OB}\right|^2}\left|\overrightarrow{OA}\right|}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

Q$\left|\overrightarrow{OA}\right|=1$，$\left|\overrightarrow{OB}\right|=\sqrt{3}$，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$

$\therefore \frac{m}{\sqrt{m^2+3n^2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore m^2=9n^2$

又Q C 在 AB 上

$\therefore m>0$， $n>0$

$\therefore \frac{m}{n}=3$

故选： B

【点睛】

本题主要考查了向量的基本运算的应用，向量的基本定理的应用及向量共线定理等知识的综合应用.

7、C

【解析】

分两类进行讨论：物理和历史只选一门；物理和历史都选，分别求出两种情况对应的组合数，即可求出结果.

【详解】

若一名学生只选物理和历史中的一门，则有 $C_2^1C_4^2=12$ 种组合；

若一名学生物理和历史都选，则有 $C_4^1=4$ 种组合；

因此共有 $12+4=16$ 种组合.

故选 C

【点睛】

本题主要考查两个计数原理，熟记其计数原理的概念，即可求出结果，属于常考题型.

8、B

【解析】

试题分析：由题意得 $\frac{b}{a}=\frac{3}{4}$， $c^2=a^2+b^2=25$，所以 $a=4$， $b=3$，所求双曲线方程为 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$.

考点：双曲线方程.

9、C

【解析】

设公差为 d，则由题意可得 $3\left(a_1+4d\right)=7\left(a_1+9d\right)$，解得 $d=-\frac{4a_1}{51}$，可得 $a_n=\frac{(55-4n)a_1}{51}$.令 $\frac{55-4n}{51}<0$，可得

当 $n\geq 14$ 时， $a_n>0$，当 $n\leq 13$ 时， $a_n<0$，由此可得数列 $\{a_n\}$ 前 n 项和 $S_n\left(n\in N^*\right)$ 中最小的.

【详解】

解：等差数列 $\{a_n\}$ 中，已知 $3a_5=7a_{10}$，且 $a_1<0$，设公差为 d

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：https://d.book118.com/615004310134011132