2023 届福建省福州市师大附中高三总复习质量测试(一)数学试题

考生请注意：

1．答题前请将考场、试室号、座位号、考生号、姓名写在试卷密封线内，不得在试卷上作任何标记。

2．第一部分选择题每小题选出答案后，需将答案写在试卷指定的括号内，第二部分非选择题答案写在试卷题目指定的位置上。

3．考生必须保证答题卡的整洁。考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．已知函数 $f(x)=te^{2x}+(t-2)e^{x}-x$（$t\geq 0$），若函数 $f(x)$ 在 $x\in\mathbf{R}$ 上有唯一零点，则 t 的值为（　　）

A．1　　B．$\frac{1}{2}$ 或 0　　C．1 或 0　　D．2 或 0

2．已知函数 $f(x)=\frac{1}{2}ax^{2}-(x-1)e^{x}(a\in R)$ 若对区间 $[0,1]$ 内的任意实数 x_1、x_2、x_3，都有 $f(x_1)+f(x_2)\geq f(x_3)$，则实数 a 的取值范围是(　　)

A．$[1,2]$　　B．$[e,4]$　　C．$[1,4]$　　D．$[1,2)\cup[e,4]$

3．若直线 $y=-2x$ 的倾斜角为 α，则 $\sin 2\alpha$ 的值为（　）

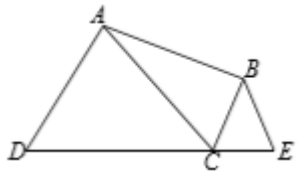
A．$\frac{4}{5}$　　B．$-\frac{4}{5}$　　C．$\pm\frac{4}{5}$　　D．$-\frac{3}{5}$

4．在 $\triangle ABC$ 中，$\overrightarrow{BD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$，则 $\overrightarrow{AD}=$（　　）

A．$\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$　　B．$\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

C．$\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$　　D．$\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

5．如图所示，为了测量 A、B 两座岛屿间的距离，小船从初始位置 C 出发，已知 A 在 C 的北偏西 $45°$ 的方向上，B 在 C 的北偏东 $15°$ 的方向上，现在船往东开 2 百海里到达 E 处，此时测得 B 在 E 的北偏西 $30°$ 的方向上，再开回 C 处，由 C 向西开 $2\sqrt{6}$ 百海里到达 D 处，测得 A 在 D 的北偏东 $22.5°$ 的方向上，则 A、B 两座岛屿间的距离为（　）



A．3　　B．$3\sqrt{2}$　　C．4　　D．$4\sqrt{2}$

6．已知 $f(x)$ 为定义在 R 上的奇函数，且满足 $f(x+4)=f(x)$，当 $x\in(0,2)$ 时，$f(x)=2x^{2}$，则 $f(3)=$（　　）

A．-18　　B．18　　C．-2　　D．2

7．

“中国剩余定理”又称“孙子定理”，最早可见于中国南北朝时期的数学著作《孙子算经》卷下第二十六题，叫做“物不知数”，原文如下：今有物不知其数，三三数之剩二，五五数之剩三，七七数之剩二.问物几何？现有这样一个相关的问题：将 1 到 2020 这 2020 个自然数中被 5 除余 3 且被 7 除余 2 的数按照从小到大的顺序排成一列，构成一个数列，则该数列各项之和为（　　）

A．56383　　**B．57171**　　**C．59189**　　**D．61242**

8．已知角 α 的顶点为坐标原点，始边与 x 轴的非负半轴重合，终边上有一点 $P(-3,4)$，则 $\sin 2\alpha=$（　　）.

A． $-\dfrac{12}{25}$　　**B．** $-\dfrac{24}{25}$　　**C．** $\dfrac{16}{5}$　　**D．** $\dfrac{8}{5}$

9．已知角 α 的终边经过点 $(3,-4)$,则 $\sin\alpha+\dfrac{1}{\cos\alpha}=$

A． $-\dfrac{1}{5}$　　**B．** $\dfrac{37}{15}$

C． $\dfrac{37}{20}$　　**D．** $\dfrac{13}{15}$

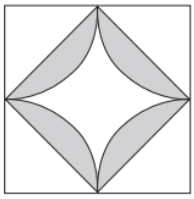
10．已知函数 $y=2\sin\left(2x+\dfrac{3\pi}{4}\right)\left(0<x<\dfrac{3\pi}{4}\right)$ 的图像与一条平行于 x 轴的直线有两个交点，其横坐标分别为 x_1,x_2，则 $x_1+x_2=$（　　）

A． $\dfrac{3\pi}{4}$　　**B．** $\dfrac{2\pi}{3}$　　**C．** $\dfrac{\pi}{3}$　　**D．** $\dfrac{\pi}{6}$

11．已知 $\vec{a}=(1,3),\vec{b}=(2,2),\vec{c}=(n,-1)$，若 $(\vec{a}-\vec{c})\perp\vec{b}$，则 n 等于（　　）

A．3　　**B．4**　　**C．5**　　**D．6**

12．蒙特卡洛算法是以概率和统计的理论、方法为基础的一种计算方法，将所求解的问题同一定的概率模型相联系；用均匀投点实现统计模拟和抽样，以获得问题的近似解，故又称统计模拟法或统计实验法.现向一边长为 $2a$ 的正方形模型内均匀投点，落入阴影部分的概率为 p，则圆周率 $\pi\approx$（　　）



A． $4p+2$　　**B．** $4p+1$

C． $6-4p$　　**D．** $4p+3$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13．公比为正数的等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 $a_2=2$，$S_4-5S_2=0$，则 S_6-S_3 的值为_____.

14．已知函数 $f(x)=\frac{e\ln x}{2x}$，$g(x)=\frac{2x^2}{x-m}$，若函数 $h(x)=g(f(x))+m$ 有 3 个不同的零点 x_1，x_2，$x_3(x_1<x_2<x_3)$，则 $2f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)$ 的取值范围是_____.

15．若$(x-2)^n$展开式的二项式系数之和为64，则展开式各项系数和为_____.

16．直线$4kx-4y-k=0$与抛物线$y^2=x$交于A,B两点，若$|AB|=4$，则弦AB的中点到直线$x+\frac{1}{2}=0$的距离等于_____.

三、解答题：共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.（12分）在$\triangle ABC$中，$\angle B=\frac{\pi}{4},\cos C=\frac{\sqrt{5}}{3}$.

（1）求$\cos A$的值；

（2）点D为边BC上的动点（不与C点重合），设$AD=\lambda DC$，求λ的取值范围.

18.（12分）已知点$B(0,-2)$和椭圆$M:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$.直线$l:y=kx+1$与椭圆$M$交于不同的两点$P$，$Q$.

（1）当$k=\frac{1}{2}$时，求$\triangle PBQ$的面积；

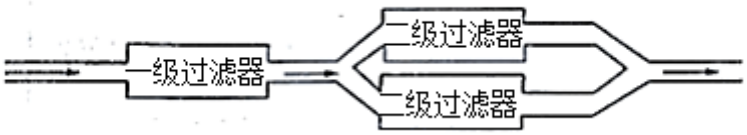
（2）设直线PB与椭圆M的另一个交点为C，当C为PB中点时，求k的值.

19.（12分）设函数$f(x)=1-\frac{1}{\sqrt{x}}$，$g(x)=\ln x$，

（Ⅰ）求曲线$y=f(2x-1)$在点（1,0）处的切线方程；

（Ⅱ）求函数$y=f(x)\cdot g(x)$在区间$[\frac{1}{e},e]$上的取值范围.

20.（12分）某客户准备在家中安装一套净水系统，该系统为二级过滤，使用寿命为十年如图所示两个二级过滤器采用并联安装，再与一级过滤器串联安装.



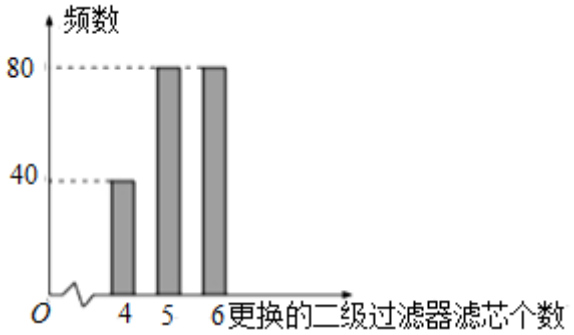
其中每一级过滤都由核心部件滤芯来实现在使用过程中，一级滤芯和二级滤芯都需要不定期更换（每个滤芯是否需要更换相互独立）.若客户在安装净水系统的同时购买滤芯，则一级滤芯每个160元，二级滤芯每个80元.若客户在使用过程中单独购买滤芯则一级滤芯每个400元，二级滤芯每个200元.现需决策安装净水系统的同时购买滤芯的数量，为此参考了根据100套该款净水系统在十年使用期内更换滤芯的相关数据制成的图表，其中表1是根据100个一级过滤器更换的滤芯个数制成的频数分布表，图2是根据200个二级过滤器更换的滤芯个数制成的条形图.

表1：一级滤芯更换频数分布表

一级滤芯更换的个数	8	9

频数	60	40

图 2：二级滤芯更换频数条形图



以 100 个一级过滤器更换滤芯的频率代替 1 个一级过滤器更换滤芯发生的概率，以 200 个二级过滤器更换滤芯的频率代替 1 个二级过滤器更换滤芯发生的概率.

（1）求一套净水系统在使用期内需要更换的各级滤芯总个数恰好为 16 的概率；

（2）记 X 表示该客户的净水系统在使用期内需要更换的二级滤芯总数，求 X 的分布列及数学期望；

（3）记 m,n 分别表示该客户在安装净水系统的同时购买的一级滤芯和二级滤芯的个数.若 $m+n=19$，且 $m\in\{8,9\}$，以该客户的净水系统在使用期内购买各级滤芯所需总费用的期望值为决策依据，试确定 m,n 的值.

21.（12 分）已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $\frac{1}{2a_1-5}+\frac{2}{2a_2-5}+\frac{3}{2a_3-5}+\cdots+\frac{n}{2a_n-5}=\frac{n}{3}$.

（1）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）设数列 $\left\{\frac{1}{a_n a_{n+1}}\right\}$ 的前 n 项和为 T_n，证明：$T_n<\frac{1}{6}$.

22.（10 分）已知函数 $f(x)=1-2\sqrt{3}\sin x\cos x-2\cos^2 x+m$ 在 R 上的最大值为 3.

（1）求 m 的值及函数 $f(x)$ 的单调递增区间；

（2）若锐角 ΔABC 中角 A、B、C 所对的边分别为 a、b、c，且 $f(A)=0$，求 $\frac{b}{c}$ 的取值范围.

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、C

【解析】

求出函数的导函数，当$t>0$时，只需$f(-\ln t)=0$，即$\ln t-\frac{1}{t}+1=0$，令$g(t)=\ln t-\frac{1}{t}+1$，利用导数求其单调区间，即可求出参数t的值，当$t=0$时，根据函数的单调性及零点存在性定理可判断；

【详解】

解：$\because f(x)=te^{2x}+(t-2)e^{x}-x$（$t\geq 0$），

$\therefore f'(x)=2te^{2x}+(t-2)e^{x}-1=\left(te^{x}-1\right)\left(2e^{x}+1\right)$，$\therefore$当$t>0$时，由$f'(x)=0$得$x=-\ln t$，

则$f(x)$在$\left(-\infty,-\ln t\right)$上单调递减，在$\left(-\ln t,+\infty\right)$上单调递增，

所以$f(-\ln t)$是极小值，$\therefore$只需$f(-\ln t)=0$，

即$\ln t-\frac{1}{t}+1=0$.令$g(t)=\ln t-\frac{1}{t}+1$，则$g'(t)=\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}>0$，$\therefore$函数$g(t)$在$(0,+\infty)$上单调递增.$\because g(1)=0$，$\therefore t=1$；

当$t=0$时，$f(x)=-2e^{x}-x$，函数$f(x)$在R上单调递减，$\because f(1)=-2e-1<0$，$f(-2)=2-2e^{-2}>0$，函数$f(x)$在R上有且只有一个零点，$\therefore t$的值是1或0.

故选：C

【点睛】

本题考查利用导数研究函数的零点问题，零点存在性定理的应用，属于中档题.

2、C

【解析】

分析：先求导,再对a分类讨论求函数的单调区间，再画图分析转化对区间$[0,1]$内的任意实数x_1、x_2、x_3，都有$f\left(x_1\right)+f\left(x_2\right)\geq f\left(x_3\right)$，得到关于a的不等式组，再解不等式组得到实数a的取值范围.

详解：由题得$f'(x)=ax-[e^{x}+(x-1)e^{x}]=ax-xe^{x}=x(a-e^{x})$.

当a＜1时，$f'(x)<0$，所以函数f（x）在$[0,1]$单调递减，

因为对区间$[0,1]$内的任意实数x_1、x_2、x_3，都有$f\left(x_1\right)+f\left(x_2\right)\geq f\left(x_3\right)$，

所以$f(1)+f(1)\geq f(0)$，

所以$\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}a\geq 1,$

故a≥1，与a＜1矛盾，故a＜1矛盾.

当 1≤a<e 时，函数 f(x)在[0,lna]单调递增，在(lna,1]单调递减.

所以 $f(x)_{\max}=f(\ln a)=\frac{1}{2}a\ln^2 a-a\ln a+a,$

因为对区间$[0,1]$内的任意实数x_1、x_2、x_3，都有$f(x_1)+f(x_2)\geq f(x_3)$，

所以$f(0)+f(1)\geq f(\ln a)$，

所以$1+\frac{1}{2}a\geq\frac{1}{2}a\ln^2 a-a\ln a+a,$

即$\frac{1}{2}a\ln^2 a-a\ln a+\frac{1}{2}a-1\leq 0$

令$g(a)=\frac{1}{2}a\ln^2 a-a\ln a+\frac{1}{2}a-1,(1\leq a<e)$，

所以$g'(a)=\frac{1}{2}(\ln^2 a-1)<0,$

所以函数 g(a)在（1，e）上单调递减，

所以$g(a)_{\max}=g(1)=-\frac{1}{2}<0$，

所以当 1≤a<e 时，满足题意.

当 a$\geq e$ 时，函数 f(x)在(0,1)单调递增,

因为对区间$[0,1]$内的任意实数x_1、x_2、x_3，都有$f(x_1)+f(x_2)\geq f(x_3)$，

所以$f(0)+f(0)\geq f(1),$

故 1+1$\geq\frac{1}{2}a$，

所以$a\leq 4.$

故$e\leq a\leq 4.$

综上所述，a∈$[1,4]$.

故选 C.

点睛：本题的难点在于“对区间$[0,1]$内的任意实数x_1、x_2、x_3，都有$f(x_1)+f(x_2)\geq f(x_3)$”的转化.由于是函数的问题，所以我们要联想到利用函数的性质（单调性、奇偶性、周期性、对称性、最值、极值等）来分析解答问题.本题就是把这个条件和函数的单调性和最值联系起来，完成了数学问题的等价转化，找到了问题的突破口.

3、B

【解析】

根据题意可得：$\tan\alpha=-2$，所求式子利用二倍角的正弦函数公式化简，再利用同角三角函数间的基本关系弦化切后，将$\tan\alpha=-2$代入计算即可求出值.

【详解】

由于直线 $y=-2x$ 的倾斜角为 α，所以 $\tan\alpha=-2$，

则 $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=\dfrac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=\dfrac{2\tan\alpha}{\tan^2\alpha+1}=\dfrac{-2\times 2}{(-2)^2+1}=-\dfrac{4}{5}$

故答案选 **B**

【点睛】

本题考查二倍角的正弦函数公式，同角三角函数间的基本关系，以及直线倾斜角与斜率之间的关系，熟练掌握公式是解本题的关键.

4、B

【解析】

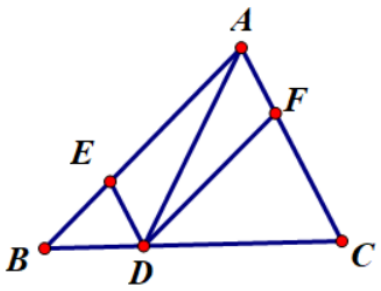
在 AB,AC 上分别取点 E、F，使得 $\overrightarrow{AE}=2\overrightarrow{EB},\overrightarrow{AF}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{FC}$，

可知 $AEDF$ 为平行四边形，从而可得到 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}$，即可得到答案.

【详解】

如下图，$\overrightarrow{BD}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{DC}$，在 AB,AC 上分别取点 E、F，使得 $\overrightarrow{AE}=2\overrightarrow{EB},\overrightarrow{AF}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{FC}$，

则 $AEDF$ 为平行四边形，故 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}$，故答案为 **B.**



【点睛】

本题考查了平面向量的线性运算，考查了学生逻辑推理能力，属于基础题.

5、B

【解析】

先根据角度分析出 $\angle CBE,\angle ACB,\angle DAC$ 的大小，然后根据角度关系得到 AC 的长度，再根据正弦定理计算出 BC 的长度，最后利用余弦定理求解出 AB 的长度即可.

【详解】

由题意可知：$\angle ACB=60°,\angle ADC=67.5°,\angle ACD=45°,\angle BCE=75°,\angle BEC=60°$，

所以 $\angle CBE=180°-75°-60°=45°$，$\angle DAC=180°-67.5°-45°=67.5°$，

所以 $\angle DAC=\angle ADC$，所以 $CA=CD=2\sqrt{6}$，

又因为$\frac{BC}{\sin\angle BEC}=\frac{CE}{\sin\angle CBE}$，所以$BC=2\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{6}$，

所以$AB=\sqrt{AC^2+BC^2-2AC\cdot BC\cdot\cos\angle ACB}=\sqrt{24+6-2\times2\sqrt{6}\times\sqrt{6}\times\frac{1}{2}}=3\sqrt{2}$.

故选：B.

【点睛】

本题考查解三角形中的角度问题，难度一般.理解方向角的概念以及活用正、余弦定理是解答问题的关键.

6、C

【解析】

由题设条件$f\left(x+4\right)=f\left(x\right)$，可得函数的周期是$4$，再结合函数是奇函数的性质将$f\left(3\right)$转化为$f\left(1\right)$函数值，即可得到结论.

【详解】

由题意，$f\left(x+4\right)=f\left(x\right)$，则函数$f\left(x\right)$的周期是$4$，

所以，$f\left(3\right)=f\left(3-4\right)=f\left(-1\right)$，

又函数$f\left(x\right)$为R上的奇函数，且当$x\in\left(0,2\right)$时，$f\left(x\right)=2x^2$，

所以，$f\left(3\right)=f\left(-1\right)=-f\left(1\right)=-2$.

故选：C.

【点睛】

本题考查函数的周期性，由题设得函数的周期是解答本题的关键，属于基础题.

7、C

【解析】

根据“被5除余3且被7除余2的正整数”，可得这些数构成等差数列，然后根据等差数列的前n项和公式，可得结果.

【详解】

被5除余3且被7除余2的正整数构成首项为23，

公差为$5\times7=35$的等差数列，记数列$\left\{a_n\right\}$

则$a_n=23+35\left(n-1\right)=35n-12$

令$a_n=35n-12\le2020$，解得$n\le58\frac{2}{35}$.

故该数列各项之和为$58\times23+\frac{58\times57}{2}\times35=59189$.

故选：*C*.

【点睛】

本题考查等差数列的应用，属基础题。

8、B

【解析】

根据角终边上的点坐标，求得$\sin\alpha,\cos\alpha$，代入二倍角公式即可求得$\sin 2\alpha$的值.

【详解】

因为终边上有一点$P(-3,4)$，所以$\sin\alpha=\frac{4}{5},\cos\alpha=-\frac{3}{5}$，

$\therefore \sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=2\times\frac{4}{5}\times\left(-\frac{3}{5}\right)=-\frac{24}{25}$

故选：B

【点睛】

此题考查二倍角公式，熟练记忆公式即可解决，属于简单题目.

9、D

【解析】

因为角α的终边经过点$(3,-4)$,所以$r=\sqrt{3^2+(-4)^2}=5$,则$\sin\alpha=-\frac{4}{5},\cos\alpha=\frac{3}{5}$,

即$\sin\alpha+\frac{1}{\cos\alpha}=\frac{13}{15}$.故选 ***D***.

10、A

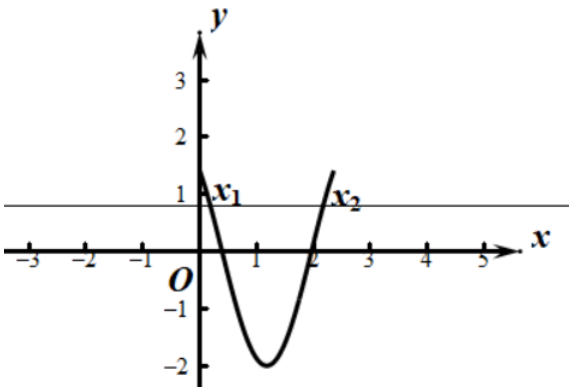
【解析】

画出函数$y=2\sin\left(2x+\frac{3\pi}{4}\right)\left(0<x<\frac{3\pi}{4}\right)$的图像，函数对称轴方程为$x=-\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}$，由图可得$x_1$与$x_2$关于$x=\frac{3\pi}{8}$

对称，即得解.

【详解】

函数$y=2\sin\left(2x+\frac{3\pi}{4}\right)\left(0<x<\frac{3\pi}{4}\right)$的图像如图，



对称轴方程为$2x+\frac{3\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in Z)$，

$\therefore x=-\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}(k\in Z)$，

又$Q\,0<x<\frac{3\pi}{4},\therefore x=\frac{3\pi}{8}$，

由图可得x_1与x_2关于$x=\frac{3\pi}{8}$对称，

$\therefore x_1+x_2=2\times\frac{3\pi}{8}=\frac{3\pi}{4}$

故选：A

【点睛】

本题考查了正弦型函数的对称性，考查了学生综合分析，数形结合，数学运算的能力，属于中档题.

11、C

【解析】

先求出$\vec{a}-\vec{c}=(1-n,4)$，再由$(\vec{a}-\vec{c})\perp\vec{b}$，利用向量数量积等于0，从而求得$n$.

【详解】

由题可知$\vec{a}-\vec{c}=(1-n,4)$，

因为$(\vec{a}-\vec{c})\perp\vec{b}$，所以有$(1-n)\times2+2\times4=0$，得$n=5$，

故选：C.

【点睛】

该题考查的是有关向量的问题，涉及到的知识点有向量的减法坐标运算公式，向量垂直的坐标表示，属于基础题目.

12、A

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：https://d.book118.com/615130040343011133