

理科必做部分

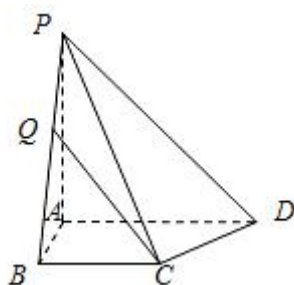
专题 1 空间向量与立体几何

【三年高考】

1. 【2015 江苏高考, 22】如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 已知 $PA \perp$ 平面 $ABCD$, 且四边形 $ABCD$ 为直角梯形, $\angle ABC = \angle BAD = \frac{\pi}{2}$, $PA = AD = 2, AB = BC = 1$

(1) 求平面 PAB 与平面 PCD 所成二面角的余弦值;

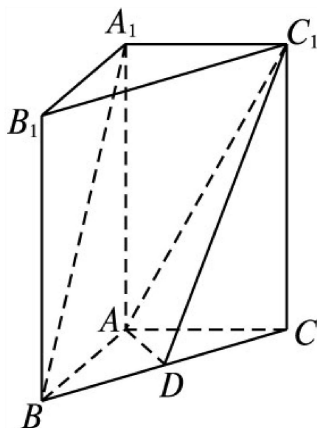
(2) 点 Q 是线段 BP 上的动点, 当直线 CQ 与 DP 所成角最小时, 求线段 BQ 的长



2. 【2013 江苏, 理 22】如图, 在直三棱柱 $A_1B_1C_1-ABC$ 中, $AB \perp AC$, $AB = AC = 2, A_1A = 4$, 点 D 是 BC 的中点.

(1) 求异面直线 A_1B 与 C_1D 所成角的余弦值;

(2) 求平面 ADC_1 与平面 ABA_1 所成二面角的正弦值.



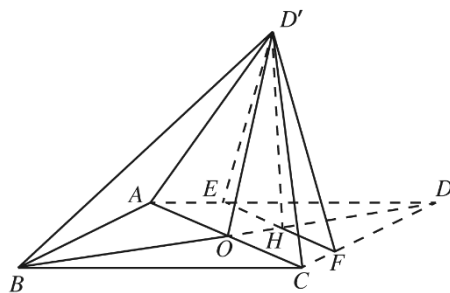
3. 【2016 高考新课标 2 理数】如图, 菱形 $ABCD$ 的对角线 AC 与 BD 交于点 O ,

$AB = 5, AC = 6$, 点 E, F 分别在 AD, CD 上, $AE = CF = \frac{5}{4}$, EF 交 BD 于点 H . 将 $\triangle DEF$

沿 EF 折到 $\triangle D'EF$ 位置, $OD' = \sqrt{10}$.

(I) 证明: $D'H \perp$ 平面 $ABCD$;

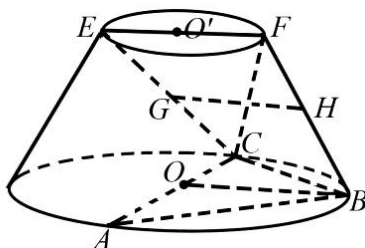
(II) 求二面角 $B-D'A-C$ 的正弦值.



4. 【2016 高考山东理数】在如图所示的圆台中， AC 是下底面圆 O 的直径， EF 是上底面圆 O' 的直径， FB 是圆台的一条母线.

(I) 已知 G, H 分别为 EC, FB 的中点，求证： $GH \parallel$ 平面 ABC ;

(II) 已知 $EF=FB=\frac{1}{2}AC=2\sqrt{3}$ ， $AB=BC$. 求二面角 $F-BC-A$ 的余弦值.



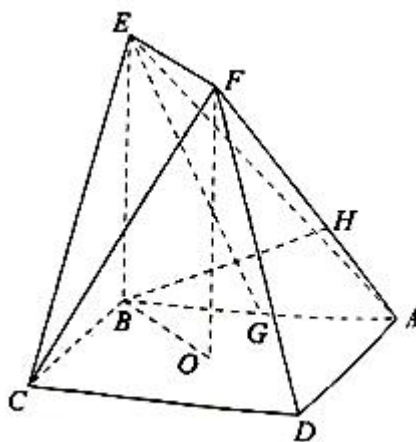
5. 【2016 高考天津理数】(本小题满分 13 分)

如图，正方形 $ABCD$ 的中心为 O ，四边形 $OBEF$ 为矩形，平面 $OBEF \perp$ 平面 $ABCD$ ，点 G 为 AB 的中点， $AB=BE=2$.

(I) 求证： $EG \parallel$ 平面 ADF ;

(II) 求二面角 $O-EF-C$ 的正弦值;

(III) 设 H 为线段 AF 上的点，且 $AH=\frac{2}{3}HF$ ，求直线 BH 和平面 CEF 所成角的正弦值.



6. 【2016 年高考北京理数】(本小题 14 分)

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$ ， $PA \perp PD$ ， $PA=PD$ ，

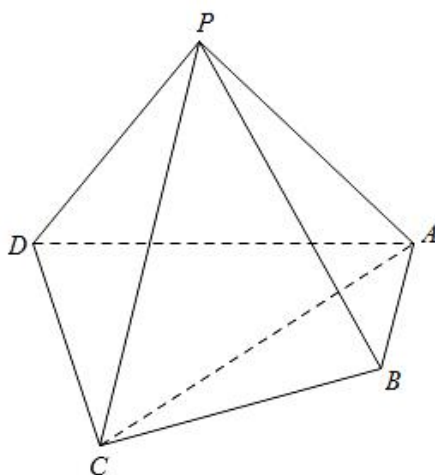
$$AB \perp AD,$$

$$AB=1, AD=2, AC=CD=\sqrt{5}.$$

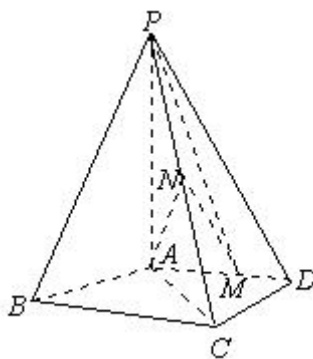
(1) 求证: $PD \perp$ 平面 PAB ;

(2) 求直线 PB 与平面 PCD 所成角的正弦值;

(3) 在棱 PA 上是否存在点 M , 使得 $BM \parallel$ 平面 PCD ? 若存在, 求 $\frac{AM}{AP}$ 的值; 若不存在, 说明理由.



7. 【2016 高考新课标 3 理数】如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PA \perp$ 地面 $ABCD$, $AD \parallel BC$, $AB=AD=AC=3$, $PA=BC=4$, M 为线段 AD 上一点, $AM=2MD$, N 为 PC 的中点.



(I) 证明 $MN \parallel$ 平面 PAB ;

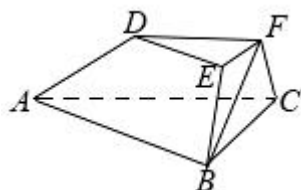
(II) 求直线 AN 与平面 PMN 所成角的正弦值.

8. 【2016 高考浙江理数】(本题满分 15 分)如图,在三棱台 $ABC-DEF$ 中,平面 $BCFE \perp$ 平面

$ABC, \angle ACB=90^\circ, BE=EF=FC=1, BC=2, AC=3.$

(I)求证: $EF \perp$ 平面 $ACFD$;

(II)求二面角 $B-AD-F$ 的平面角的余弦值.

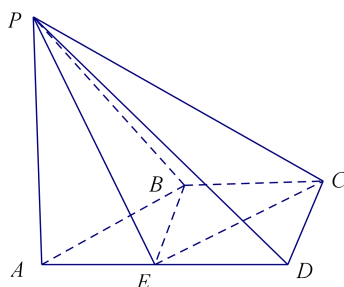


9. 【2016 年高考四川理数】(本小题满分 12 分)

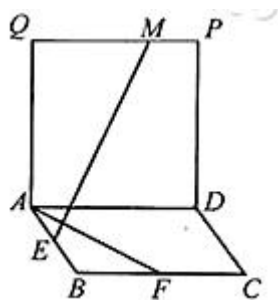
如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $\angle ADC = \angle PAB = 90^\circ$, $BC = CD = \frac{1}{2}AD$, E 为边 AD 的中点, 异面直线 PA 与 CD 所成的角为 90° .

(I) 在平面 PAB 内找一点 M , 使得直线 $CM \parallel$ 平面 PBE , 并说明理由;

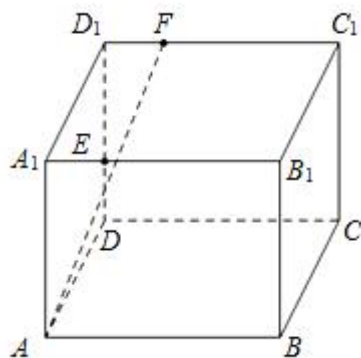
(II) 若二面角 $P-CD-A$ 的大小为 45° , 求直线 PA 与平面 PCE 所成角的正弦值.



10. 【2015 高考四川, 理 14】如图, 四边形 $ABCD$ 和 $ADPQ$ 均为正方形, 它们所在的平面互相垂直, 动点 M 在线段 PQ 上, E, F 分别为 AB, BC 的中点. 设异面直线 EM 与 AF 所成的角为 θ , 则 $\cos \theta$ 的最大值为_____.



11. 【2015 高考新课标 2, 理 19】如图, 长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB=16$, $BC=10$, $AA_1=8$, 点 E, F 分别在 A_1B_1, C_1D_1 上, $A_1E=D_1F=4$. 过点 E, F 的平面 α 与此长方体的面相交, 交线围成一个正方形.



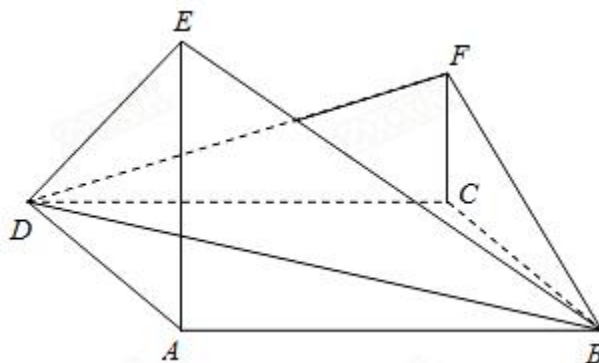
(I) 在图中画出这个正方形 (不必说出画法和理由);

(II) 求直线 AF 与平面 α 所成角的正弦值.

12. 【2015 高考新课标 1, 理 18】如图, 四边形 $ABCD$ 为菱形, $\angle ABC=120^\circ$, E, F 是平面 $ABCD$ 同一侧的两点, $BE \perp$ 平面 $ABCD$, $DF \perp$ 平面 $ABCD$, $BE=2DF$, $AE \perp EC$.

(I) 证明: 平面 $AEC \perp$ 平面 AFC ;

(II) 求直线 AE 与直线 CF 所成角的余弦值.

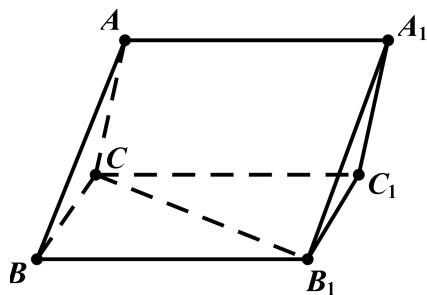


13. 【2014 高考全国 1 第 19 题】如图, 三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, 侧面 BB_1C_1C 为菱形,

$AB \perp B_1C$.

(I) 证明: $AC = AB_1$;

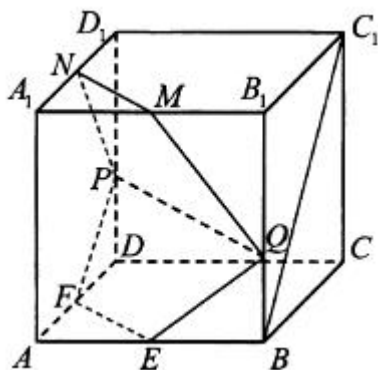
(II) 若 $AC \perp AB_1$, $\angle CBB_1 = 60^\circ$, $AB = BC$, 求二面角 $A-A_1B_1-C_1$ 的余弦值.



14. 【2014高考湖北理第19题】如图，在棱长为2的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中， E, F, M, N 分别是棱 AB, AD, A_1B_1, A_1D_1 的中点，点 P, Q 分别在棱 DD_1, BB_1 上移动，且 $DP = BQ = \lambda (0 < \lambda < 2)$.

(1) 当 $\lambda = 1$ 时，证明：直线 $BC_1 \parallel$ 平面 $EF PQ$ ；

(2) 是否存在 λ ，使平面 $EF PQ$ 与面 $PQMN$ 所成的二面角为直二面角？若存在，求出 λ 的值；若不存在，说明理由.



【2017 年高考命题预测】

纵观 2016 各地高考试题，高考对立体几何的考查，可以发现均以规则几何体为背景，这样建立空间直角坐标系较为容易，考查学生的化归与转化能力、空间想象能力以及基本运算能力。从高考试题来看，空间向量的坐标及运算，空间向量的应用，重点考查空间向量的应用求夹角、求距离。课本淡化了利用空间关系找角、求距离这方面内容的讲解，而是加大了向量在这方面内容应用的讲解，因此作为立体几何的解答题，用向量方法处理有关夹角和距离将是主要方法，在复习时应加大这方面的训练力度，题型上空间的夹角和距离主要以主观题形式考查，但有时选择题、填空题也涉及，难度中等偏高，从高考试题来看，利用空间向量证明平行与垂直，以及求空间角是高考的热点，题型主要为解答题，难度属于中等，主要考查向量的坐标运算，以及向量的平行与垂直的充要条件，如何用向量法解决空间角问题等，

同时注重考查学生的空间想象能力、运算能力. 立体几何题型一般是一个解答题, 1 至 2 个填空或选择题. 解答题一般与棱柱和棱锥相关, 主要考查线线关系、线面关系和面面关系, 其重点是考查空间想象能力和推理运算能力, 其解题方法一般都有二种以上, 并且一般都能用空间向量来求解. 立体几何侧重考查学生的空间概念、逻辑思维能力、空间想象能力及运算能力, 近几年凡涉及空间向量应用于立体几何的高考试题, 都着重考查应用空间向量求异面直线所成的角、二面角, 证明线线平行、线面平行和证明异面直线垂直和线面垂直等基
本问题. 预测 2017 年高考, 可能以锥体为几何背景, 第一问以线面平行, 面面平行为主要考查点, 第二问可能给出一个角, 计算角的问题, 常见的是异面直线所成的角, 直线与平面所成的角, 平面与平面所成的二面角, 这类试题有一定的难度和需要一定的解题技巧, 通常要
把它们转化为相交直线所成的角; 求距离, 试题中常见的是点与点之间的距离, 点到直线的距离, 点到平面的距离, 直线与直线的距离, 直线到平面的距离, 要特别注意解决此类问题的转化方法, 有可能求点的位置或设置一个探索性命题, 突出考查空间想象能力和逻辑推理能力, 以及分析问题、解决问题的能力. 复习建议: 空间图形中的角与距离, 先根据定义找出或作出所求的角与距离, 然后通过解三角形等方法求值, 注意“作、证、算”的有机统一. 解题时注意各种角的范围. 异面直线所成角的范围是 $0^\circ < \theta \leq 90^\circ$, 其方法是平移法和补形法; 直线与平面所成角的范围是 $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$, 其解法是作垂线、找射影; 二面角 $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$. 平面图形的翻折与空间图形的展开问题, 要对照翻折(或展开)前后两个图形, 分清哪些元素的位置(或数量)关系改变了, 哪些没有改变.

【2017 年高考考点定位】

对立体几何中的向量方法部分, 主要以解答题的方式进行考查, 而且偏重在第二问或者第三问中使用这个方法, 考查的重点是使用空间向量的方法进行空间角和距离等问题的计算, 把立体几何问题转化为空间向量的运算问题.

【考点 1】空间向量

【备考知识梳理】

1. 空间向量的概念

向量: 在空间, 我们把具有大小和方向的量叫做向量. 如位移、速度、力等

相等向量: 长度相等且方向相同的向量叫做相等向量.

表示方法: 用有向线段表示, 并且同向且等长的有向线段表示同一向量或相等的向量.

说明: ①由相等向量的概念可知, 一个向量在空间平移到任何位置, 仍与原来的向量相等, 用同向且等长的有向线段表示; ②平面向量仅限于研究同一平面内的平移, 而空间向量研究

的是空间的平移.

2. 向量运算和运算率

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \vec{a} + \vec{b}, \quad \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \vec{a} - \vec{b}, \quad \overrightarrow{OP} = \lambda \vec{a} (\lambda \in R)$$

加法交换律: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$. 加法结合律: $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$. 数乘分配律:

$$\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}.$$

说明: ①引导学生利用右图验证加法交换率, 然后推广到首尾相接的若干向量之和; ②向量加法的平行四边形法则在空间仍成立

3. 平行向量(共线向量): 如果表示空间向量的有向线段所在的直线互相平行或重合, 则这些向量叫做共线向量或平行向量. $\vec{a}$ 平行于 $\vec{b}$ 记作 $\vec{a} \parallel \vec{b}$.

注意: 当我们说 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 共线时, 对应的有向线段所在直线可能是同一直线, 也可能是平行直线; 当我们说 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 平行时, 也具有同样的意义.

共线向量定理: 对空间任意两个向量 $\vec{a}$ ($\vec{a} \neq \vec{0}$)、 $\vec{b}$, $\vec{a} \parallel \vec{b}$ 的充要条件是存在实数 λ 使 $\vec{b} = \lambda \vec{a}$

注: (1)上述定理包含两个方面: ①性质定理: 若 $\vec{a} \parallel \vec{b}$ ($\vec{a} \neq \vec{0}$), 则有 $\vec{b} = \lambda \vec{a}$, 其中 λ 是唯一确定的实数. ②判断定理: 若存在唯一实数 λ , 使 $\vec{b} = \lambda \vec{a}$ ($\vec{a} \neq \vec{0}$), 则有 $\vec{a} \parallel \vec{b}$ (若用此结论判断 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 所在直线平行, 还需 $\vec{a}$ (或 $\vec{b}$) 上有一点不在 $\vec{b}$ (或 $\vec{a}$) 上).

(2)对于确定的 λ 和 $\vec{a}$, $\vec{b} = \lambda \vec{a}$ 表示空间与 $\vec{a}$ 平行或共线, 长度为 $|\lambda \vec{a}|$, 当 $\lambda > 0$ 时与 $\vec{a}$ 同向, 当 $\lambda < 0$ 时与 $\vec{a}$ 反向的所有向量

(3)若直线 $l \parallel \vec{a}$, $A \in l$, P 为 l 上任一点, O 为空间任一点, 下面根据上述定理来推导 $\overrightarrow{OP}$ 的表达式.

推论: 如果 l 为经过已知点 A 且平行于已知非零向量 $\vec{a}$ 的直线, 那么对任一点 O , 点 P 在

直线 l 上的充要条件是存在实数 t , 满足等式 $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + t\vec{a}$ ①

其中向量 $\vec{a}$ 叫做直线 l 的方向向量

在 l 上取 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, 则①式可化为 $\overrightarrow{OP} = (1-t)\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}$. ②

当 $t = \frac{1}{2}$ 时, 点 P 是线段 AB 的中点, 则 $\overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$. ③

①或②叫做空间直线的向量参数表示式, ③是线段 AB 的中点公式.

4. 向量与平面平行: 如果表示向量 $\vec{a}$ 的有向线段所在直线与平面 α 平行或 $\vec{a}$ 在 α 平面内,

我们就说向量 $\vec{a}$ 平行于平面 α , 记作 $\vec{a} // \alpha$. 注意: 向量 $\vec{a} // \alpha$ 与直线 $a // \alpha$ 的联系与区别.

共面向量: 我们把平行于同一平面的向量叫做共面向量

共面向量定理 如果两个向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 不共线, 则向量 $\vec{p}$ 与向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 共面的充要条件是存在

实数对 x 、 y , 使 $\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b}$. ①

注: 与共线向量定理一样, 此定理包含性质和判定两个方面.

推论: 空间一点 P 位于平面 MAB 内的充要条件是存在有序实数对 x 、 y , 使

$$\vec{MP} = x\vec{MA} + y\vec{MB}, \text{ ④}$$

或对空间任一定点 O , 有 $\vec{OP} = \vec{OM} + x\vec{MA} + y\vec{MB}$. ⑤

在平面 MAB 内, 点 P 对应的实数对 (x, y) 是唯一的. ①式叫做平面 MAB 的向量表示式

又 $\because \vec{MA} = \vec{OA} - \vec{OM}$, $\vec{MB} = \vec{OB} - \vec{OM}$, 代入⑤, 整理得

$$\vec{OP} = (1 - x - y)\vec{OM} + x\vec{OA} + y\vec{OB}. \text{ ⑥}$$

由于对于空间任意一点 P , 只要满足等式④、⑤、⑥之一 (它们只是形式不同的同一等式), 点 P 就在平面 MAB 内; 对于平面 MAB 内的任意一点 P , 都满足等式④、⑤、⑥, 所以等式④、⑤、⑥都是由不共线的两个向量 $\vec{MA}$ 、 $\vec{MB}$ (或不共线三点 M 、 A 、 B) 确定的空间平面的向量参数方程, 也是 M 、 A 、 B 、 P 四点共面的充要条件

5. 空间向量基本定理: 如果三个向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 、 $\vec{c}$ 不共面, 那么对空间任一向量, 存在一个唯一的有序实数组 x, y, z , 使 $\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$.

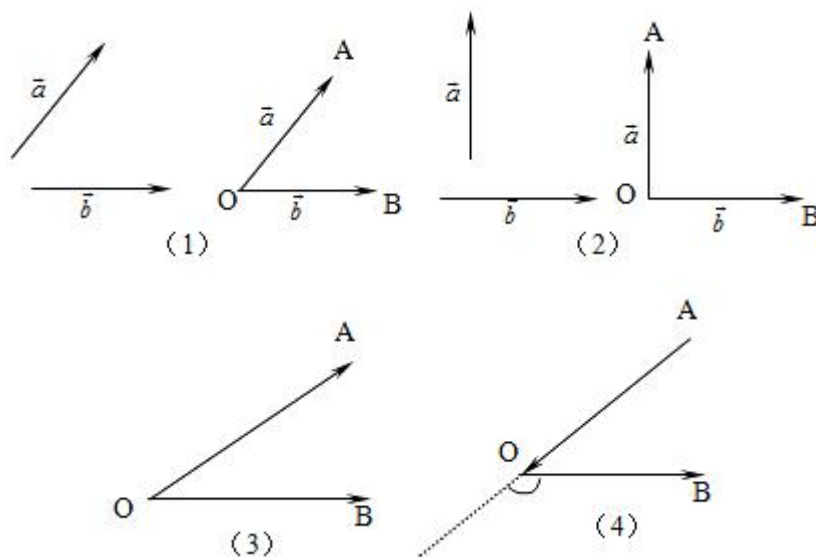
说明: (1)由上述定理知, 如果三个向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 、 $\vec{c}$ 不共面, 那么所有空间向量所组成的集合就是 $\{\vec{p} | \vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}, x, y, z \in R\}$, 这个集合可看作由向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 、 $\vec{c}$ 生成的, 所以我们把 $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ 叫做空间的一个基底, $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ 都叫做基向量; (2)空间任意三个不共面向量都可以作为空间向量的一个基底; (3)一个基底是指一个向量组, 一个基向量是指基底中的某一个向量, 二者是相关联的不同的概念; (4)由于 $\vec{0}$ 可视为与任意非零向量共线. 与任意两个非零向量共面, 所以, 三个向量不共面就隐含着它们都不是 $\vec{0}$.

推论: 设 O, A, B, C 是不共面的四点, 则对空间任一点 P , 都存在唯一的有序实数组 x, y, z , 使 $\vec{OP} = x\vec{OA} + y\vec{OB} + z\vec{OC}$.

6. 数量积

(1) 夹角: 已知两个非零向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$, 在空间任取一点 O , 作 $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$, 则角

$\angle AOB$ 叫做向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角, 记作 $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$



说明: (1) 规定 $0 \leq \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \leq \pi$, 因而 $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \langle \vec{b}, \vec{a} \rangle$;

(2) 如果 $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \frac{\pi}{2}$, 则称 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 互相垂直, 记作 $\vec{a} \perp \vec{b}$;

(3) 在表示两个向量的夹角时, 要使得有向线段的起点重合, 注意图 (3)、(4) 中的两个向量的夹角不同,

图 (3) 中 $\angle AOB = \langle \vec{OA}, \vec{OB} \rangle$,

图 (4) 中 $\angle AOB = \pi - \langle \vec{AO}, \vec{OB} \rangle$,

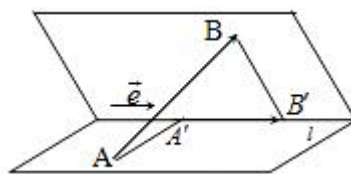
从而有 $\langle -\vec{OA}, \vec{OB} \rangle = \langle \vec{OA}, -\vec{OB} \rangle = \pi - \langle \vec{OA}, \vec{OB} \rangle$.

(2) 向量的模: 表示向量的有向线段的长度叫做向量的长度或模.

(3) 向量的数量积: $|\vec{a}| |\vec{b}| \cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$ 叫做向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 的数量积, 记作 $\vec{a} \cdot \vec{b}$. 即

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle,$$

向量 $\vec{AB}$ 在 $\vec{e}$ 方向上的正射影: $\vec{a} \cdot \vec{e} = |\vec{AB}| \cos \langle \vec{a}, \vec{e} \rangle = A'B'$



(4) 性质与运算率

(1) $\vec{a} \cdot \vec{e} = \cos\langle \vec{a}, \vec{e} \rangle$, (2) $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, (3) $|\vec{a}|^2 = \vec{a} \cdot \vec{a}$.

(4) $(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b})$, (5) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$, (6) $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$

7. 空间向量的坐标表示及运算

(1) 数量积的坐标运算

设 $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, 则① $\vec{a} \pm \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$;

② $\lambda \vec{a} = (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3)$; ③ $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$.

(2) 共线与垂直的坐标表示

设 $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$,

则 $\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} = \lambda \vec{b} \Leftrightarrow a_1 = \lambda b_1, a_2 = \lambda b_2, a_3 = \lambda b_3$,

$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0$ ($\vec{a}, \vec{b}$ 均为非零向量).

(3) 模、夹角和距离公式

设 $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, 则 $|\vec{a}| = \sqrt{a^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$,

$$\cos\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}.$$

设 $A(a_1, b_1, c_1), B(a_2, b_2, c_2)$, 则 $d_{AB} = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(a_2 - a_1)^2 + (b_2 - b_1)^2 + (c_2 - c_1)^2}$.

【规律方法技巧】

1. 将四点共面问题, 转化为三个向量共面问题, 利用共面向量定理来解决.

2. 利用向量共线说明两线平行时注意说明四点不共线, 否则不一定正确.

3. 立体几何中的向量方法

(1) 直线的方向向量与平面的法向量的确定

①直线的方向向量: l 是空间一直线, A, B 是直线 l 上任意两点, 则称 $\overrightarrow{AB}$ 为直线 l 的方向向量, 与 $\overrightarrow{AB}$ 平行的任意非零向量也是直线 l 的方向向量.

②平面的法向量可利用方程组求出: 设 $\vec{a}, \vec{b}$ 是平面 α 内两不共线向量, $\vec{n}$ 为平面 α 的法向量, 则求法向量的方程组为

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{a} = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{b} = 0 \end{cases}.$$

4. 易错点: (1) 共线向量定理中 $\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow$ 存在实数 λ 使 $\vec{b} = \lambda \vec{a}$ 易忽视 $\vec{a} \neq 0$. (3) 共面向量定理中, 注意有序实数对 (x, y) 是唯一存在的. (3) 一个平面的法向量有无数个, 但要注

意它们是共线向量，不要误为是共面向量。

5. 如何建立适当的坐标系: 根据几何体本身的几何性质, 恰当建立空间直角坐标系最为关键, 如果坐标系引入的恰当, 合理, 即能够容易确定点的坐标, 需要总结一些建系方法. 常见建系方法:

(1) 借助三条两两相交且垂直的棱为坐标轴, 如正方体, 长方体等规则几何体, 一般选择三条线为三个坐标轴, 如图 1、2;

(2) 借助面面垂直的性质定理建系, 若题目中出现侧面和底面垂线的条件, 一般利用此条件添加辅助线, 确定 z 轴, 如图 3;

(3) 借助棱锥的高线建系等. 对于正棱锥, 利用定点在底面的射影为底面的中心, 可确定 z 轴, 然后在底面确定互相垂直的直线分别为 x, y 轴. 如图 4.

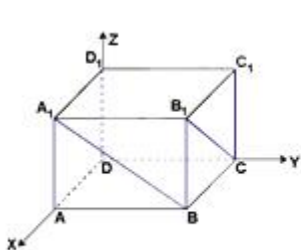


图 1

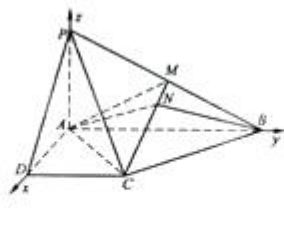


图 2

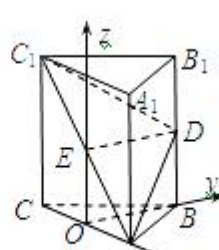


图 3

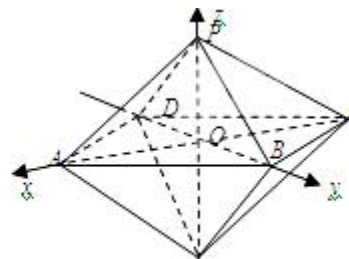


图 4

【考点针对训练】

1. 一个四面体的顶点在空间直角坐标系 $O-xyz$ 中的坐标分别是 $(1, 0, 1)$, $(1, 1, 0)$, $(0, 1, 1)$, $(0, 0, 0)$, 画该四面体直观图.

2. 有以下命题: ①如果向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 与任何向量不能构成空间向量的一个基底, 那么 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 的关系是不共线; ② O, A, B, C 为空间四点, 且向量 $\vec{OA}$, $\vec{OB}$, $\vec{OC}$ 不构成空间的一个基底, 那么点 O, A, B, C 一定共面; ③已知向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ 是空间的一个基底, 则向量 $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} - \vec{b}$, $\vec{c}$ 也是空间的一个基底. 其中正确的命题是_____.

【考点 2】空间角, 距离的求法

【备考知识梳理】

1. 空间的角

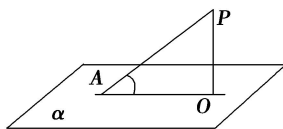
(1) 异面直线所成的角

如图, 已知两条异面直线 a, b , 经过空间任一点 O 作直线 $a' \parallel a, b' \parallel b$. 则把 a' 与 b' 所成的锐角 (或直角) 叫做异面直线 a 与 b 所成的角 (或夹角). 异面直线所成的角的范围是

$$\left(0, \frac{\pi}{2}\right].$$

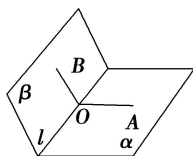
(2) 平面的一条斜线和它在平面内的射影所成的锐角，叫做这条直线和这个平面所成的角。

① 直线垂直于平面，则它们所成的角是直角；② 直线和平面平行，或在平面内，则它们所成的角是 0° 的角。直线与平面所成角的范围是 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 。



(3) 二面角的平面角

如图在二面角 $\alpha-l-\beta$ 的棱上任取一点 O ，以点 O 为垂足，在半平面 α 和 β 内分别作垂直于棱 l 的射线 OA 和 OB ，则 $\angle AOB$ 叫做二面角的平面角。二面角的范围是 $[0, \pi]$ 。



(4) 等角定理

如果一个角的两边和另一个角的两边分别平行，并且方向相同，那么这两个角相等。

推论：如果两条相交直线和另两条相交直线分别平行，那么这两组直线所成的锐角（或直角）相等。

2. 空间向量与空间角的关系

(1) 设异面直线 l_1 和 l_2 的方向向量分别为 $\vec{v}_1$ 和 $\vec{v}_2$ ，则 l_1 与 l_2 的夹角 θ 满足

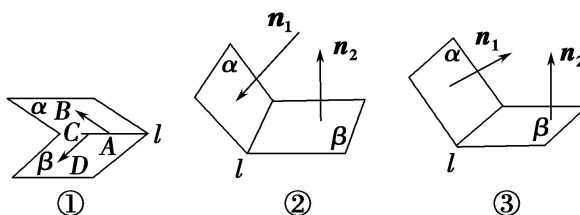
$$\cos \theta = \left| \cos \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle \right|.$$

(2) 设直线 l 的方向向量和平面 α 的法向量分别为 $\vec{u}$ 和 $\vec{v}$ ，则直线 l 与平面 α 的夹角 θ 满足

$$\sin \theta = \left| \cos \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \right|.$$

(3) 求二面角的大小

(i) 如图①， AB, CD 是二面角 $\alpha-l-\beta$ 的两个面内与棱 l 垂直的直线，则二面角的大小 $\theta = \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD} \rangle$ 。



(ii) 如图②③， $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ 分别是二面角 $\alpha-l-\beta$ 的两个半平面 α, β 的法向量，则二面角

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/616030150242011025>