

专题 5.4 分式方程及应用（知识解读）

【学习目标】

1. 了解解分式方程的基本思路和解法.
2. 掌握可化为一元一次方程的分式方程的解法.
3. 体会解分式方程过程中的化归思想.
4. 结合利用分式方程解决实际问题的实例, 进一步体会方程是刻画实际问题数量关系的一种重要数学模型

【知识点梳理】

考点 1: 分式方程的概念

分母中含有未知数的方程叫分式方程.

注意:

- (1) 分式方程的重要特征: ①是等式; ②方程里含有分母; ③分母中含有未知数.
- (2) 分式方程和整式方程的区别就在于分母中是否有未知数 (不是一般的字母系数).
分母中含有未知数的方程是分式方程, 分母中不含有未知数的方程是整式方程.
- (3) 分式方程和整式方程的联系: 分式方程可以转化为整式方程.

考点 2: 分式方程的解法

解分式方程的一般步骤:

- (1) 方程两边都乘以最简公分母, 去掉分母, 化成整式方程 (注意: 当分母是多项式时, 先分解因式, 再找出最简公分母);
- (2) 解这个整式方程, 求出整式方程的解;
- (3) 检验: 将求得的解代入最简公分母, 若最简公分母不等于 0, 则这个解是原分式方程的解, 若最简公分母等于 0, 则这个解不是原分式方程的解, 原分式方程无解.

考点 3: 分式方程应用

类型一: 工程问题

类型二: 行程问题

类型三: 销售问题

类型四: 方案问题

【典例分析】

【考点1 分式方程定义】

【典例1】（2023春•方城县期中）给出下列方程： $\frac{x-3}{4}=1$ ， $x^2-4=0$ ， $\frac{x}{3}-\frac{x}{2}=1$ ，其中分式方程的个数是（ ）

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

【变式1-1】（2023秋•鱼台县期末）下列方程中不是分式方程的是（ ）

- A. $\frac{1}{x} = \frac{3}{x-1}$
B. $\frac{x}{x-1} = \frac{2}{x^2-1}$
C. $\frac{1}{x} = \frac{3}{x-1}$
D. $\frac{x}{x-1} = \frac{2}{x^2-1}$

【变式1-2】（2023秋•西峰区期末）下列关于 x 的方程是分式方程的是（ ）

- A. $\frac{2+x}{5} = \frac{3+x}{6}$ B. $\frac{x}{2} - 3 = \frac{x}{3}$ C. $\frac{x-1}{7+x} = 3$ D. $\frac{3}{5}x = 1$

【变式1-3】（2023秋•南岗区期末）下列方程中，是分式方程的是（ ）

- A. $\frac{1}{3} + \frac{x}{2} = 1$ B. $x + \frac{1}{x} = 2$ C. $2x = x - 5$ D. $x - 4y = 1$

【考点2 解分式方程】

【典例2】（2023春•雁塔区校级期末）解方程：

(1) $\frac{4x}{x-2} - 1 = \frac{3}{2-x}$; (2) $x^2 - 4 = 0$.

【变式2-1】（2023春•淮安期末）解分式方程： $\frac{2-x}{x-3} + 3 = -\frac{1}{x-3}$.

【变式2-2】（2023春•洪泽区期末）解方程： $-\frac{5}{x} = 1$.

【变式 2-3】（2023 春•海州区期末）解分式方程：

$$(1) \frac{2}{x-3} = \frac{3}{3x-1};$$

$$(2) \frac{x+1}{x-1} + \frac{4}{1-x^2} = 1.$$

【变式 2-4】（2023 春•溧阳市期末）解下列分式方程：

$$(1) \frac{3-x}{4+x} = \frac{1}{2};$$

$$(2) \frac{2x-5}{x-2} = \frac{3x-7}{x-2} - 3;$$

$$(3) \frac{x^2}{x^2-4} - \frac{x}{2-x} = 2;$$

$$(4) \frac{3}{x+3} + \frac{2x}{x^2-9} = \frac{1}{x-3}.$$

【考点 3 分式方程应用类型】

类型一 工程问题

【典例 3】（2023 春•闵行区校级期末）某工程队承担了修建地铁两个站点间 2400 米的隧道工程任务，由于采用了新技术，现在每个月比原计划多掘进了 180 米，因而比原计划提前 3 个月完成任务。

（1）求完成此项工程原计划每个月掘进多少米？

（2）如果每天的施工费用为 2.5 万元，那么该工程队现在完成此项工程共需多少万元？

（每个月按 30 天算）

【变式 3-1】（2023 春•涟水县期末）某校为美化校园环境，计划对面积为 $1200m^2$ 的区域进行绿化，现安排甲、乙两个工程队来完成。已知甲队每天能完成绿化的面积是乙队每天能完成绿化的面积的 1.5 倍，并且在独立完成面积为 $360m^2$ 区域的绿化时，甲队比乙队少用 2 天。求甲、乙两工程队每天能绿化的面积分别是多少 m^2 ？

【变式 3-2】（2023 春•瑶海区期末）某建工集团下有甲、乙两个工程队，现中标承建一段公路，若甲、乙两工程队合做 20 天可完成；若让两队合做 15 天后，剩下的工程由甲队独做，还需 15 天才能完成.

(1) 甲、乙两工程队单独完成此项工程各需要多少天？

(2) 如果甲工程队施工每天需付施工费 10000 元，乙工程队施工每天需付施工费 26000 元，此项工程若由甲工程队先独做若干天后，乙工程队再加入共同完成剩下的工程，则甲工程队至少要独做多少天，才能使施工费不超过 680000 元？

【变式 3-3】（2023•桂林模拟）为了进一步丰富市民的休闲生活，某区政府决定在漓江沿岸扩建 5400 米绿道并进行招标，根据招标结果，该工程由甲、乙两个工程队参与建设. 已知：甲工程队每天完成的工程量是乙队的 1.2 倍，甲队单独完成工程比乙队单独完成少用 10 天.

(1) 求乙队每天能完成多少米？

(2) 若甲、乙两个工程队合作 20 天后，剩余工程由乙工程队单独完成，求乙工程队还需多少天？

类型二 行程问题

【典例 4】（2023•北碚区校级开学）小李从 A 地出发去相距 4.5 千米的 B 地上班，他每天出发的时间都相同. 第一天步行去上班结果迟到了 5 分钟. 第二天骑自行车去上班结果早到 10 分钟. 已知骑自行车的速度是步行速度的 1.5 倍.

(1) 求小李步行的速度和骑自行车的速度；

(2) 有一天小李骑自行车出发，出发 1.5 千米后自行车发生故障，小李立即跑步去上班（耽误时间忽略不计）为了至少提前 5 分钟到达，则跑步的速度至少为多少千米每小时？

【变式 4-1】（2023 秋•安丘市期末）星期天，小明和小芳从同一小区门口同时出发，沿同一路线去离该小区 1800 米的少年宫参加活动，为响应“节能环保，绿色出行”的号召，两人都步行，已知小明的速度是小芳的速度的 1.2 倍，结果小明比小芳早 6 分钟到达，求小芳的速度.

2. （2012•山西模拟）列方程或方程组解应用题：

为响应低碳号召，肖老师上班的交通方式由自驾车改为骑自行车，肖老师家距学校 15 千米，因为自驾车的速度是骑自行车速度的 4 倍，所以肖老师每天比原来早出发 45 分钟，才能按原时间到校，求肖老师骑自行车每小时走多少千米.

【变式 4-2】（2023•扬州模拟）近年来，我市大力发展城市快速交通，小王开车从家到单位有两条路线可选择，路线 A 为全程 25km 的普通道路，路线 B 包含快速通道，全程 30km ，走路线 B 比走路线 A 平均速度提高 50%，时间节省 6min ，求走路线 B 的平均速度.

类型三：销售问题

【典例 5】（泰安）某服装店购进一批甲、乙两种款型时尚 T 恤衫，甲种款型共用了 7800 元，乙种款型共用了 6400 元，甲种款型的件数是乙种款型件数的 1.5 倍，甲种款型每件的进价比乙种款型每件的进价少 30 元.

（1）甲、乙两种款型的 T 恤衫各购进多少件？

（2）商店进价提高 60% 标价销售，销售一段时间后，甲款型全部售完，乙款型剩余一半，商店决定对乙款型按标价的五折降价销售，很快全部售完，求售完这批 T 恤衫商店共获利多少元？

【变式 5-1】（2023 春•田东县期末）“芒果正宗，源自田东”。田东的桂七芒果，皮薄肉细，多汁香甜、营养丰富、品质上乘，被誉为“果中一绝，果之上品”。现某芒果园有甲、乙两支专业采摘队，已知甲队比乙队每天多采摘 600 公斤芒果，甲队采摘 28800 公斤芒果所用的天数与乙队采摘 19200 公斤芒果所用的天数相同。问甲、乙两队每天分别可采摘芒果多少公斤？

【变式 5-2】（2023 春•锦州期末）2022 年北京冬奥会的吉祥物“冰墩墩”以其呆萌可爱、英姿飒爽形象，深受大家喜爱。某商店第一次用 3600 元购进一批“冰墩墩”玩具，很快售完；该商店第二次购进该“冰墩墩”玩具时，进价提高了 20%，同样用 3600 元购进的玩具数量比第一次少了 10 件。

（1）求第一次购进的“冰墩墩”玩具每件的进价是多少元；

（2）若两次购进的“冰墩墩”玩具每件售价均为 80 元，求该商店两次购进的“冰墩墩”玩具全部售完的总利润是多少元？

【变式 5-3】（2023 春•大观区校级期末）某商场准备购进甲、乙两种商品进行销售，若每个甲商品的进价比每个乙商品的进价少 2 元，且用 80 元购进甲商品的数量与用 100 元购进乙商品的数量相同。

（1）求每个甲、乙两种商品的进价分别是多少元？

（2）若该商场购进甲商品的数量比乙商品的数量的 3 倍还少 5 个，且购进甲、乙两种商品的总数量不超过 95 个，则商场最多购进乙商品多少个？

类型四 方案问题

【典例 6】（2023 春•桐城市期末）某社区准备建造 A 、 B 两类摊位共 80 个，每个 A 类摊位的占地面积比每个 B 类摊位的占地面积多 2 平方米，建 A 类摊位每平方米的费用为 40 元，建 B 类摊位每平方米的费用为 30 元，用 60 平方米建 A 类摊位的个数恰好是用同样面积建 B 类摊位个数的 $\frac{3}{4}$ 。

（1）求每个 B 类摊位占地面积。

（2）要求建 A 类摊位的数量不少于 26 个，且建造两类摊位的总费用不超过 18320 元。

①共有哪几种建造方案？

②最少费用是 ____ 元。

【变式 6-1】（2023 秋•德江县期中）为了提高产品的附加值，某公司计划将研发生产的 1200 件新产品进行精加工后再投放市场。现有甲、乙两个工厂都具备加工能力，公司派出相关人员分别到这两间工厂了解情况，获得如下信息：

信息一：甲工厂单独加工完成这批产品比乙工厂单独加工完成这批产品多用 10 天；

信息二：乙工厂每天加工的数量是甲工厂每天加工数量的 1.5 倍。

根据以上信息，求甲、乙两个工厂每天分别能加工多少件新产品？

【变式 6-2】（2023•龙马潭区模拟）某商场计划购进一批甲、乙两种玩具，已知一件甲种玩具的进价与一件乙种玩具的进价的和为 40 元，用 90 元购进甲种玩具的件数与用 150 元购进乙种玩具的件数相同。

（1）求每件甲种、乙种玩具的进价分别是多少元？

（2）商场计划购进甲、乙两种玩具共 48 件，其中甲种玩具的件数少于乙种玩具的件数，商场决定此次进货的总资金不超过 1000 元，求商场共有几种进货方案？

【变式 6-3】（2023•龙门县模拟）为了创建全国卫生城市，某社区要清理一个卫生死角内的垃圾，租用甲、乙两车运送，两车各运 12 趟可完成，需支付运费 4800 元．已知甲、乙两车单独运完此堆垃圾，乙车所运趟数是甲车的 2 倍，且乙车每趟运费比甲车少 200 元．

- （1）求甲、乙两车单独运完此堆垃圾各需运多少趟？
- （2）若单独租用一台车，租用哪台车合算？

【变式 6-4】（2023 春•花都区校级月考）学校计划选购甲、乙两种图书作为“校园读书节”的奖品．已知甲图书的单价是乙图书单价的 1.5 倍，用 600 元单独购买甲种图书比单独购买乙种图书要少 10 本．

- （1）甲、乙两种图书的单价分别为多少元？
- （2）若学校计划购买这两种图书共 40 本，且投入的经费不超过 1050 元，要使购买的甲种图书数量不少于乙种图书的数量，则共有几种购买方案？

专题 5.4 分式方程及应用（知识解读）

【学习目标】

1. 了解解分式方程的基本思路和解法.
2. 掌握可化为一元一次方程的分式方程的解法.
3. 体会解分式方程过程中的化归思想.
4. 结合利用分式方程解决实际问题的实例, 进一步体会方程是刻画实际问题数量关系的一种重要数学模型

【知识点梳理】

考点 1: 分式方程的概念

分母中含有未知数的方程叫分式方程.

注意:

- (1) 分式方程的重要特征: ①是等式; ②方程里含有分母; ③分母中含有未知数.
- (2) 分式方程和整式方程的区别就在于分母中是否有未知数 (不是一般的字母系数).
分母中含有未知数的方程是分式方程, 分母中不含有未知数的方程是整式方程.
- (3) 分式方程和整式方程的联系: 分式方程可以转化为整式方程.

考点 2: 分式方程的解法

解分式方程的一般步骤:

- (1) 方程两边都乘以最简公分母, 去掉分母, 化成整式方程 (注意: 当分母是多项式时, 先分解因式, 再找出最简公分母);
- (2) 解这个整式方程, 求出整式方程的解;
- (3) 检验: 将求得的解代入最简公分母, 若最简公分母不等于 0, 则这个解是原分式方程的解, 若最简公分母等于 0, 则这个解不是原分式方程的解, 原分式方程无解.

考点 3: 分式方程应用

类型一: 工程问题

类型二: 行程问题

类型三: 销售问题

类型四: 方案问题

【典例分析】

【考点 1 分式方程定义】

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。
如要下载或阅读全文，请访问：

<https://d.book118.com/615210234100011221>