

专题 1.5 实际问题与二次函数【十大题型】

【浙教版】

► 题型梳理

- 【题型 1 利用二次函数求最大利润】1
- 【题型 2 利用二次函数求最优方案】7
- 【题型 3 利用二次函数求最大面积】11
- 【题型 4 利用二次函数求最小周长】18
- 【题型 5 利用二次函数解决拱桥问题】24
- 【题型 6 利用二次函数解决隧道问题】30
- 【题型 7 利用二次函数解决图形运动问题】36
- 【题型 8 利用二次函数解决运动员空中跳跃轨迹问题】42
- 【题型 9 利用二次函数解决球类运行的轨迹问题】49
- 【题型 10 利用二次函数解决喷头喷出的球的轨迹问题】53

► 举一反三

【题型 1 利用二次函数求最大利润】

【例 1】

(2023 春·广东茂名·九年级校考开学考试)

1. 某工厂生产并销售 A, B 两种型号车床共 14 台, 生产并销售 1 台 A 型车床可以获利 10 万元; 如果生产并销售不超过 4 台 B 型车床, 则每台 B 型车床可以获利 17 万元, 如果超出 4 台 B 型车床, 则每超出 1 台, 每台 B 型车床获利将均减少 1 万元. 设生产并销售 B 型车床 x 台.

(1) 当 $x > 4$ 时, 若生产并销售 B 型车床比生产并销售 A 型车床获得的利润多 70 万元, 问生产并销售 B 型车床多少台?

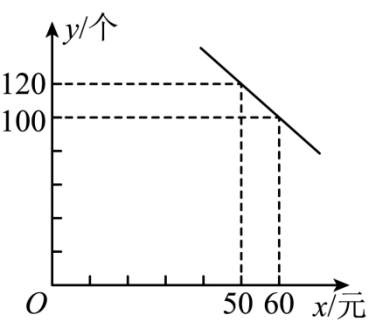
(2) 当 $0 < x \leq 14$ 时, 设生产并销售 A, B 两种型号车床获得的总利润为 W 万元, 如何分配生产并销售 A, B 两种车床的数量, 使获得的总利润 W 最大? 并求出最大利润.

【变式 1-1】

(2023 春·辽宁葫芦岛·九年级统考期末)

2. 2022 年卡塔尔世界杯足球赛开战, 很多商家都紧紧把握这一商机, 赛场内外随处可见“中国制造”的身影, 某商家销售一批“中国制造”的吉祥物“拉伊卜”毛绒玩具, 已知每个毛绒玩具“拉伊卜”的成本为 40 元, 销售单价不低于成本价, 且不低于成本价的 1.8

倍，在销售过程中发现，毛绒玩具“拉伊卜”每天的销售量 y （个）与销售单价 x （元）满足如图所示的一次函数关系。



- (1)求 y 与 x 的函数关系式，并直接写出自变量 x 的取值范围；
- (2)每个毛绒玩具“拉伊卜”的售价为多少元时，该商家每天的销售利润为 2400 元？
- (3)当毛绒玩具“拉伊卜”的销售单价为多少元时，该商家每天获得的利润最大？最大利润是多少元？

【变式 1-2】

（2023 春·广东汕头·九年级校考期中）

3. 某批发商以 24 元/箱的进价购进某种蔬菜，销往零售超市，已知这种蔬菜的标价为 45 元/箱，实际售价不低于标价的八折．批发商通过分析销售情况，发现这种蔬菜的销售量 y （箱）与当天的售价 x （元/箱）满足一次函数关系，下表是其中的两组对应值．

售价 x （元/箱）	...	35	38	...
销售量 y （箱）	...	130	124	...

- (1)若某天这种蔬菜的售价为 42 元/箱，则当天这种蔬菜的销售最为_____箱；
- (2)该批发商销售这种蔬菜能否在某天获利 1320 元？若能，请求出当天的销售价；若不能，请说明理由．
- (3)批发商搞优惠活动，购买一箱这种蔬菜，赠送成本为 6 元的土豆，这种蔬菜的售价定为多少时，可获得日销售利润最大，最大日销售利润是多少元？

【变式 1-3】

（2023 春·江苏南京·九年级统考期末）

4. 一企业生产并销售某种产品（假设销量与产量相等），已知该产品每千克生产成本为 40 元，售价 y （元）与产量 x （kg）之间的函数关系为 $y = -\frac{x}{2} + 120$ ．

- (1)当该产品产量为多少时，获得的利润最大？最大利润是多少？

(2)若企业每销售该产品 1kg 需支出其他费用 a 元($a > 0$)，当 $70 \leq x \leq 80$ 时该企业获得的最大利润为 2450 元，求 a 的值.

【题型 2 利用二次函数求最优方案】

【例 2】

(2023 春·湖南郴州·九年级统考期末)

5. 2022 年秋天，某地发生旱情，为抗旱保丰收，当地政府制定农户投资购买抗旱设备的补贴方法：购买 A 型设备，政府补贴金额 (y_1 ：万元)与投资的金额 (x ：万元)的函数对应关系为： $y_1 = kx(k \neq 0)$ ，当 $x = 5$ 时 $y_1 = 4$ ；购买 B 型设备，政府补贴金额 (y_2 ：万元)与投资的金额 (x ：万元)的函数对应关系为 $y_2 = ax^2 + bx(a \neq 0)$ ，当 $x = 2$ 时， $y_2 = 2.6$ ， $x = 4$ 时 $y_2 = 3.2$.

- (1)分别求出 y_1, y_2 的函数表达式；
- (2)有一农户投资 10 万元同时购买 A 型和 B 型两种设备，获得的政府补贴为 y 万元. 请你设计一个能获得最大补贴的方案，并求出按此方案能获得的最大补贴.

【变式 2-1】

(2023 春·辽宁大连·九年级统考期末)

6. 某班计划购买 A, B 两种花苗，根据市场调查整理出表：

A 种花苗盆数	B 种花苗盆数	花费 (元)
3	5	220
4	10	380

- (1)求 A, B 两种花苗的单价；
- (2)经过班级学生商讨，决定购买 A, B 两种花苗 12 盆 (A, B 两种花苗都必须有)，同时得到了优惠方式：购买几盆 A 种花， A 种花苗每盆就降价几元. 请设计花费最少的购买方案.

【变式 2-2】

(2023 春·黑龙江哈尔滨·九年级期末)

7. 2011 年长江中下游地区发生了特大旱情. 为抗旱保丰收, 某地政府制定了农户投资购买抗旱设备的补贴办法, 其中购买 I 型、II 型抗旱设备投资的金额与政府补贴的额度存在下表所示的函数对应关系.

型 号	I 型设备		II 型设备		
金 额					
投资金额 x (万元)	x	5	x	2	4
补贴金额 y (万元)	$y_1 = kx \ (k \neq 0)$	2	$y_2 = ax^2 + bx \ (a \neq 0)$	2.4	3.2

- (1)分别求 y_1 和 y_2 的函数解析式;
- (2)有一农户同时对 I 型、II 型两种设备共投资 10 万元购买, 请你设计一个能获得最大补贴金额的方案, 并求出按此方案能获得的最大补贴金额.

【变式 2-3】

(2023 春·江苏淮安·九年级统考期末)

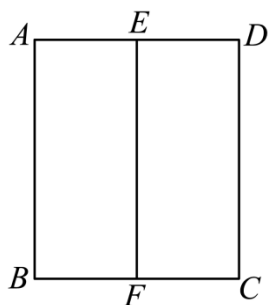
8. 某公司经销甲、乙两种产品, 经调研发现如下规律:
- ①销售甲产品所获利润 y (万元) 与销售 x (万件) 的关系为 $y = 0.6x$;
- ②销售乙产品所获利润 y (万元) 与销售 x (万件) 的关系为 $y = ax^2 + bx$; 当 $x = 1$ 时 $y = 1.3$; 当 $x = 2$ 时, $y = 2.4$.
- (1) 求销售乙产品所获利润 y (万元) 与销售 x (万件) 的函数关系式;
- (2) 该公司计划购进甲、乙两种产品共 20 万件, 要想使销售总利润最大, 应如何安排经销方案? 总利润最大为多少?

【题型 3 利用二次函数求最大面积】

【例 3】

(2023 春·广东广州·九年级广州市第八十九中学校考期中)

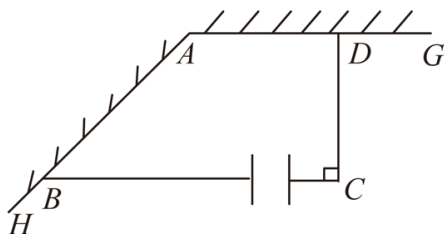
9. 如图, 一块矩形区域 $ABCD$ 由篱笆围着, 并且由一条与 CD 边平行的篱笆 EF 分开. 已知篱笆的总长为 18 米(篱笆的厚度忽略不计), 求当矩形 $ABCD$ 的面积最大时 AB 的长.



【变式 3-1】

(2023 春·江苏无锡·九年级统考期中)

10. 如图, AG 、 AH 为固定墙且 $\angle GAH = 135^\circ$, 现利用固定墙和总长为 40 米的竹篱笆修建一个四边形 $ABCD$ 的储料场, 其中 $AD \parallel BC$, $\angle C = 90^\circ$. 已知固定墙 AG 长为 12 米, BC 边上的一扇门宽为 2 米.

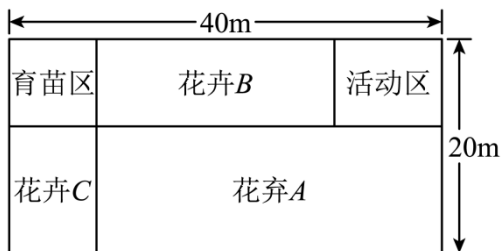


- (1) 当 CD 长为 18 米时, 求此时储料场的面积;
- (2) 怎样修建才能使储料场的面积最大.

【变式 3-2】

(2023 春·湖北武汉·九年级校联考期中)

11. 春回大地, 万物复苏, 又是一年花季到. 某花圃基地计划将如图所示的一块长 40 m, 宽 20 m 的矩形空地划分成五块小矩形区域. 其中一块正方形空地为育苗区, 另一块空地为活动区, 其余空地为种植区, 分别种植 A , B , C 三种花卉. 活动区一边与育苗区等宽, 另一边长是 10 m. A , B , C 三种花卉每平方米的产值分别是 2 百元、3 百元、4 百元.



- (1) 设育苗区的边长为 x m, 用含 x 的代数式表示下列各量: 花卉 A 的种植面积是 _____ m^2 , 花卉 B 的种植面积是 _____ m^2 , 花卉 C 的种植面积是 _____ m^2 .

(2)育苗区的边长为多少时, A, B 两种花卉的总产值相等?

(3)若花卉 A 与 B 的种植面积之和不超过 560m^2 , 求 A, B, C 三种花卉的总产值之和的最大值.

【变式 3-3】

(2023 春·陕西西安·九年级统考期中)

12. 问题探究:

(1) 如图 1, 已知线段 $AB=2, AC=4$, 连接 BC , 则三角形 ABC 面积最大值是_____;

(2) 如图 2, 矩形 $ABCD$, 对角线 AC, BD 相交于点 O , 且 $AC+BD=16$, 求矩形 $ABCD$ 面积最大值;

问题解决:

(3) 如图 3, 在四边形 $ABCD$ 中, $AD\parallel BC$, 对角线 AC, BD 相交于点 O , 且 $\angle AOB=120^\circ$. 若 $AC+BD=10$, 则四边形 $ABCD$ 的面积是否存在最大值? 若存在, 求出最大值; 若不存在, 请说明理由.

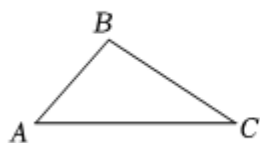


图1

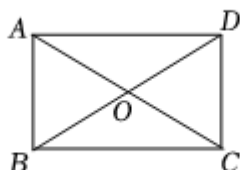


图2

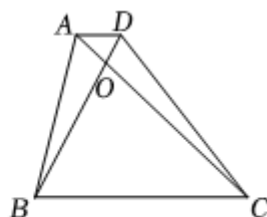


图3

【题型 4 利用二次函数求最小周长】

【例 4】

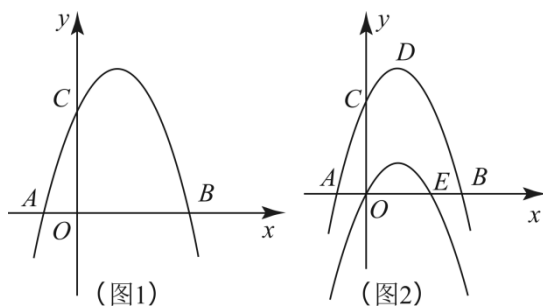
(2023 春·九年级课时练习)

13. 甲船从 A 处起以 15nmile/h 的速度向正北方向航行, 这时乙船从 A 的正东方向 20nmile 的 B 处起以 20nmile/h 的速度向西航行, 多长时间后, 两船的距离最小? 最小距离是多少?

【变式 4-1】

(2023 春·河北石家庄·九年级统考期末)

14. 如图 1, 在平面直角坐标系中, 以直线 $x=1$ 为对称轴的抛物线 $y=-x^2+bx+c$ 与坐标轴交于 A, B, C 三点, 其中点 B 的坐标是 $(3,0)$.



- (1) 点 A 的坐标为 _____;
- (2) 求抛物线的解析式;
- (3) 如图 2, 设抛物线的顶点为 D , 若将抛物线向下平移, 使平移后的抛物线经过原点 O , 且与 x 轴的另一个交点为 E , 若在 y 轴上存在一点 F , 连接 DE , DF , EF , 使得 $\triangle DEF$ 的周长最小, 求 F 点的坐标.

【变式 4-2】

(2023 春·江西赣州·九年级校考期中)

15. 学以致用: 问题 1: 怎样用长为 12cm 的铁丝围成一个面积最大的矩形?
- 小学时我们就知道结论: 围成正方形时面积最大, 即围成边长为 3cm 的正方形时面积最大为 9cm^2 . 请用你所学的二次函数的知识解释原因.
- 思考验证: 问题 2: 怎样用铁丝围一个面积为 9m^2 且周长最小的矩形?
- 小明猜测: 围成正方形时周长最小.

为了说明其中的道理, 小明翻阅书籍, 找到下面的材料:

结论: 在 $a+b \geq 2\sqrt{ab}$ (a, b 均为正实数) 中, 若 ab 为定值 p , 则 $a+b \geq 2\sqrt{p}$, 当且仅当 $a=b$ 时, $a+b$ 有最小值 $2\sqrt{p}$.

$a+b \geq 2\sqrt{ab}$ (a, b 均为正实数) 的证明过程:

对于任意正实数 a, b , $\because (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0, \therefore a - 2\sqrt{ab} + b \geq 0$,

$\therefore a+b \geq 2\sqrt{ab}$, 当且仅当 $a=b$ 时, 等号成立.

解决问题:

- (1) 若 $x > 0$, 则 $x + \frac{4}{x} \geq$ _____ (当且仅当 $x =$ _____ 时取“=”);
- (2) 运用上述结论证明小明对问题 2 的猜测;
- (3) 当 $x > -1$ 时, 求 $y = \frac{x^2 + 3}{x + 1}$ 的最小值.

【变式 4-3】

(2023·江苏无锡·江苏省锡山高级中学实验学校校考一模)

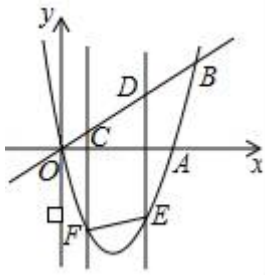
16. 如图, 二次函数 $y=x^2-4x$ 的图象与 x 轴、直线 $y=x$ 的一个交点分别为点 A 、 B , CD 是线段 OB 上的一动线段, 且 $CD=2$, 过点 C 、 D 的两直线都平行于 y 轴, 与抛物线相交于点 F 、 E , 连接 EF .

(1) 点 A 的坐标为____, 线段 OB 的长=____;

(2) 设点 C 的横坐标为 m .

①当四边形 $CDEF$ 是平行四边形时, 求 m 的值;

②连接 AC 、 AD , 求 m 为何值时, $\triangle ACD$ 的周长最小, 并求出这个最小值.

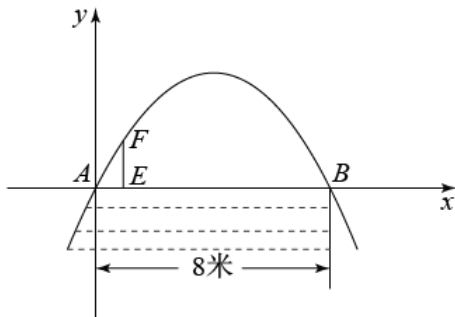


【题型 5 利用二次函数解决拱桥问题】

【例 5】

(2023 春·吉林长春·九年级统考期末)

17. 某抛物线形拱桥的截面图如图所示. 某数学小组对这座拱桥很感兴趣, 他们利用测量工具测出水面的宽 AB 为 8 米. AB 上的点 E 到点 A 的距离 $AE=1$ 米, 点 E 到拱桥顶面的垂直距离 $EF=\frac{7}{4}$ 米. 他们以点 A 为坐标原点, 以 AB 所在直线为 x 轴, 建立平面直角坐标系.



(1)求该抛物线所对应的函数表达式.

(2)求拱桥顶面离水面 AB 的最大高度.

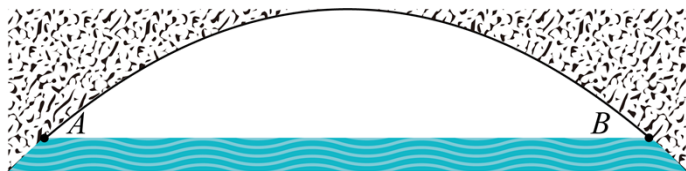
(3)现有一游船(截面为矩形)宽度为 4 米, 船顶到水面的高度为 2 米. 要求游船从拱桥下面正中间通过时, 船顶到拱桥顶面的距离应大于 0.5

米. 请通过计算说明该游船是否能安全通过.

【变式 5-1】

(2023 春·河南商丘·九年级统考期中)

18. 如图, 是一个抛物线形拱桥的截面图, 在正常水位时, 水位线 AB 与拱桥最高点的距离为 9m , 水面宽 $AB = 30\text{m}$.



(1) 请你建立合适的平面直角坐标系 xOy , 并根据建立的平面直角坐标系求出该抛物线的解析式.

(2) 已知一艘船 (可近似看成长方体) 在此航行时露出水面的高度为 4m , 若这艘船的宽度为 18m , 当水位线比正常水位线高出 1m 时, 这艘船能否从该抛物线形拱桥下方顺利通过, 请说明理由.

【变式 5-2】

(2023 春·山东青岛·九年级统考期末)

19. 如图1, 是一座抛物线型拱桥侧面示意图, 水面宽 AB 与桥长 CD 均为 12m , 在距离 D 点 3m 的 E 处, 测得桥面到桥拱的距离 EF 为 1.5m , 以桥拱顶点 O 为原点, 桥面为 x 轴建立平面直角坐标系. 如图2, 桥面上方有3根高度均为 5m 的支柱 CG 、 OH 、 DI , 过相邻两根支柱顶端的钢缆呈形状相同的抛物线, 其最低点到桥面距离为 2m , 下面结论正确的是____ (填写正确结论序号).

① 图1抛物线型拱桥的函数表达式 $y = -\frac{1}{6}x^2$.

② 图2右边钢缆抛物线的函数表达式 $y = \frac{1}{3}(x-3)^2 + 2$.

③ 图2左边钢缆抛物线的函数表达式 $y = \frac{1}{3}(x+3)^2 + 2$.

④ 图2在钢缆和桥拱之间竖直装饰若干条彩带, 彩带长度的最小值是 3m .

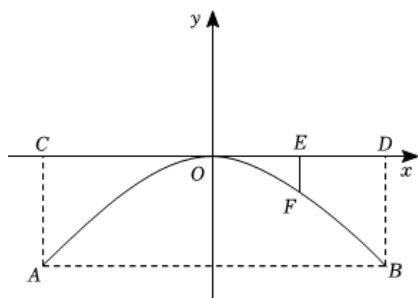


图1

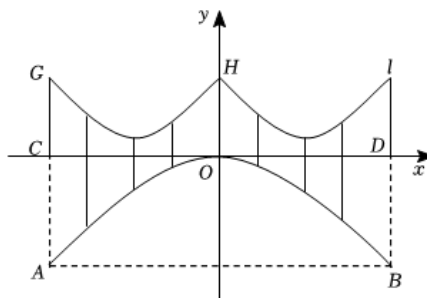
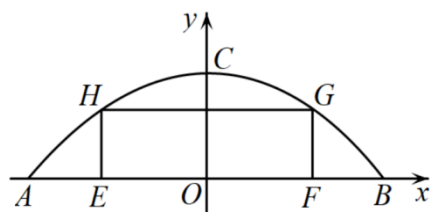


图2

【变式 5-3】

(2023 春·安徽阜阳·九年级统考期末)

20. 某公园有一个抛物线形状的观景拱桥 ABC ，其横截面如图所示，在图中建立的直角坐标系（以 AB 中点为原点，抛物线对称轴所在直线为 y 轴）中，拱桥高度 $OC = 5\text{m}$ ，跨度 $AB = 20\text{m}$ 。



(1) 求抛物线的解析式。

(2) 拱桥下，有一加固桥身的“脚手架”矩形 $EFGH$ （ H, G 分别在抛物线的左右侧上），已知搭建“脚手架” $EFGH$ 的三边所用钢材长度为 18.4m （ EF 在地面上，无需使用钢材），求“脚手架”打桩点 E 与拱桥端点 A 的距离。

(3) 已知公园要进行改造，在原位置上将拱桥 ACB 改造为圆弧 $AC'B$ ，跨度 AB 不变，且（2）中“脚手架”矩形 $EFGH$ 仍然适用（ E, F 打桩位置不变， H, G 依然在拱桥上），求改造后拱桥的高度 OC' （结果精确到 0.1m ，参考数据： $\sqrt{170.56} \approx 13.06$ ）。

【题型 6 利用二次函数解决隧道问题】

【例 6】

(2023·北京海淀·九年级期末)

21. 如图 1 是某条公路的一个具有两条车道的隧道的横断面。经测量，两侧墙 AD 和 BC 与路面 AB 垂直，隧道内侧宽 $AB = 8$ 米，为了确保隧道的安全通行，工程人员在路面 AB 上取点 E ，测量点 E 到墙面 AD 的距离 AE ，点 E 到隧道顶面的距离 EF 。设 $AE = x$ 米， $EF = y$ 米。通过取点、测量，工程人员得到了 x 与 y 的几组值，如下表：

x (米)	0	2	4	6	8
---------	---	---	---	---	---

y (米)	4.0	5.5	6.0	5.5	4.0
---------	-----	-----	-----	-----	-----

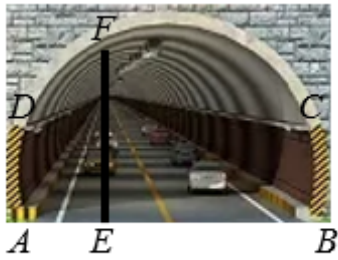


图1

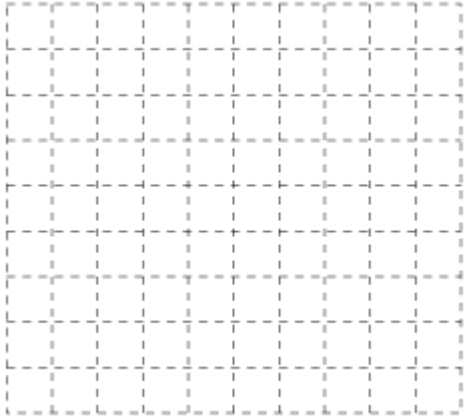


图2

(1)根据上述数据，直接写出隧道顶面到路面 AB 的最大距离

- 为_____米，并求出满足的函数关系式 $y = a(x-h)^2 + k (a < 0)$ ；
- (2)请你帮助工程人员建立平面直角坐标系，描出上表中各对对应值为坐标的点，画出可以表示隧道顶面的函数的图像。
- (3)若如图 2 的汽车在隧道内正常通过时，汽车的任何部位需到左侧墙及右侧墙的距离不小于 1 米且到隧道顶面的距离不小于 0.35 米．按照这个要求，隧道需标注的限高应为多少米（精确到 0.1 米）？

【变式 6-1】

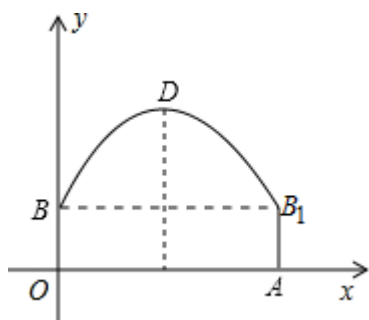
（2023 春·山东青岛·九年级校联考期末）

22. 如图是某隧道截面示意图，它是由抛物线和长方形构成，已知 $OA=12$ 米， $OB=4$ 米，抛物线顶点 D 到地面 OA 的垂直距离为 10 米，以 OA 所在直线为 x 轴，以 OB 所在直线为 y 轴建立直角坐标系。

- (1) 求抛物线的解析式；

(2) 由于隧道较长, 需要在抛物线型拱壁上需要安装两排灯, 使它们到地面的高度相同, 如果灯离地面的高度不超过 8 米, 那么两排灯的水平距离最小是多少米?

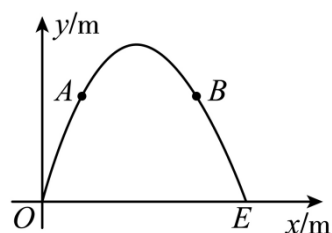
(3) 一辆特殊货运汽车载着一个长方体集装箱, 集装箱宽为 4m, 最高处与地面距离为 6m, 隧道内设双向行车道, 双向行车道间隔距离为 0.5m, 交通部门规定, 车载货物顶部距离隧道壁的竖直距离不少于 0.5m, 才能安全通行, 问这辆特殊货车能否安全通过隧道?



【变式 6-2】

(2023 春·安徽宣城·九年级统考期末)

23. 现要修建一条公路隧道, 其截面为抛物线型, 如图所示, 线段 OE 表示水平的路面, 以 O 为坐标原点, 以 OE 所在直线为 x 轴, 以过点 O 垂直于 x 轴的直线为 y 轴, 建立平面直角坐标系. 根据设计要求 $OE = 12\text{m}$, 隧道上距点 O 水平方向 2 米及竖直方向 6 米的 A 点有一照明灯.



(1) 求满足设计要求的抛物线的函数表达式;

(2) 现需在这个隧道中间位置设置双向通行车道, 加中间隔离带合计宽度 9 米, 隧道入口对车辆要求限高, 请通过计算说明高度不超过 4.5 米的车辆能否安全通过该隧道?

【变式 6-3】

(2023 春·山东青岛·九年级统考期末)

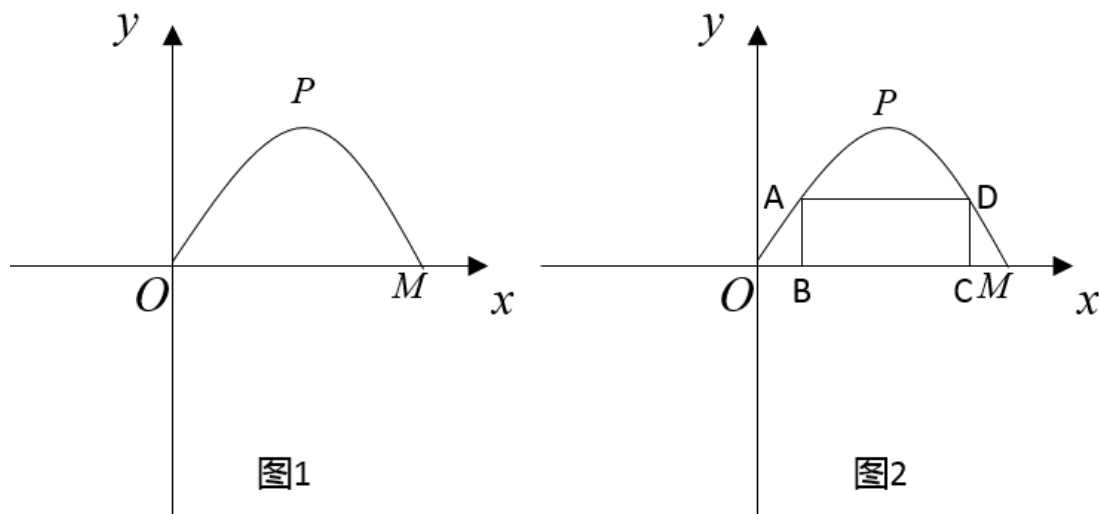
24. 为促进经济发展, 方便居民出行. 某施工队要修建一个横断面为抛物线的公路隧道. 抛物线的最高点 P 离路面 OM 的距离为 6m, 宽度 OM 为 12m.

(1) 按如图所示的平面直角坐标系, 求表示该抛物线的函数表达式;

(2) 一货运汽车装载某大型设备后高为 4m, 宽为 3.5m. 如果该隧道内设双向行车道

(正中间是一条宽 $1m$ 的隔离带), 那么这辆货车能否安全通过?

(3) 施工队计划在隧道口搭建一个矩形“脚手架” $ABCD$ ，使 A, D 点在抛物线上. B, C 点在地面 OM 线上 (如图 2 所示). 为了筹备材料，需求出“脚手架”三根支杆 AB, AD, DC 的长度之和的最大值是多少？请你帮施工队计算一下.

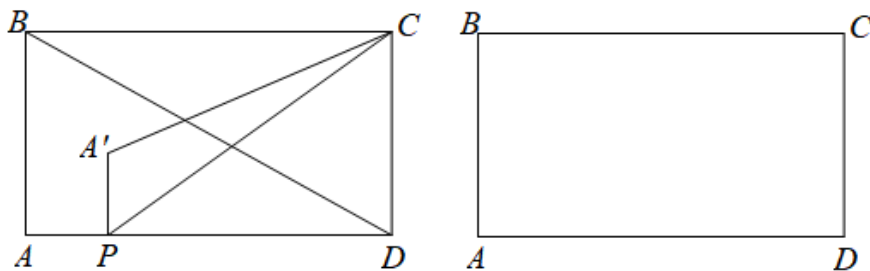


【题型 7 利用二次函数解决图形运动问题】

【例 7】

(2023 春·新疆乌鲁木齐·九年级校考期末)

25. 如图，在矩形 $ABCD$ 中， $AD = 8, BD = 4\sqrt{5}$. 点 P 是线段 AD 上一个动点，将线段 AP 绕点 P 顺时针旋转 90° 到线段 $A'P$ ，连接 $A'C, PC$. 设 $AP = m$ ， $\triangle A'PC$ 和矩形 $ABCD$ 的重叠部分面积为 S .



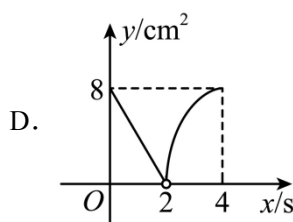
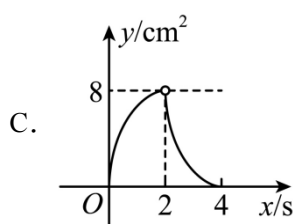
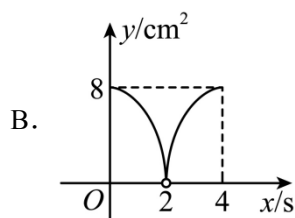
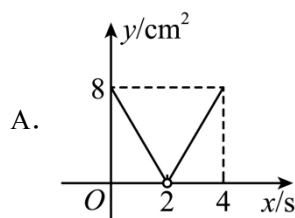
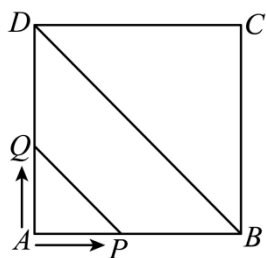
- (1) 求线段 AB 的长度；
- (2) 求 S 与 m 之间的函数关系式，并直接写出自变量 m 的取值范围.

【变式 7-1】

(2023 春·广西贺州·九年级统考期末)

26. 如图，正方形 $ABCD$ 的边长为 4cm ，动点 P, Q 同时从点 A 处出发，以 2cm/s 小的速度分别沿 $A \rightarrow B \rightarrow C$ 和 $A \rightarrow D \rightarrow C$ 的路径向点 C 运动. 设运动时间为 x (单位: s)，以 P, B, D, Q 为顶点的图形面积为 y (单位: cm^2)，则下列图像中可表示 y 与 x

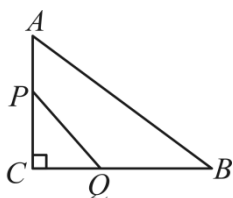
($0 \leq x \leq 4$ 且 $x \neq 2$) 之间的函数关系的是 ()



【变式 7-2】

(2023 春·河南许昌·九年级校考期末)

27. 如图, $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $AC = 6$, $BC = 8$, 动点 P , Q 分别从 A , C 两点同时出发, P 点沿边 AC 向 C 以每秒 3 个单位长度的速度运动, Q 点沿边 BC 向 B 以每秒 4 个单位长度的速度运动, 当 P , Q 到达终点 C , B 时, 运动停止, 设运动时间为 t (s).



(1) 当运动停止时, t 的值为_;

(2) 设 $\triangle PCQ$ 的面积为 S .

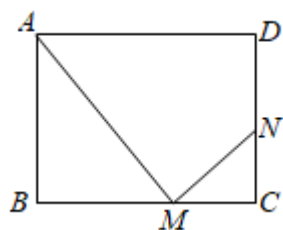
① 求 S 的表达式 (用含 t 的式子表示, 并注明 t 的取值范围);

② 求当 t 为何值时, S 取得最大值, 这个最大值是多少?

【变式 7-3】

(2023 春·河南南阳·九年级统考期末)

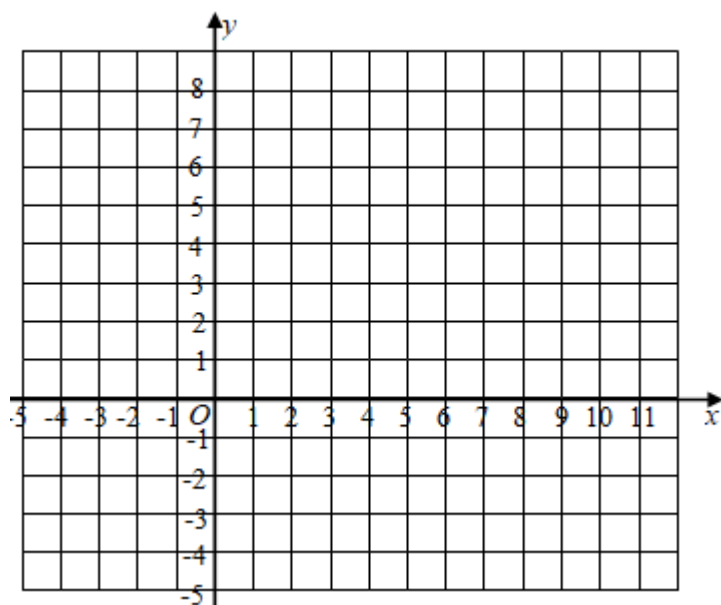
28. 如图, 在矩形 $ABCD$ 中, $AB=8$, $BC=10$, 点 M 是 BC 边上的动点, 点 M 从点 B 出发, 运动到点 C 停止, N 是 CD 边上一动点, 在运动过程中, 始终保持 $AM \perp MN$, 设 $BM=x$, $CN=y$.



(1) 直接写出 y 与 x 的函数关系式, 并写出自变量 x 的取值范围_____;

(2) 先完善表格, 然后在平面直角坐标系中利用描点法画出此抛物线. 直接写出 $m=$ _____,

x	...	2	3	4	5	6	7	8	...
y		2	$\frac{21}{8}$	3	m	3	$\frac{21}{8}$	2	...



(3) 结合图象, 指出 M 、 N

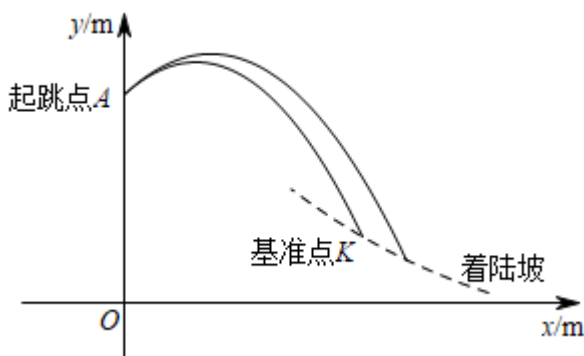
在运动过程中, 当 CN 达到最大值时, BM 的值是_____; 并写出在整个运动过程中, 点 N 运动的总路程_____.

【题型 8 利用二次函数解决运动员空中跳跃轨迹问题】

【例 8】

(2023 春·安徽六安·九年级校考期末)

29. 跳台滑雪运动可分为助滑、起跳、飞行和落地四个阶段，运动员起跳后飞行的路线是抛物线的一部分（如图中实线部分所示），落地点在着陆坡（如图中虚线部分所示）上，着陆坡上的基准点 K 为飞行距离计分的参照点，落地点超过 K 点越远，飞行距离分越高. 2022 年北京冬奥会跳台滑雪标准台的起跳台的高度 OA 为 66m，基准点 K 到起跳台的水平距离为 75m，高度为 hm (h 为定值). 设运动员从起跳点 A 起跳后的高度 $y(m)$ 与水平距离 $x(m)$ 之间的函数关系为 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$.



(1) c 的值为_____;

(2) ①若运动员落地点恰好到达 K 点，且此时 $a = -\frac{1}{50}, b = \frac{9}{10}$ ，求基准点 K 的高度 h ;

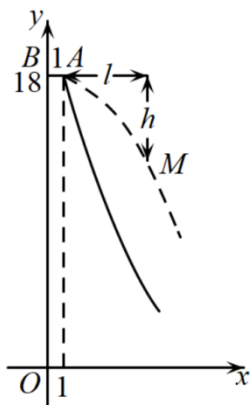
②若 $a = -\frac{1}{50}$ 时，运动员落地点要超过 K 点，则 b 的取值范围为_____;

(3) 若运动员飞行的水平距离为 25m 时，恰好达到最大高度 76m，试判断他的落地点能否超过 K 点，并说明理由.

【变式 8-1】

(2023 春·北京东城·九年级北京二中校联考期末)

30. 第二十四届冬季奥林匹克运动会已于 2022 年在北京成功举办，跳台滑雪是北京冬奥会的比赛项目之一，近些年来冰雪运动也得到了蓬勃发展. 如图是某跳台滑雪场地的截面示意图. 平台 AB 长 1 米 (即 $AB = 1$)，平台 AB 距地面 18 米. 以地面所在直线为 x 轴，过点 B 垂直于地面的直线为 y 轴，取 1 米为单位长度，建立平面直角坐标系，已知滑道对应的函数为 $y = 0.4x^2 - 4x + c (x \geq 1)$. 运动员 (看成点) 在 BA 方向获得速度 v 米/秒后，从 A 处向右下飞向滑道，点 M 是下落过程中的某位置 (忽略空气阻力). 设运动员飞出时间为 t 秒，运动员与点 A 的竖直距离为 h 米，运动员与点 A 的水平距离为 l 米，经实验表明: $h = 6t^2$, $l = vt$.



(1)求滑道对应的函数表达式；

(2)当 $v=5$ ， $t=1$ 时，通过计算判断运动员此时是否已落在滑道上；

(3)在试跳中，运动员从 A 处飞出，运动员甲飞出的路径近似看做函数

$y = -\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{107}{6}$ 图像的一部分，着陆时水平距离为 d_1 ，运动员乙飞出的路径近似看

做函数图像 $y = -\frac{1}{5}x^2 + \frac{2}{5}x + \frac{89}{5}$ 的一部分，着陆时水平距离为 d_2 ，则 d_1 _____ d_2 （填

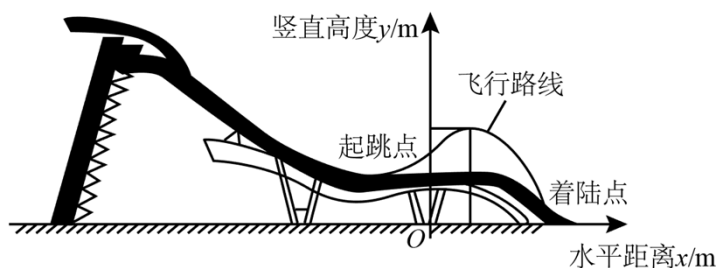
“>”“=”或“<”）.

【变式 8-2】

（2023 春·河南新乡·九年级统考期末）

31. 单板滑雪大跳台是北京冬奥会比赛项目之一，举办场地为首钢滑雪大跳台，运动员起跳后的飞行路线可以看作是抛物线的一部分，建立如图所示的平面直角坐标系，从起跳到着陆的过程中，运动员的竖直高度 y （单位：m）与水平距离 x （单位：m）近似满足函数关系 $y = a(x-h)^2 + k (a < 0)$.

示意图



某运动员进行了两次训练.

(1)第一次训练时，该运动员的水平距离 x 与竖直高度 y 的几组数据如下：

水平距离 x/m	0	2	5	8	11	14
竖直高度 y/m	20.00	21.40	22.75	23.20	22.75	21.40

根据上述数据，直接写出该运动员竖直高度的最大值，并求出满足的函数关系

$$y = a(x-h)^2 + k (a < 0);$$

(2)第二次训练时，该运动员的竖直高度 y 与水平距离 x 近似满足函数关系

$$y = -0.04(x-9)^2 + 23.24.$$
 记该运动员第一次训练的着陆点的水平距离为 d_1 ，第二次训练

的着陆点的水平距离为 d_2 ，则 d_1 _____ d_2 (填“>”“=”或“<”).

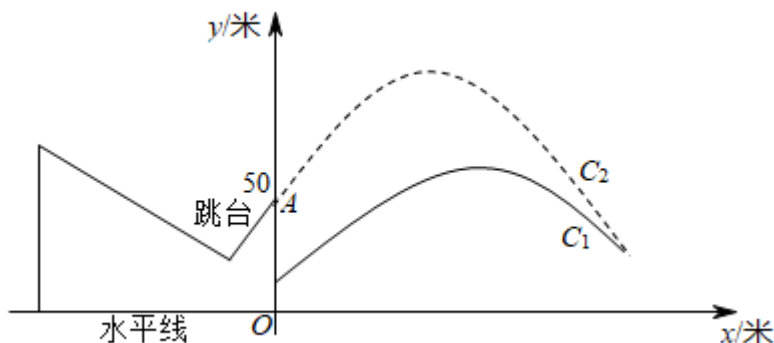
【变式 8-3】

(2023 春·吉林长春·九年级统考期末)

32. 北方的冬天，人们酷爱冰雪运动，在这项运动里面，我们可以用数学知识解决一些实际问题. 如图是某跳台滑雪训练场的横截面示意图，取某一位置的水平线为 x 轴，过跳台终点 A 作水平线的垂线为 y 轴，建立平面直角坐标系如图所示，图中的抛物线

$$C_1: y = -\frac{1}{480}x^2 + 40$$
 近似表示滑雪场地上的的一座小山坡，某运动员从点 O 正上方 50 米

处的 A 点滑出，滑出后沿一段抛物线 $C_2: y = -\frac{1}{120}x^2 + bx + c$ 运动. 当运动员运动到离 A 处的水平距离为 60 米时，离水平线的高度为 60 米.



(1)求小山坡最高点到水平线的距离.

(2)求抛物线 C_2 所对应的函数表达式.

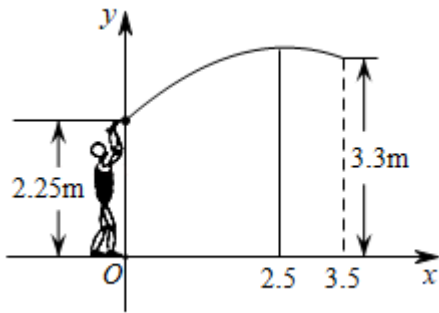
(3)当运动员滑出点 A 后，直接写出运动员运动的水平距离为多少米时，运动员与小山坡 C_1 的竖直距离为 10 米.

【题型 9 利用二次函数解决球类运行的轨迹问题】

【例 9】

(2023 春·浙江金华·八年级统考期末)

33. 篮球运动员投篮后，球运动的路线为抛物线的一部分（如图），抛物线的对称轴为直线 $x = 2.5$.

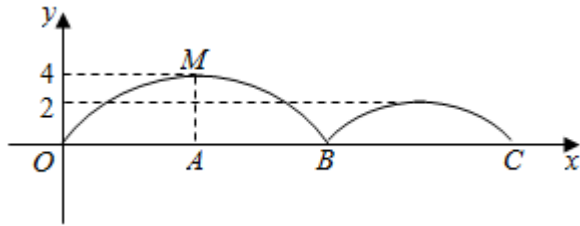


- (1) 求篮球运动路线的抛物线表达式和篮球在运动中离地面的最大高度.
- (2) 若篮筐离地面 3.05m ，离运动员投篮处水平距离为 4.2m ，问：篮球以该运动方式，能否投进篮筐？若能投进篮筐，请说明理由. 若不能，则运动员应向前还是往后移动多少米后，再投篮，刚好能使篮球投进篮筐？

【变式 9-1】

（2023 春·浙江·九年级期末）

34. 如图，在一次足球比赛中，守门员在地面 O 处将球踢出，一运动员在离守门员 8 米的 A 处发现球在自己头上的正上方 4 米处达到最高点 M ，球落地后又一次弹起. 据实验测算，足球在空中运行的路线是一条抛物线，在草坪上弹起后的抛物线与原来的抛物线形状相同，最大高度减少到原来最大高度的一半.



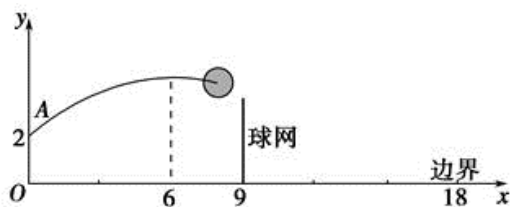
- (1) 求足球第一次落地之前的运动路线的函数表达式及第一次落地点 B 和守门员（点 O ）的距离；
- (2) 运动员（点 A ）要抢到第二个落点 C ，他应再向前跑多少米？（假设点 O 、 A 、 B 、 C 在同一条直线上，结果保留根号）

【变式 9-2】

（2023 春·山东淄博·九年级统考期末）

35. 如图，排球运动员站在点 O 处练习发球，将球从 O 点正上方 2m 的 A 处发出，把球看成点，其运行的高度 $y(\text{m})$ 与运行的水平距离 $x(\text{m})$ 满足关系式 $y = a(x-6)^2 + h$. 已知

球网与 O 点的水平距离为 9 m，高度为 2.43 m，球场的边界距 O 点的水平距离为 18 m.



- (1) 当 $h=2.6$ 时, 求 y 与 x 的关系式(不要求写出自变量 x 的取值范围)
- (2) 当 $h=2.6$ 时, 球能否越过球网? 球会不会出界? 请说明理由.

【变式 9-3】

(2023 春·浙江绍兴·九年级统考期末)

36. 在卡塔尔世界杯期间, 图 1 是某足球运动员在比赛期间的进球瞬间, 足球在抽射过程中恰好碰到防守队员的身体, 改变足球线路, 弹射入网. 小冲在训练过程中也尝试这样的射门, 如图 2 是小冲在训练时的示意图, 足球在空中的运动轨迹可以抽象成一条抛物线, 假设足球在碰到障碍平台后的运动轨迹, 与未碰到障碍平台前的轨迹的形状完全相同, 且达到最高点时离地高度也相同, 并且两条轨迹在同一平面内, 射门时的起脚点 O 与障碍平台 A 之间的距离 OA 为 9m , 障碍平台高为 1.08m , 若小冲此次训练时足球正好在前方 5m 的点 C 处达到最高点, 离地面最高距离为 3m , 以地面 OA 所在直线为 x 轴, 过点 O 且垂直于 OA 的直线为 y 轴建立平面直角坐标系.



图 1

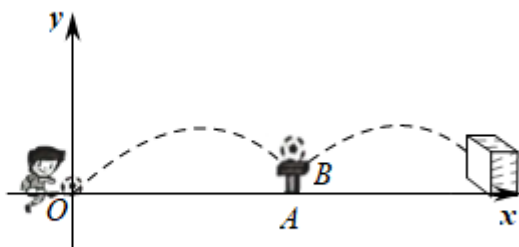


图 2

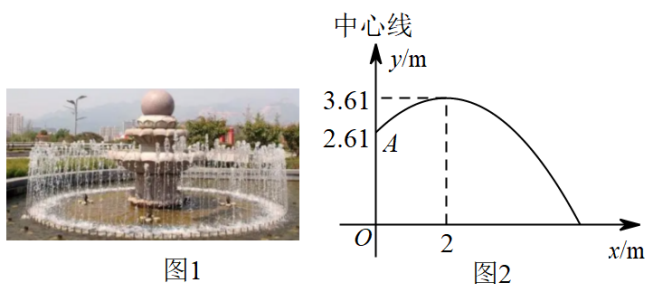
- (1) 求过 O , C , B 三点的抛物线表达式;
- (2) 此时障碍平台与球门之间的距离 AD 为 6m , 已知球门高为 2.44m , 请你通过计算, (不考虑其他因素) 足球在经过障碍平台的反弹后能否顺利射入球门.

【题型 10 利用二次函数解决喷头喷出的球的轨迹问题】

【例 10】

(2023 春·浙江台州·九年级统考期末)

37. 如图 1, 为美化校园, 学校要建造一个圆形喷水池, 计划在喷水池周边安装一圈可移动的喷水头向中央喷水, 使水流沿形状相同的抛物线落下. 以喷水池中心为原点, 水平方向为 x 轴、中心线为 y 轴建立平面直角坐标系, 则水柱高度 y (单位: m) 与水柱距离喷水池中心的水平距离 x (单位: m) 之间的关系如图 2 所示. 当水流与中心线的水平距离为 2 m 时, 达到最大高度 3.61 m, 此时水柱刚好经过中心线上的点 A, 已知点 A 距水面高 2.61 m.

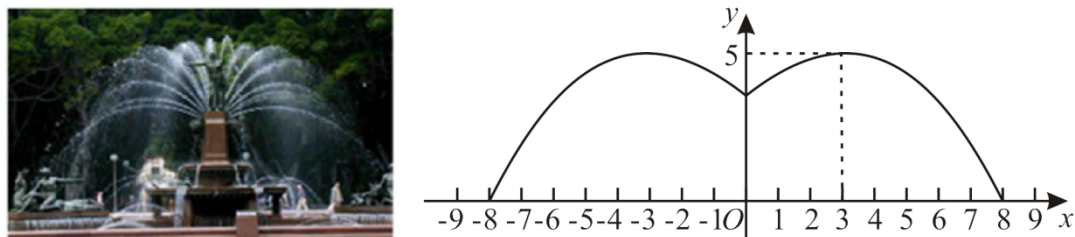


- (1) 求如图 2 所示抛物线的解析式.
- (2) 为形成错落有致的喷水景观, 现让喷水头向中心线沿直线滑动, 在保持水流形状不变的情况下, 要求喷水柱最高点不能超过中心线, 若喷水头的位置用 $(p, 0)$ 表示. (仅考虑 y 轴右侧的情况).
 - ① 求 p 的取值范围;
 - ② 若水刚好喷到中心线上, 且距水面高 3.25 m 处, 直接写出此时 p 的值_____.

【变式 10-1】

(2023 春·河北保定·九年级校考期末)

38. 某游乐园有一个直径为 16 米的圆形喷水池, 喷水池的周边有一圈喷水头, 喷出的水柱为抛物线, 在距水池中心 3 米处达到最高, 高度为 5 米, 且各方向喷出的水柱恰好在喷水池中心的装饰物处汇合. 如图所示, 以水平方向为 x 轴, 喷水池中心为原点建立直角坐标系.



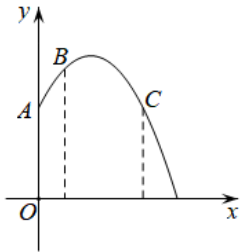
- (1) 求水柱所在抛物线 (第一象限部分) 的函数表达式;
- (2) 王师傅在喷水池内维修设备期间, 水管意外喷水, 为了不被淋湿, 身高 1.8 米的王师傅站立时必须在离水池中心多少米以内?

(3)经检修评估，游乐园决定对喷水设施做如下设计改进：在喷出水柱的形状不变的前提下，把水池的直径扩大到 24 米，各方向喷出的水柱仍在喷水池中心保留的原装饰物（高度不变）处汇合，请探究扩建改造后喷水池水柱的最大高度．

【变式 10-2】

（2023 春·山东青岛·九年级统考期末）

39. 如图，一个圆形喷水池的中央垂直于水面安装了一个柱形喷水装置 OA ， O 恰好在水面中心，安置在柱子顶端 A 处的喷头向外喷水，水流在各个方向上沿形状相同的抛物线路径落下，且在过 OA 的平面上，按如图所示建立直角坐标系，水流喷出的高度 y （m）与水平距离 x （m）之间的关系式可以用 $y = -x^2 + bx + c$ 表示，且抛物线经过点 $B\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$ ， $C\left(2, \frac{7}{4}\right)$ ．请根据以上信息，解答下列问题：



- (1)求抛物线的函数关系式，并确定喷水装置 OA 的高度；
- (2)喷出的水流距水面的最大高度是多少米？
- (3)若不计其他因素，水池的半径至少要多少米，才能使喷出的水流不至于落在池外？

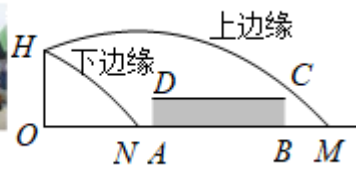
【变式 10-3】

（2023·北京西城·九年级北师大实验中学校考期末）

40. 如图，灌溉车为绿化带浇水，喷水口 H 离地竖直高度 OH 为 1.5m．灌溉车喷出水的上、下边缘可以分别看作是抛物线的一部分，而绿化带可以看作为矩形 $ABCD$ ，其水平宽度 $AB = 3m$ ，竖直高度 $BC = 0.5m$ ．记喷出的水与喷水口的水平距离为 xm ，上边缘距地面的高度为 $y_1 m$ ，下边缘距地面的高度为 $y_2 m$ ．测量得到如下数据：

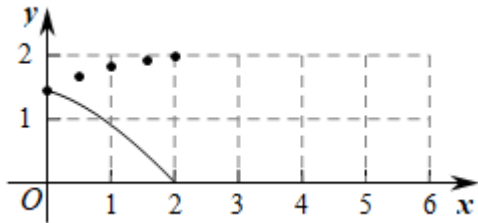
x	0	0.5	1	1.5	2	3	4	5	6
y_1	1.5	1.72	1.88	1.97	2	1.88	1.5	0.88	0

y_2	1.5	1.22	0.88	0.47	0				
-------	-----	------	------	------	---	--	--	--	--



(1)在平面直角坐标系 xOy 中，描出表中各组

数值所对应的点 (x, y_1) ，并画出上边缘函数的图像；



(2)结合表中数据或所画图象，直接写出喷出水的最大射程 OM 为_____m，并求上边缘抛物线的函数解析式；

(3)要使灌溉车行驶时喷出的水能浇灌到整个绿化带，结合函数图像，估计灌溉车到绿化带的距离 OA 的取值范围为_____.

参考答案:

1. (1)生产并销售 B 型车床10台

(2)当生产并销售 A , B 两种车床各为9台、5台或8台、6台时, 使获得的总利润 W 最大;
最大利润为170万元

【分析】(1) 根据题意, 列出一元二次方程, 解方程即可求解;

(2) 当 $0 < x \leq 4$ 时, 总利润 $W = 10(14-x) + 17x$, 当 $x > 4$ 时, 总利润

$W = 10(14-x) + [17-(x-4)]x$, 根据二次函数的性质, 即可求解.

【详解】(1) 解: 由题意得方程

$$10(14-x) + 70 = [17-(x-4)]x,$$

解得 $x_1 = 10$, $x_2 = 21$ (舍去),

答: 生产并销售 B 型车床10台;

(2) 当 $0 < x \leq 4$ 时, 总利润 $W = 10(14-x) + 17x$,

整理得, $W = 7x + 140$,

$Q7 > 0$,

$\therefore$ 当 $x = 4$ 时总利润 W 最大为 $7 \times 4 + 140 = 168$ (万元);

当 $x > 4$ 时, 总利润

$$W = 10(14-x) + [17-(x-4)]x,$$

整理得 $W = -x^2 + 11x + 140$,

$Q-1 < 0$,

$\therefore$ 当 $x = -\frac{11}{-2} = 5.5$ 时总利润 W 最大,

又由题意 x 只能取整数,

$\therefore$ 当 $x = 5$ 或 $x = 6$ 时,

$\therefore$ 当 $x = 5$ 时, 总利润 W 最大为 $-5^2 + 11 \times 5 + 140 = 170$ (万元)

又 $Q168 < 170$,

$\therefore$ 当 $x = 5$ 或 $x = 6$ 时, 总利润 W 最大为170万元,

而 $14-5=9$,

$$14-6=8,$$

答：当生产并销售 A，B 两种车床各为 9 台、5 台或 8 台、6 台时，使获得的总利润 W 最大；最大利润为 170 万元.

【点睛】本题考查了一元二次方程的应用，二次函数的应用，根据题意列出一元二次方程和二次函数解析式是解题的关键.

$$2. (1) y = -2x + 220, \quad 40 \leq x \leq 72$$

(2) 70 元

(3) 当吉祥物“拉伊卜”的销售单价为 72 元时，该商家每天获得的利润最大，最大利润为 2432 元

【分析】(1) 设 $y = kx + b (k \neq 0)$ ，利用待定系数法即可求得一次函数的解析式，再根据销售单价不低于成本价，且不低于成本价的 1.8 倍，即可求得 x 的取值范围；

(2) 根据题意即可列出一元二次方程，解方程即可求解；

(3) 设每天获得的利润为 w 元，根据题意即可求得二次函数，再根据二次函数的性质，即可求解.

【详解】(1) 解：设 $y = kx + b (k \neq 0)$,

把点 $(50, 120)$ ， $(60, 100)$ 分别代入解析式，得

$$\begin{cases} 50k + b = 120 \\ 60k + b = 100 \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} k = -2 \\ b = 220 \end{cases}$$

$$\therefore y = -2x + 220,$$

Q 销售单价不低于成本价，且不低于成本价的 1.8 倍，

$\therefore$ 自变量 x 的取值范围是： $40 \leq x \leq 72$ ；

$$(2) \text{ 解：根据题意得： } (-2x + 220)(x - 40) = 2400,$$

$$\text{整理得： } x^2 - 150x + 5600 = 0,$$

$$\text{解得： } x_1 = 70, \quad x_2 = 80,$$

$$\therefore 40 \leq x \leq 72,$$

$\therefore x_2 = 80$ 不合题意，舍去，

答：每个吉祥物“拉伊卜”的售价为 70 元时，该商家每天的销售利润为 2400 元；

(3) 解：设每天获得的利润为 w 元，根据题意得：

$$w = (-2x + 220)(x - 40) = -2x^2 + 300x - 8800 = -2(x - 75)^2 + 2450$$

$$\because -2 < 0,$$

$\therefore$ 抛物线开口向下，

$\therefore$ 抛物线对称轴为 $x = 75$ ，销售单价不得高于 72 元，

$\therefore$ 当 $40 \leq x \leq 72$ 时， w 随 x 的增大而增大，

$\therefore$ 当 $x = 72$ 时， w 有最大值，

$$w_{\text{最大值}} = -2 \times (72 - 75)^2 + 2450 = 2432,$$

答：当吉祥物“拉伊卜”的销售单价为 72 元时，该商家每天获得的利润最大，最大利润为 2432 元。

【点睛】本题考查了一次函数及二次函数的应用，一元二次方程的应用，理解题意，正确求得函数解析式及方程是解决本题的关键。

3. (1) 116

(2) 不能，理由见详解

(3) 这种蔬菜的售价为 45 元，可获得最大日利润为 1650 元

【分析】(1) 设 y 与 x 之间的函数关系为 $y = kx + b$ ，用待定系数法求函数解析式即可；

(2) 根据题意列出关于 x 的一元二次方程，解方程求出 x 的值，然后根据这种蔬菜的标价为 45 元/箱，实际售价不低于标价的八折得出 x 的取值范围为 $36 \leq x \leq 45$ ，从而确定方程的解；

(3) 根据每天的利润 = 单箱的利润 $\times$ 销量列出函数解析式，再根据函数的性质求函数的最值。

【详解】(1) 解：设 y 与 x 之间的函数关系为 $y = kx + b$ ，

$$\text{根据题意得：} \begin{cases} 35k + b = 130 \\ 38k + b = 124 \end{cases},$$

$$\text{解得：} \begin{cases} k = -2 \\ b = 200 \end{cases},$$

$$\therefore y = -2x + 200,$$

$$\therefore \text{当 } x = 42 \text{ 时, } y = -2 \times 42 + 200 = 116,$$

$\therefore$ 当天这种蔬菜的销售量为 116 箱;

故答案为 116;

$$(2) \text{ 解: 根据题意得: } (-2x + 200)(x - 24) = 1320,$$

$$\text{解得 } x_1 = 34, \quad x_2 = 90,$$

Q 这种蔬菜售价不低于 $45 \times 0.8 = 36$, 且不高 于 45,

$$\therefore 36 \leq x \leq 45,$$

$\therefore 34, 90$ 都不满足题意,

所以该批发商销售这种蔬菜不能在某天获利 1320 元;

$$(3) \text{ 解: 设日获得利润为 } w \text{ 元,}$$

$$\text{则 } w = (-2x + 200)(x - 24 - 6) = -2(x - 65)^2 + 2450,$$

$$\text{Q } a = -2 < 0,$$

$\therefore$ 抛物线开口向下,

$\therefore$ 当 $x < 65$ 时, w 的值随 x 值的增大而增大,

Q 这种蔬菜售价不低于 $45 \times 0.8 = 36$,

$$\therefore 36 \leq x \leq 45,$$

$$\therefore \text{当 } x = 45 \text{ 时, } W_{\text{最大}} = -2 \times (45 - 65)^2 + 2450 = 1650 \text{ (元)},$$

答: 这种蔬菜的售价为 45 元, 可获得最大日利润为 1650 元.

【点睛】本题考查了销售问题的数量关系在解决实际问题时的运用, 一次函数的解析式的运用和二次函数的解析式的运用, 解答时根据题意建立函数关系是解答本题的难点和关键.

4. (1) 当产品产量为 80kg 时, 获得的利润最大, 最大利润为 3200 元

(2) 10

【分析】(1) 设当该产品产量为 x kg 时, 获得的利润为 W 元, 根据利润等于售价减去进价乘以销售量, 列出函数关系式, 进而根据二次函数的性质即可求解;

(2) 设当产品产量为 x 千克时, 获得的利润为 P 元, 得出 $P = -\frac{1}{2}x^2 + (80 - a)x$, 该函数图像的对称轴为直线 $x = 80 - a$, 由 $70 \leq x \leq 80$, 分类讨论即可求解.

【详解】(1) 解: 设当该产品产量为 x kg 时, 获得的利润为 W 元.

根据题意, 得 $W = x \left(-\frac{1}{2}x + 120 - 40 \right) = -\frac{1}{2}x^2 + 80x = -\frac{1}{2}(x - 80)^2 + 3200$.

$$\because a = -\frac{1}{2} < 0,$$

$\therefore$ 当 $x = 80$ 时, W 有最大值, 最大值为 3200 元.

答: 当产品产量为 80kg 时, 获得的利润最大, 最大利润为 3200 元.

(2) 解: 设当产品产量为 x 千克时, 获得的利润为 P 元.

根据题意, 得 $P = x \left(-\frac{1}{2}x + 120 - 40 - a \right)$,

$$\text{即 } P = -\frac{1}{2}x^2 + (80 - a)x,$$

其中 $70 \leq x \leq 80$.

该函数图像的对称轴为直线 $x = 80 - a$.

①若 $a > 10$, 则当 $x = 70$ 时, P 有最大值,

即 $P = 3150 - 70a < 2450$. (不合题意, 舍去)

②若 $0 < a \leq 10$, 则当 $x = 80 - a$ 时, P 有最大值,

将 $x = 80 - a$ 代入, 得 $P = \frac{1}{2}(80 - a)^2$.

当 $P = 2450$ 时, $2450 = \frac{1}{2}(80 - a)^2$.

解得 $a_1 = 10$, $a_2 = 150$ (不合题意, 舍去).

综上所述, a 的值为 10.

【点睛】本题考查了二次函数的应用, 根据题意列出函数关系式是解题的关键.

$$5. (1) y_1 = 0.8x, \quad y_2 = -0.25x^2 + 1.8x$$

(2) 当购买 A 型设备的金额为 8 万元、 B 型设备的金额为 2 万元时能获得最大补贴金额, 最大补贴金额为 9 万元.

【分析】(1) 由题意可将 $(5, 4)$ 代入 $y_1 = kx$ 进行求解, 然后将 $(2, 2.6), (4, 3.2)$ 代入 $y_2 = ax^2 + bx$ 进行求解即可;

(2) 设投资购买 B 型设备的金额为 x 万元, 则 A 型设备的金额为 $(10 - x)$ 万元, 获得的政府补贴为 y 万元, 由题意可得 $y = -0.25x^2 + x + 8$, 然后根据二次函数的性质可进行求解.

【详解】(1) 解: 将 $(5, 4)$ 代入 $y_1 = kx$ 得: $4 = 5k$,

解得： $k = 0.8$.

故： $y_1 = 0.8x$,

将 $(2, 2.6), (4, 3.2)$ 代入 $y_2 = ax^2 + bx$ 得：

$$\begin{cases} 2.6 = 4a + 2b \\ 3.2 = 16a + 4b \end{cases} ,$$

解得 $a = -0.25, b = 1.8$,

$$\therefore y_2 = -0.25x^2 + 1.8x ;$$

(2) 解： 设投资购买 B 型设备的金额为 x 万元，则 A 型设备的金额为 $(10-x)$ 万元，获得的政府补贴为 y 万元，依题意得：

$$y = y_1 + y_2 = 0.8(10-x) - 0.25x^2 + 1.8x = -0.25x^2 + x + 8 ,$$

$\therefore a = -0.25 < 0$, 即该函数图象开口向下，对称轴为直线 $x = -\frac{b}{2a} = 2$,

$\therefore$ 当 $x = 2$ 时，有最大补贴为 $y = \frac{4ac - b^2}{4a} = 9$,

$\therefore$ 当购买 A 型设备的金额为 8 万元、 B 型设备的金额为 2 万元时能获得最大补贴金额，最大补贴金额为 9 万元.

【点睛】 本题主要考查二次函数、一次函数的应用，熟练掌握二次函数的性质，根据题意求出函数解析式是解题的关键.

6. (1) A 种花苗的单价为 30 元， B 种花苗的单价为 26 元；

(2) 购买 A 种花苗 11 盆，购买 B 种花苗 1 盆花费最少.

【分析】 (1) 设 A 种花苗的单价为 x 元， B 种花苗的单价为 y 元，根据“购买 A 种花苗 3 盆， B 种花苗 5 盆，则需 220 元；购买 A 种花苗 4 盆， B 种花苗 10 盆，则需 380 元”，即可得出关于 x, y 的二元一次方程组，解之即可得出结论；

(2) 根据总费用等于购买 A, B 两种花苗费用之和列出函数解析式，再根据函数的性质求最值.

【详解】 (1) 解： 设 A 种花苗的单价为 x 元， B 种花苗的单价为 y 元，

依题意得：
$$\begin{cases} 3x + 5y = 220 \\ 4x + 10y = 380 \end{cases} ,$$

解得： $\begin{cases} x=30 \\ y=26 \end{cases}$.

答：A 种花苗的单价为 30 元，B 种花苗的单价为 26 元；

(2) 设购买两种花的总费用为 w 元，购买 A 种花苗 m 盆，则购买 B 种花苗 $(12-m)$ 盆，
根据题意得： $w = (30-m)m + 26(12-m) = -m^2 + 4m + 312 = -(m-2)^2 + 316$ ，

$\because -1 < 0$ ， $0 < m < 12$ (m 为整数)，

$\therefore$ 当 $m=11$ 时， w 最小，最小值为 235，

$\therefore$ 购买 A 种花苗 11 盆，购买 B 种花苗 1 盆花费最少.

【点睛】本题考查了二次函数和二元一次方程组的应用，解题的关键是 (1) 找准等量关系，正确列出二元一次方程组；(2) 找准等量关系，正确列出二次函数解析式.

7. (1) $y_1 = 0.4x$, $y_2 = -0.2x^2 + 1.6x$

(2) 当购买 I 型用 7 万元、II 型为 3 万元时能获得的最大补贴金额，最大补贴金额为 5.8 万元

【分析】(1) 根据图表得出函数上点的坐标，利用待定系数法求出函数解析式即可；

(2) 根据 $y = y_1 + y_2$ 得出关于 x 的二次函数，求出二次函数最值即可.

【详解】(1) 解：设 $y_1 = kx$ ，将 (5,2) 代入，得 $2 = 5k$ ，

解得： $k = 0.4$ ，故 $y_1 = 0.4x$ ，

设 $y_2 = ax^2 + bx$ ，

将 (2,2.4)，(4,3.2) 代入，得： $\begin{cases} 2.4 = 4a + 2b \\ 3.2 = 16a + 4b \end{cases}$ ，

解得： $a = -0.2$ ， $b = 1.6$ ，

$\therefore y_2 = -0.2x^2 + 1.6x$ ；

(2) 解：假设投资购买 I 型用 x 万元、II 型为 $(10-x)$ 万元，

则： $y = y_1 + y_2 = 0.4x + [-0.2(10-x)^2 + 1.6(10-x)]$ ；

$= -0.2x^2 + 2.8x - 4$ ，

$\because a = -0.2 < 0$ ，

当 $x = -\frac{b}{2a} = 7$ 时, y 有最大值为 $\frac{4ac-b^2}{4a} = 5.8$ 万元,

此时 $10-x=3$,

∴ 当购买 I 型用 7 万元、II 型为 3 万元时能获得的最大补贴金额, 最大补贴金额为 5.8 万元.

【点睛】此题主要考查了待定系数法求一次函数和二次函数解析式以及二次函数的最值问题, 利用函数解决实际问题考试的中热点问题, 同学们应重点掌握.

8. (1) $y = -0.1x^2 + 1.4x$; (2) 购进甲 16 万件, 购进乙 4 万件, 利润最大为 13.6 万元

【分析】(1) 将当 $x=1$ 时 $y=1.3$; 当 $x=2$ 时, $y=2.4$ 代入 $y = ax^2 + bx$, 解二元一次方程组即可;

(2) 设购进甲的数量为 m ($0 < m < 20$) 万件, 总利润为 w 万元, 则购进乙的数量为 $(20-m)$ 万件, 将甲乙的数量代入各自的利润表达式得, $w = -0.1m^2 + 3.2m - 12$, 根据二次函数的最值问题解答即可.

【详解】(1) 将当 $x=1$ 时 $y=1.3$; 当 $x=2$ 时, $y=2.4$ 代入 $y = ax^2 + bx$ 得,

$$\begin{cases} a+b=1.3 \\ 4a+2b=2.4 \end{cases},$$

解得: $\begin{cases} a=-0.1 \\ b=1.4 \end{cases},$

$$\therefore y = -0.1x^2 + 1.4x;$$

(2) 设购进甲的数量为 m ($0 < m < 20$) 万件, 总利润为 w 万元, 则购进乙的数量为 $(20-m)$ 万件,

由题意得:

$$w = 0.6m - 0.1(20-m)^2 + 1.4(20-m)$$

$$= -0.1m^2 + 3.2m - 12,$$

$$\text{当 } m = -\frac{b}{2a} = -\frac{3.2}{2 \times (-0.1)} = 16 \text{ 时, 即购进甲 16 万件, 购进乙 4 万件, 利润最大,}$$

$$\text{最大利润 } w = -0.1 \times 16^2 + 3.2 \times 16 - 12 = 13.6 \text{ (万元),}$$

答: 购进甲 16 万件, 购进乙 4 万件, 利润最大为 13.6 万元.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。

如要下载或阅读全文，请访问：

<https://d.book118.com/615123231204011304>