# 2016 年考研数学重点题型

## 一、高等数学（微积分）部分

### 题型 1、求函数未定式的极限

评注：Ⅰ“$\frac{0}{0}$”型未定式——常用方法洛比达法则，解题时注意下列事项：

① 在使用洛必达法则前应先“四化”（特别是简化）；

② 当 $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\(x\to x_0)}}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 不存在（或非$\infty$）时，不能推出 $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\(x\to x_0)}}\frac{f(x)}{g(x)}$ 不存在；

③ 当$x\to\infty$时，若式子中含有$\cos x,\sin x$（或$x\to 0$时， 式子中含有$\cos\frac{1}{x},\sin\frac{1}{x}$）则不宜使用洛必达法则；

Ⅱ“$\infty-\infty$” 型未定式解题思路：

①当极限的式子中含有分母时,进行通分将其化为“$\frac{0}{0}$”或“$\frac{\infty}{\infty}$”型未定式；

②当极限的式子中不含分母但含有根式时,将无理式有理化化为“$\frac{\infty}{\infty}$”型未定式；

③当极限的式子中既不含有分母又没出现根式时,利用倒代换将其化为“$\frac{0}{0}$”或“$\frac{\infty}{\infty}$”型未定式.

Ⅲ 洛必达法则失效的未定式一般应利用极限的四则运算法则完成。

例 1、求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^4\sin\frac{1}{x}+e^{x^3}-1}{\ln(1+\sin x-\tan x)}$

解：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^4\sin\frac{1}{x}+e^{x^3}-1}{\ln(1+\sin x-\tan x)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^4\sin\frac{1}{x}+e^{x^3}-1}{(\sin x-\tan x)}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^4\sin\frac{1}{x}+e^{x^3}-1}{(\cos x-1)\tan x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^4\sin\frac{1}{x}+e^{x^3}-1}{(-\frac{1}{2}x^2)\cdot x}$$

$$=-2\lim_{x\to 0}\frac{x^4\sin\frac{1}{x}}{x^3}-2\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^3}-1}{x^3}=-2$$

### 题型 2、已知无穷小比较的结论，求待定参数

评注：一般方法的解题思路：

① 利用无穷小比较的定义将已知条件转化为极限的逆问题；

② 利用极限逆问题确定参数.

注：此类题有时利用带皮亚诺余项的泰勒公式求解比较简单，但要熟记五个常用函数的麦克劳林公式

例 2、设当 $x\to 0$ 时， $f(x)=e^x-\dfrac{1+ax}{1+bx}$ 为 $x$ 的三阶无穷小，试确定常数 $a,b$ 。

解：由于当 $x\to 0$ 时， $f(x)=e^x-\dfrac{1+ax}{1+bx}$ 为 $x$ 的三阶无穷小，所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^3}=c \text{（非零常数）}$$

而 $$c=\lim_{x\to 0}\frac{e^x(1+bx)-(1+ax)}{x^3(1+bx)}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x(1+bx)-(1+ax)}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x(1+b+bx)-a}{3x^2}\text{，所以}1+b-a=0\text{----------（1）}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x(1+2b+bx)}{6x}\text{，}\quad\text{所以}1+2b=0\text{----------（2）}$$

从而 $b=-\dfrac{1}{2},a=\dfrac{1}{2}$ 。

**注：常用的几个等价无穷小：设 $x\to x_0$ 时， $u\to 0$ ，则 $x\to x_0$ 时，有：**

$\sin u\sim u,\quad \tan u\sim u,\quad arc\sin u\sim u,\quad \arctan u\sim u,\quad 1-\cos u\sim\dfrac{1}{2}u^2$

$a^u-1\sim u\ln a,\quad e^u-1\sim u,\quad \ln(1+u)\sim u,\quad (1+u)^\alpha-1\sim\alpha u$

## 题型 3、定积分表示函数求导数

评注：定积分表示的函数 $F(x)$ 求导数解题思路：

①利用定积分性质或变量代换去掉被积函数中参变量 $x$ ；

（注意：利用变量代换去掉被积函数中参变量 $x$ 时，有可能改变函数定义域）

② 利用公式 $\dfrac{d}{dx}\int_{m(x)}^{n(x)}f(t)dt=f[n(x)]\cdot n'(x)-f[m(x)]\cdot m'(x)$ 求得 $F'(x)$ 。

例 3、设函数 $f(x)$ 连续，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-\sin x}{x}=a$（$a$ 为常数），又 $F(x)=\int_0^1 f(xy)dy$

求 $F'(x)$ 并讨论 $F'(x)$ 的连续性。

解：由于 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-\sin x}{x}=a\Rightarrow f(0)=0$ ，所以

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}\int_0^x f(t)dt, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

当 $x\neq 0$ 时， $F'(x)=\dfrac{xf(x)-\int_0^x f(t)dt}{x^2}$

当 $x=0$ 时，

$$F'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{F(x)-F(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(t)dt}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{2x}$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-\sin x+\sin x}{x}=\frac{1}{2}(a+1)$$

易知 $x=0$ 是 $F'(x)$ 的分段点。先讨论 $F'(x)$ 在 $x=0$ 的连续性，由于

$$\lim_{x\to 0}\frac{xf(x)-\int_0^x f(t)dt}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}-\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^1 f(t)dt}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-\sin x+\sin x}{x}-\frac{1}{2}(a+1)$$
$$=\frac{1}{2}(a+1)=F'(0)\ ,$$

所以 $F'(x)$ 在 $x=0$ 连续；

当 $x\neq 0$ 时，因为 $f(x)$ 连续，所以变上限的积分 $\int_0^x f(t)dt$ 可微，从而也是连续的，于是 $F'(x)$ 是连续的。

综上： $F'(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续。

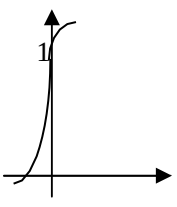
## 题型 4 函数形态的研究

评注：①函数形态涉及：单调、极值、凹凸、拐点和渐近线；
②一阶导数确定单调和极值，二阶导数讨论凹凸和拐点；
③单调区间、凸区间最好用开区间表示；
④渐近线最好用单侧极限去求。在同一个方向上水平渐近线和斜渐近线不可能同时存在。

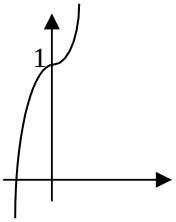
例 4 函数 $y=f(x)$ 具有下列特征:

$f(0)=1;\ \ f'(0)=0$，当 $x\neq 0$ 时， $f'(x)>0;\ \ f''(x)\begin{cases}<0, x<0\\ >0, x>0\end{cases}$ ，则其图形

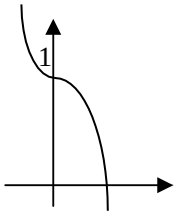
(A)



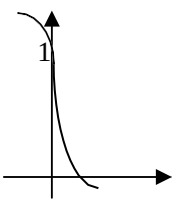

(B)




(C)




(D)




解：由于， $f(0)=1$， $f'(x)>0$，所以曲线过 $(0,1)$ 点，且单调增加，因此（C）、（D）不

正确；

又因为 $f''(x)\begin{cases}<0, x<0\\ >0, x>0\end{cases}$，所以点$(0,1)$为曲线 $y=f(x)$ 的拐点，且在左侧凸、右侧凹，因此.（A）、（C）不正确

所以应选（B）

## 题型 5、证明至少存在一点$\xi$，使得 $f'(\xi)=M(\xi)$

评注：解题思路：

① 利用倒推法（或常数变易法）构造辅助函数 $F(x)$；

（（a）将所证结论中的$\xi$换成 $x$，即 $f'(x)=M(x)$； 如上式右端的函数 $M(x)$ 的不定积分都能求出则进入(c)，否则； (b) 对上式恒等变形，使新表达式左右两端的函数的不定积分都能求出；(c)上式两端求不定积分，则不定积分中常数的表达式为所求辅助函数）

② 找$[a,b]$的一个子区间$[x_1,x_2]$，使 $F(x_1)=F(x_2)$；

（如果已知条件中有定积分，用积分中值定理找；否则一般用闭区间上连续函数的性质找）

③对 $F(x)$ 在区间$[x_1,\ x_2]$上使用罗尔定理，可得到所证结论.

例 5、设 $f(x)$ 在[0，1]上连续，在（0，1）内可导，$f(0)=f(1)=0$，$\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{f(x)-1}{(x-\frac{1}{2})^2}=1.$

试证：

（1） 存在$\eta\in(\frac{1}{2},1)$，使得 $f(\eta)=\eta$；

（2） 对任意实数$\lambda$，必存在$\xi\in(0,\eta)$，使得 $f'(\xi)-\lambda[f(\xi)-\xi]=1$；

（3） $f(x)$ 在[0，1]上的最大值大于 1。

证明：（1）令$F(x)=f(x)-x$，则 $F(x)$在[$\frac{1}{2}$，1]上连续，$F(1)=-1$

因为$\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{f(x)-1}{(x-\frac{1}{2})^2}=1$，所以 $f(\frac{1}{2})=1$，从而$F(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$。根据零点定理可得；存在$\eta\in(\frac{1}{2},1)$，使 $F(\eta)=0$，即 $f(\eta)=\eta$。

（2）令$F(x)=e^{-\lambda x}[f(x)-x]$，则在$[0,\eta]$ 上$F(x)$满足罗尔定理的条件，因此：

必存在$\xi\in(0,\eta)$，使得 $F'(\xi)=0$，即得 $f'(\xi)-\lambda[f(\xi)-\xi]=1$。

（3）因为$\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{f(x)-1}{(x-\frac{1}{2})^2}=1>0$，由保号性定理知存在 1/2 的一个去心邻域 ，在该邻域内

$f(x)-1>0$，即 $f(x)>1$，所以 $f(x)$ 在[0，1]上的最大值大于 1。

## 题型 6、定积分的应用

## （曲线的弧长，面积，旋转体的体积，变力做功等）

例 6、 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内恒正，且满足 $xf'(x)=f(x)+\dfrac{3}{2}ax^2$（$a$ 为常数），

又曲线 $y=f(x)$ 与 $x=1,y=0$ 所围成图形 $S$ 的面积为 2

（I）求 $f(x)$

（II）当 $a$ 为何值时， $S$ 绕 $x$ 轴旋转一周而成的旋转体体积 $V(a)$ 最小？

解：（I）方程 $xf'(x)=f(x)+\dfrac{3}{2}ax^2$ 是一阶线性微分方程，其通解为：

$$f(x)=x(\frac{3}{2}ax+C)$$

又因为曲线 $y=f(x)$ 与 $x=1,y=0$ 所围成图形 $S$ 的面积为 2，所以

$$2=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1(\frac{3}{2}ax^2+Cx)dx=\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}C$$

因此 $C=4-a$，所以 $f(x)=\dfrac{3}{2}ax^2+(4-a)x$

（II）$V(a)=\int_0^1\pi f^2(x)dx=\pi\int_0^1[\frac{3}{2}ax^2+(4-a)x]^2dx=\pi(\frac{1}{30}a^2+\frac{1}{3}a+\frac{16}{3})$

$V'(a)=\pi(\dfrac{1}{15}a+\dfrac{1}{3})$，令 $V'(a)=0$，得 $a=-5$

当 $a<-5$ 时，$V'(a)<0$，当 $a>-5$ 时，$V'(a)>0$，所以 $a=-5$ 时，$V(a)$ 最小。

## 题型 7、多元函数求极值

评注：Ⅰ二元显函数求极值的一般解题思路

① 解方程组$\begin{cases}f_x'(x,y)=0\\f_y'(x,y)=0\end{cases}$求 $f(x,y)$ 的全部驻点；

②利用极值的充分条件判定驻点是否为极值点；

③求出各极值点的函数值.

Ⅱ二元隐函数求极值的一般解题思路

① 利用隐函数微分法求偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$、$\dfrac{\partial z}{\partial y}$

② 解方程组 $\begin{cases} z'_x(x,y)=0 \\ z'_y(x,y)=0 \\ F(x,y,z)=0 \end{cases}$ 一般得 $\begin{cases} x=x_1 \\ y=y_1 \\ z=z_1 \end{cases}$ 和 $\begin{cases} x=x_2 \\ y=y_2 \\ z=z_2 \end{cases}$；

③ 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$、$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$、$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$；

④ 对每一组数 $(x_i, y_i, z_i)(i=1,2)$，求出 $A,B,C$ 判定 $z_i(i=1,2)$ 是否为极值极大还是极小.

例 7、求函数 $f(x,y)=x^4+y^4-(x+y)^2$ 的极值

解：先求函数的驻点.

令 $\begin{cases} f'_x(x,y)=4x^3-2(x+y)=0 \\ f'_y(x,y)=4y^3-2(x+y)=0 \end{cases}$

解得 $\begin{cases} x=-1 \\ y=-1 \end{cases}$, $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$, $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$.

所以函数的驻点为 $(-1,-1)$，$(0,0)$，$(1,1)$.

又 $f''_{xx}(x,y)=12x^2-2$，$f''_{xy}(x,y)=-2$，$f''_{yy}(x,y)=12y^2-2$

对于驻点 $(-1,-1)$，有 $B^2-AC=(-2)^2-10\cdot 10=-96<0$，$A=10>0$，故 $f(x,y)$ 在点 $(-1,-1)$ 处取得极小值 $f(-1,-1)=-2$；

对于驻点 $(1,1)$，有 $B^2-AC=(-2)^2-10\cdot 10=-96<0$，$A=10>0$，故 $f(x,y)$ 在点 $(1,1)$ 处取得极小值 $f(1,1)=-2$；

对于驻点 $(0,0)$，有 $B^2-AC=(-2)^2-(-2)\cdot(-2)=0$，这时需另行讨论．因为

当 $y=x$，且 $|x|$ 很小时，$f(x,y)=2x^4-4x^2<0$，

当 $y=-x$，且 $|x|$ 很小时，$f(x,y)=2x^4>0$，

而 $f(0,0)=0$，故 $(0,0)$ 不是函数 $f(x,y)$ 的极值.

## 题型 8、二重积分的计算

评注：Ⅰ 初等函数的二重积分一般思路：

① 画出区域 $D$ 的草图、观察 $D$ 是否有某种对称性，或观察能否用某曲线将 $D$ 划分，使其一部分有某种对称性；

② 利用对称性化简二重积分；

③选择坐标系，确定二次积分的上、下限，作定积分运算． II 被积函数是分段函数的二重积分一般思路：

若被积函数在整个积分域上都是某个变量的奇函数或偶函数。

① 画出区域 $D$ 的草图；

② 根据区域 $D$ 的特点利用对称性化简二重积分；

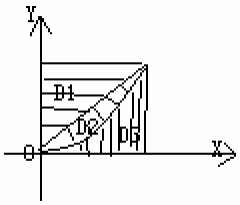
③ 利用分段线将化简后得到的二重积分的积分域 $\tilde{D}$ 划分，把新二重积分表示成几个分段域上的二重积分的和；

④ 对各分段域上的二重积分选择坐标系计算

说明：如果被积函数关于某个变量的奇、偶性在不同积分域上不一致，一般采用先分段，后化简的次序解题。

例 8、设 $f(x,y)=\max\{x,y\}$，$D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1,0\le y\le 1\}$，计算

$$I=\iint_D f(x,y)\left|y-x^2\right|dxdy$$




解：将区域 $D$ 分为如图所示的三部分 $D_1,D_2,D_3$。

$$I=\iint_{D_1} f(x,y)\left|y-x^2\right|dxdy+\iint_{D_2} f(x,y)\left|y-x^2\right|dxdy+\iint_{D_3} f(x,y)\left|y-x^2\right|dxdy$$

$$=\iint_{D_1} y\left|y-x^2\right|dxdy+\iint_{D_2} x\left|y-x^2\right|dxdy+\iint_{D_3} x\left|y-x^2\right|dxdy$$

$$=\iint_{D_1} y(y-x^2)dxdy+\iint_{D_2} x(y-x^2)dxdy+\iint_{D_3} -x(y-x^2)dxdy$$

$$=\int_0^1 dx\int_x^1 y(y-x^2)dy+\int_0^1 dx\int_{x^2}^x x(y-x^2)dy-\int_0^1 dx\int_0^{x^2} x(y-x^2)dy=\frac{11}{40}$$

## 题型 9、求解二阶线性微分方程

评注： $y''+py'+qy=f(x)$ 待定特解 $y^*$ 的形式：

若 $f(x)=P_m(x)e^{\alpha x}$ 其中 $P_m(x)$ 为 $x$ 的 $m$ 次多项式，则待定特解 $y^*$ 形式为

$$y^*=x^kQ_m(x)e^{\alpha x}$$

其中 $Q_m(x)$ 是与 $P_m(x)$ 同次的多项式，调节系数

$$k=\begin{cases}0,\text{当}\alpha\text{不是特征方程的特征根}\\ 1,\text{当}\alpha\text{是特征方程的单特征根}\\ 2,\text{当}\alpha\text{是特征方程的二重特征根}\end{cases}$$

若 $f(x)=e^{\alpha x}[P_n(x)\cos\beta x+Q_m(x)\sin\beta x]$，其中 $P_n(x)$，$Q_m(x)$ 分别为 $x$ 的 $n$ 次，$m$ 次

多项式，则待定特解 $y^*$ 形式为

$$y^* = x^k e^{\alpha x}[M_l(x)\cos\beta x + N_l(x)\sin\beta x]$$

其中 $l = \max\{m, n\}$，$M_l(x)$，$N_l(x)$ 是两个待定的 $l$ 次多项式，调节系数

$$k = \begin{cases} 0, \text{当} \alpha+\beta i \text{不是特征方程特征根时} \\ 1, \text{当} \alpha+\beta i \text{是特征方程特征根时} \end{cases}$$

例 9、利用变换 $t=\sqrt{x}$ 将方程 $4x\frac{d^2y}{dx^2}+2(1-\sqrt{x})\frac{dy}{dx}-6y=e^{3\sqrt{x}}$ 化为变量 $y$ 与 $t$ 的微分方程.

（1）求新方程的表达式　　（2）求原方程的通解

解：由于 $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\times\frac{dt}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{x}}\frac{dy}{dt}$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{1}{4x\sqrt{x}}\frac{dy}{dt}+\frac{1}{4x}\frac{d^2y}{dt^2}$$

所以 $4x\frac{d^2y}{dx^2}+2(1-\sqrt{x})\frac{dy}{dx}-6y=-\frac{1}{\sqrt{x}}\frac{dy}{dt}+\frac{d^2y}{dt^2}+2(1-\sqrt{x})\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\frac{dy}{dt}-6y$

$$=\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}-6y$$

（1）新方程为 $\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}-6y=e^{3t}$----------（*）

（2）方程（*）对应的齐次方程的特征方程为 $\lambda^2-\lambda-6=0$，所以特征根为 $\lambda=-2,\lambda=3$

方程（*）对应的齐次方程的通解为 $Y=ce^{-2t}+ce^{3t}$。

设 $y^*=tae^{3t}$ 是方程（*）的一个特解，代入方程（*）可得 $a=\frac{1}{5}$

所以 $y^*=\frac{1}{5}te^{3t}$ 是方程（*）的一个特解。因此方程（*）的通解为

$$y=c_1e^{-2t}+c_2e^{3t}+\frac{1}{5}te^{3t}$$

从而原方程的通解为：$y=c_1e^{-2\sqrt{x}}+c_2e^{3\sqrt{x}}+\frac{1}{5}\sqrt{x}e^{3\sqrt{x}}$

## 题型　10、求幂级数的收敛域与和函数

评注：Ⅰ 幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ 求收敛域

当$a_n$ 有具体表达式时：

⑴ 求 $\rho(x-x_0)=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}(x-x_0)^{n+1}}{a_n(x-x_0)^n}\right|$

⑵ 由 $\rho(x-x_0)<1$，解得 $|x-x_0|<m$，则收敛半径 $R=m$

⑶ 讨论当 $x=x_0\pm R$ 时，对应的级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (\pm R)^n$ 的敛散性，从而得到收敛域

当$a_n$ 没有具体表达式时：

利用下列两个命题来求解

命题 1：如果幂级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ 在点 $x=x_1$ 处条件收敛，则该幂级数的收敛半径为 $R=|x_1-x_0|$。

命题 2：如果幂级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-b)^n$ 在 $x=0$ 处收敛（或发散），在 $x=2b$ 处发散（或收敛），则收敛半径 $R$ $\quad b$ 。

Ⅱ求和函数一般方法的解题思路

⑴ 求出其收敛域；

⑵ 根据收敛域及幂级数通项系数的特征确定目标级数；

⑶ 利用幂级数的四则运算性质、逐项求导、逐项积分、或变量代换，将幂级数化为目标级数的形式，从而得到新级数的和函数；

⑷ 对所得到的和函数做相反的分析运算，便得原幂级数的和函数.

注：一定留意解题过程中，是否丢掉定义域内的点，如果有，注意在最后补上这些点的定义

例 10、求幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(n-1)^2}{n+1}x^n$ 的和函数

解：级数$\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(n-1)^2}{n+1}x^n$ 收敛域易求得为$(-1,1)$，令 $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(n-1)^2}{n+1}x^n, -1<x<1$

则 $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{[(n+1)-2]^2}{n+1}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n-4\sum_{n=0}^{\infty}x^n+\dfrac{4}{x}\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n+1}x^{n+1}, -1<x<1$ 且 $x\neq 0$

令 $S_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$，则 $\int_0^x S_1(x)dx=\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+1}=\frac{x}{1-x}$，从而

$$S_1(x)=\frac{1}{(1-x)^2},-1<x<1;$$

令 $S_2(x)=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x},-1<x<1$；

令 $S_3(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}x^{n+1}$，$S_3'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}$，所以 $S_3(x)=-\ln|1-x|$

由于 $S(0)=1$

所以 $S(x)=\begin{cases}\frac{1}{(1-x)^2}-\frac{4}{1-x}-\frac{4}{x}\ln|1-x|,-1<x<0,0<x<1\\ 1,x=0\end{cases}$

## 题型 11、函数展开成幂级数

评注：Ⅰ、**有理分式函数 $f(x)$ 展开成幂级数一般思路**

⑴ 将有理分式函数分解成 $\frac{1}{ax+b}$ 与 $\frac{1}{cx+d}$ 的线性组合；

⑵ 利用单位幂级数分别将 $\frac{1}{ax+b}$ 与 $\frac{1}{cx+d}$ 展开成幂级数；

⑶ 利用幂级数的运算性质得到 $f(x)$ 的展开式，并注明成立范围。

**Ⅱ、 反三角函数展开成幂级数的一般思路：**

⑴ 将函数 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 展开；

⑵ 利用逐项积分得到 $f(x)$ 的展开式，并注明展开式成立范围.

例 11、将 $f(x)=x\arctan x-\ln\sqrt{x^2+1}$ 展开成 $x$ 的幂级数，并求 $f^{(2016)}(0)$.

解：Ⅰ）由于 $f'(x)=\arctan x+x\frac{1}{1+x^2}-\frac{x}{1+x^2}=\arctan x$

$$f''(x)=\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n},\quad(-1<x<1)$$

从而 $$f'(x)-f'(0)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}$$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：https://d.book118.com/616014032111010103