上海市七宝中学2023-2024学年高三下学期三模数学试题

学校:___________姓名：___________班级：___________考号：___________

一、填空题

1．已知集合$M=\{x\mid x+2\geq 0\}$，$N=\{x\mid x-1<0\}$，则$M\cap N=$___.

2．已知复数$z=i(2+3i)$（i为虚数单位），则z的实部为___.

3．函数$y=\tan(-x+\frac{\pi}{6})$的最小正周期为___.

4．记样本数据10，18，8，4，16，24，6，8，32的中位数为a，平均数为b，则$a-b$=___.

5．若$\left(x+\frac{1}{x}\right)^n$的二项展开式中第$3$项与第$5$项的系数相等，则该展开式中$\frac{1}{x^4}$的系数为___.

6．已知函数$f\left(x\right)=\begin{cases}3^x,x\geq 1\\3^{-x},x<1\end{cases}$，则$f\left(\log_3 2\right)$的值为____

7．数列$\{a_n\}$满足$a_{n+2}-a_n=2$，若$a_1=1$，$a_4=4$，则数列$\{a_n\}$的前20项的和为___.

8．已知数列$\{a_n\}$满足$a_n<a_{n+1}$，点$P_n(2n+1,a_n)$在双曲线$\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{6}=1$上，则$\lim\limits_{n\to+\infty}\left|P_nP_{n+1}\right|=$____.

9．两本相同的图画书和两本不同的音乐书全部分给三个小朋友，每人至少一本，且两本图画书不分给同一个小朋友，则不同的分法共有___种.

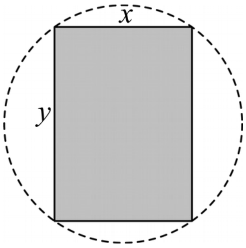
10．用$f\left(X,\Gamma\right)$表示点X与曲线Γ上任意一点距离的最小值．已知$\odot O:x^2+y^2=1$及

$\odot O_1:\left(x-4\right)^2+y^2=4$，设$P$为$\odot O$上的动点，则$f\left(P,\odot O_1\right)$的最大值为___.

11．中国古代建筑的主要受力构件是梁，其截面的基本形式是矩形．如图，将一根截面为圆形的木材加工制成截面为矩形的梁，设与承载重力的方向垂直的宽度为x，与承载重力

的方向平行的高度为y，记矩形截面抵抗矩$W=\frac{1}{6}xy^2$．根据力学原理，截面抵抗矩越大，

梁的抗弯曲能力越强，则宽x与高y的最佳之比应为____．



12．空间中$A、B$两点间的距离为8，设$\triangle P_1P_2P_3$的面积为S，令$\lambda_i=|\overrightarrow{P_iA}\cdot\overrightarrow{P_iB}|$，若$\sum_{i=1}^{3}2^{\lambda_i}=3$，

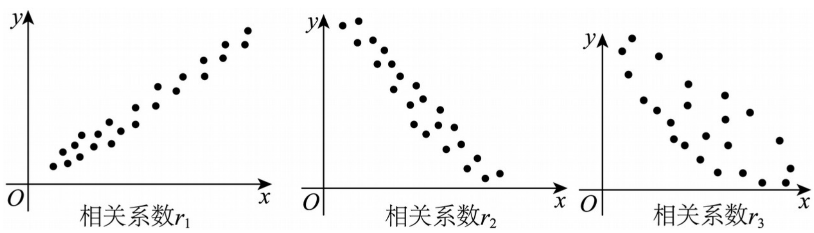
则S的取值范围为____．

二、单选题

13．已知$a<b<0$，那么下列不等式成立的是（　）

A．$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$　　B．$ab<b^2$　　C．$\frac{b}{a}>\frac{a}{b}$　　D．$\frac{a+b}{b}>1$

14．上海百联集团对旗下若干门店的营业额与三个影响因素分别作了相关性分析，绘制了如下的散点图，则下述大小关系正确的为（　）．



A．$r_1>r_2>r_3$　　B．$r_2>r_3>r_1$　　C．$r_1>r_3>r_2$　　D．$r_3>r_2>r_1$

15．已知函数$f(x)=x^2+2\ln x$的图像在$A(x_1,f(x_1))$，$B(x_2,f(x_2))$两个不同点处的切线相互平行，则下面等式可能成立的是（　）

A．$x_1+x_2=2$　　B．$x_1+x_2=\frac{10}{3}$　　C．$x_1x_2=2$　　D．$x_1x_2=\frac{10}{3}$

16．已知OA是圆柱OO_1下底面的一条半径，$OA=1$，$OO_1=10$，P为该圆柱侧面上一动点，PB垂直下底面于点B，若$\boldsymbol{PB=\angle AOB}$，则对于下述结论：①动点$P$的轨迹为椭圆；②动点$P$的轨迹长度为$2\sqrt{2}\pi$；以下说法正确的为（　　）．

A．①②都正确　　B．①正确，②错误

C．①错误，②正确　　D．①②都错误

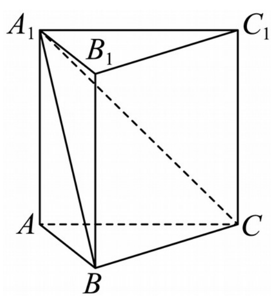
三、解答题

17．已知$\triangle ABC$的内角A，B，C的对边分别为a，b，c，且$\sqrt{3}a=2c\sin A$．

(1)求$\sin C$的值；

(2)若$c=3$，求$\triangle ABC$面积S的最大值.

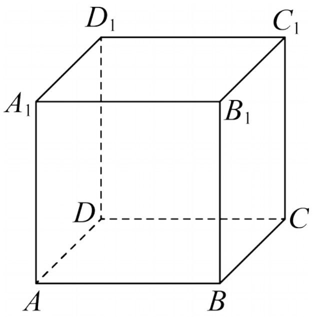
18．如图，在三棱柱ABC－$A_1B_1C_1$中，平面$ACC_1A_1\perp$平面ABC，$AB\perp BC$，四边形ACC_1A_1是边长为2的正方形.



(1)证明：$BC\perp$平面ABB_1A_1；

(2)若直线A_1C与平面ABB_1A_1所成的角为30°，求二面角$B-A_1C-A$的余弦值.

19．如图，已知正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$顶点处有一质点Q，点Q每次会随机地沿一条棱向相邻的某个顶点移动，且向每个顶点移动的概率相同，从一个顶点沿一条棱移动到相邻顶点称为移动一次，若质点Q的初始位置位于点A处，记点Q移动n次后仍在底面$ABCD$上的概率为P_n．



(1)求P_2；

(2)证明：数列$\left\{P_n-\frac{1}{2}\right\}$是等比数列；若$P_n>\frac{1013}{2024}$，求$n$的最大值．

20．将离心率相等的所有椭圆称为“一簇椭圆系”．已知椭圆$E:\frac{x^2}{2}+y^2=1$的左、右顶点分别为A,B，上顶点为D．

(1)若椭圆$F:\frac{x^2}{s}+\frac{y^2}{2}=1$与椭圆$E$在“一簇椭圆系”中，求常数$s$的值；

(2)设椭圆$G:\frac{x^2}{2}+y^2=\lambda(0<\lambda<1)$，过A作斜率为$k_1$的直线$l_1$与椭圆$G$有且只有一个公共点，过$D$作斜率为$k_2$的直线$l_2$与椭圆$G$有且只有一个公共点，求当$\lambda$为何值时，$|k_1|+|k_2|$取得最小值，并求其最小值；

(3)若椭圆$H:\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{t}=1(t>2)$与椭圆$E$在“一簇椭圆系”中，椭圆$H$上的任意一点记为$C\left(x_0,y_0\right)$，试判断$\triangle ABC$的垂心$M$是否都在椭圆$E$上，并说明理由．

21．设$t>0$，函数$y=f(x)$的定义域为R．若对满足$\boldsymbol{x_2-x_1>t}$的任意x_1、x_2，均有$\boldsymbol{f(x_2)-f(x_1)>t}$，则称函数$y=f(x)$具有“$P(t)$性质”．

(1)在下述条件下，分别判断函数$y=f(x)$是否具有$P(2)$性质，并说明理由；

①$f(x)=\frac{3}{2}x$；　②$\boldsymbol{f(x)=10\sin 2x}$；

(2)已知$f(x)=ax^3$，且函数$y=f(x)$具有$P(1)$性质，求实数a的取值范围；

(3)证明：“函数$y=f(x)-x$为增函数”是“对任意$t>0$，函数$y=f(x)$均具有$P(t)$性质”的充要条件．

参考答案：

1．$\{x|-2\le x<1\}$

【分析】求出集合M、N，再根据交集的定义可得.

【详解】由题意，$M=\{x|x\ge -2\}$，$N=\{x|x<1\}$，

$\therefore M\cap N=\{x|-2\le x<1\}$.

故答案为：$\{x|-2\le x<1\}$

2．-3

【分析】利用复数的运算法则，化简为$a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathrm{R})$的形式，即$a$为实部.

【详解】$z=\mathrm{i}(2+3\mathrm{i})=2\mathrm{i}+3\mathrm{i}^2=-3+2\mathrm{i}$.

所以复数的实部为-3.

故答案为：-3

3．π

【分析】利用函数$y=\tan(\omega x+\varphi)$的最小正周期计算公式即可求解.

【详解】因为$y=\tan x$的最小正周期为π，

所以函数$y=\tan(\omega x+\varphi)$的最小正周期为$\frac{\pi}{|\omega|}$，

所以函数$y=\tan(-x+\frac{\pi}{6})$的最小正周期为$\frac{\pi}{|-1|}=\pi$，

故答案为：π.

4．-4

【分析】先将样本数据按从小到大进行排列，再根据样本数据的中位数、平均数概念和公式进行计算即可.

【详解】将样本数据按从小到大的顺序排列，得4，6，8，8，10，16，18，24，32，

所以中位数$a=10$，

由平均数的计算公式得$b=\frac{1}{9}\left(4+6+8+8+10+16+18+24+32\right)=14$，

所以$a-b=10-14=-4$.

故答案为：-4.

5．6

【分析】求得二项式的展开式的通项公式，由题意可得$C_n^2=C_n^4$，可求得$n=6$，可求$\frac{1}{x^4}$项的系数.

【详解】$\left(x+\frac{1}{x}\right)^n$的展开式为$T_{r+1}=C_n^r\cdot x^{n-r}\cdot(\frac{1}{x})^r=C_n^r\cdot x^{n-2r}$，$r=0,1,\cdots,n$，

因为二项展开式中第3项与第5项的系数相等，

所以$C_n^2=C_n^4$，所以$n=6$，

令$6-2r=-4$，解得$r=5$，

所以该展开式中的$\frac{1}{x^4}$系数为$C_6^5=6$.

故答案为：6.

6．$\frac{1}{2}$/0.5

【分析】根据题意，结合指数幂与对数的运算法则，准确计算，即可求解.

【详解】由函数 $f\left(x\right)=\begin{cases}3^{x},x\geq 1\\3^{-x},x<1\end{cases}$，因为 $0<\log_3 2<1$，所以 $f\left(\log_3 2\right)=3^{-\log_3 2}=3^{\log_3 2^{-1}}=\frac{1}{2}$.

故答案为：$\frac{1}{2}$.

7．210

【分析】数列 $\left\{a_n\right\}$ 的奇数项、偶数项都是等差数列，结合等差数列求和公式、分组求和法即可得解.

【详解】数列 $\left\{a_n\right\}$ 满足 $a_{n+2}-a_n=2$，若 $a_1=1$，$a_4=4$，则 $a_2=a_4-2=4-2=2$，

所以数列 $\left\{a_n\right\}$ 的奇数项、偶数项分别构成以 1，2 为首项，公差均为 2 的等差数列

所以数列 $\left\{a_n\right\}$ 的前 20 项的和为 $a_1+a_2+\cdots+a_{20}=\left(a_1+a_3+\cdots+a_{19}\right)+\left(a_2+a_4+\cdots+a_{20}\right)$

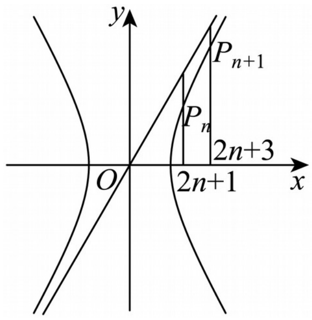
$=10\times 1+\frac{10\times 9}{2}\times 2+10\times 2+\frac{10\times 9}{2}\times 2=210$.

故答案为：210.

8．4

【分析】根据向量法，当 $n\to+\infty$ 时，$\overline{P_nP_{n+1}}$ 与渐近线平行，且 $\overline{P_nP_{n+1}}$ 在 x 轴的投影为 2，渐近线倾斜角为 $\alpha=60^{\circ}$，则 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|P_nP_{n+1}\right|=\frac{2}{\cos\alpha}$，即可求出.

【详解】作出示意图如图所示：



当$n\to+\infty$时，$\overline{P_nP_{n+1}}$与渐近线平行，$\overline{P_nP_{n+1}}$在x轴的投影为2，

不妨取渐近线$y=\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}}x=\sqrt{3}x$，令其倾斜角为$\alpha$，则$\tan\alpha=\sqrt{3}$，

所以$\alpha=60^\circ$，所以$\lim\limits_{n\to+\infty}\left|P_nP_{n+1}\right|=\dfrac{2}{\cos\alpha}=\dfrac{2}{\cos60^\circ}=4$.

故答案为：4.

9．15

【分析】按照分组的结果分类讨论，利用分类加法原理求解即可.

【详解】不妨记两本相同的图书为元素$1,1$，两本不同的音乐书为元素$3,4$，根据题意，分类讨论：

若分组情况为$13,1,4$时，此时分配给三个小朋友的方法有$\mathrm{A}_3^3=6$种情况；

若分组情况为$14,1,3$时，此时分配给三个小朋友的方法有$\mathrm{A}_3^3=6$种情况；

若分组情况为$34,1,1$时，此时分配给三个小朋友的方法有$\mathrm{C}_3^1=3$种情况；

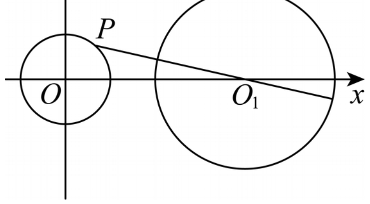
综上，不同的分法共有$6+6+3=15$种.

故答案为：15

10．3

【分析】由圆心距与半径的关系可得到两圆相离，再由题意与圆的知识即可求解.

【详解】如图所示，



$\odot O:x^2+y^2=1$ 得到圆心 $O(0,0),r_1=1$；

$\odot O_1:\left(x-4\right)^2+y^2=4$得到圆心$O_1(4,0),r_2=2$；

由于$|OO_1|=4>r_1+r_2$，所以两圆相离，因为P为$\odot O$上的动点，$f\left(P,\odot O_1\right)=\left|PO_1\right|-2$，

所以要使$f\left(P,\odot O_1\right)$取得最大值，只需$|PO_1|$最大即可，

因为$|PO_1|_{\max}=|OO_1|+1=5$，则$f\left(P,\odot O_1\right)$的最大值为$3$.

故答案为：3.

11．$\dfrac{\sqrt{2}}{2}/\dfrac{1}{2}\sqrt{2}$

【分析】根据题意可知$W=\dfrac{1}{6}x\left(d^2-x^2\right)=\dfrac{1}{6}\left(-x^3+d^2x\right),0<x<d$，利用导数判断单调性和最值，进而可得结果.

【详解】设圆的直径为d， 则$x^2+y^2=d^2$，即$y^2=d^2-x^2$，

由题意可得：$W=\dfrac{1}{6}x\left(d^2-x^2\right)=\dfrac{1}{6}\left(-x^3+d^2x\right),0<x<d$，则$W'=\dfrac{1}{6}\left(-3x^2+d^2\right)=0$，

令$W'>0$时， 解得$0<x<\dfrac{\sqrt{3}}{3}d$；令$W'<0$时， 解得$d>x>\dfrac{\sqrt{3}}{3}d$；

可知W在$\left(0,\dfrac{\sqrt{3}}{3}d\right)$单调递增， 在$\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}d,d\right)$单调递减，则$x=\dfrac{\sqrt{3}}{3}d$时，$W$取最大值.

此时$y=\sqrt{d^2-\dfrac{1}{3}d^2}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}d$． 所以$\boldsymbol{\dfrac{x}{y}=\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{3}d}{\frac{\sqrt{6}d}{3}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}}$.

故答案为：$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

12．$\left(0,12\sqrt{3}\right]$

【分析】根据公式$\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{1}{4}\left[\left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2-\left(\vec{a}-\vec{b}\right)^2\right]$对向量进行处理，再结合不等式得出

$\left|\overrightarrow{P_1M}^2-16\right|+\left|\overrightarrow{P_2M}^2-16\right|+\left|\overrightarrow{P_3M}^2-16\right|=0$，即可推出点$P_1,P_2,P_3$在以$M$为球心4为半径的球面上，从可求得答案.

【详解】由题意可知$\lambda_i=\left|\overrightarrow{P_iA}\cdot\overrightarrow{P_iB}\right|=\left|\frac{1}{4}\left[(\overrightarrow{P_iA}+\overrightarrow{P_iB})^2-(\overrightarrow{P_iA}-\overrightarrow{P_iB})^2\right]\right|$，

设A,B中点为M，则$\overrightarrow{P_iA}+\overrightarrow{P_iB}=2\overrightarrow{P_iM}$，$\overrightarrow{P_iA}-\overrightarrow{P_iB}=\overrightarrow{BA}$，

所以$\lambda_i=\left|\frac{1}{4}\left[(2\overrightarrow{P_iM})^2-\overrightarrow{BA}^2\right]\right|=\left|\overrightarrow{P_iM}^2-16\right|$，

由$\sum_{i=1}^{3}2^{\lambda_i}=3$，得$2^{\lambda_1}+2^{\lambda_2}+2^{\lambda_3}=3$，则$3=2^{\lambda_1}+2^{\lambda_2}+2^{\lambda_3}\geq 3\sqrt[3]{2^{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}}$，

当且仅当$2^{\lambda_1}=2^{\lambda_2}=2^{\lambda_3}$时等号成立，则$2^{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}\leq 1$，

即$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3\leq 0$，即$\left|\overrightarrow{P_1M}^2-16\right|+\left|\overrightarrow{P_2M}^2-16\right|+\left|\overrightarrow{P_3M}^2-16\right|\leq 0$，

则$\left|\overrightarrow{P_1M}^2-16\right|+\left|\overrightarrow{P_2M}^2-16\right|+\left|\overrightarrow{P_3M}^2-16\right|=0$，即$\overrightarrow{P_iM}^2=16,\left|\overrightarrow{P_iM}\right|=4$，

即点P_1,P_2,P_3在以M为球心4为半径的球面上，

先说明圆的内接三角形为正三角形时，面积最大；

设$\triangle ABC$为半径为r的圆的内接三角形，

则$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\cdot 2r\sin A\cdot 2r\sin B\cdot\sin C=2r^2\sin A\sin B\sin C$

$\le 2r^2\left(\dfrac{\sin A+\sin B+\sin C}{3}\right)^3$，当且仅当$\sin A=\sin B=\sin C$时等号成立，

即$\triangle ABC$为正三角形时，其面积取到最大值$\dfrac{3\sqrt{3}}{4}r^2$，

由于点P_1,P_2,P_3在以M为球心4为半径的球面上，故$\triangle P_1P_2P_3$的面积S可以无限小，

$S_{\max}=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}\times 16=12\sqrt{3}$，

即S的取值范围为$\left(0,12\sqrt{3}\right]$，

故答案为：$\left(0,12\sqrt{3}\right]$.

【点睛】关键点睛：解答本题的关键要利用$\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{1}{4}\left[(\vec{a}+\vec{b})^2-(\vec{a}-\vec{b})^2\right]$以及均值不等式推出

$\left|\overrightarrow{P_1M}^2-16\right|+\left|\overrightarrow{P_2M}^2-16\right|+\left|\overrightarrow{P_3M}^2-16\right|=0$，从而推出点$P_1,P_2,P_3$在以$M$为球心4为半径的球面，

即可求解.

13．D

【分析】利用特值或不等式的性质可得答案.

【详解】对于A，$-2<-1<0$，而$-\dfrac{1}{2}>-1$，A不成立；

对于B，$-2<-1<0$，而$(-2)\times(-1)>(-1)^2$，B不成立；

对于C，$\dfrac{b}{a}-\dfrac{a}{b}=\dfrac{b^2-a^2}{ab}$，因为$a<b<0$，所以$ab>0,a^2>b^2$，$\dfrac{b}{a}-\dfrac{a}{b}<0$，即$\dfrac{b}{a}<\dfrac{a}{b}$，C不成立；