# 第 05 讲　椭圆及其性质

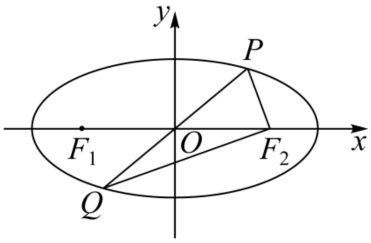
## 目录

# 01
## 模拟基础练

### 题型一：椭圆的定义与标准方程

1．已知$F_1(0,-1)$，$F_2(0,1)$是椭圆$C$的两个焦点，过$F_2$且垂直于$y$轴的直线交$C$于$A$，$B$两点，且$|AB|=3$，则椭圆$C$的标准方程为________.

2．已知椭圆$E$：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右焦点分别为$F_1$，$F_2$，过坐标原点的直线交$E$于$P$，$Q$两点，且$PF_2\perp F_2Q$，且$S_{\triangle PF_2Q}=\frac{1}{2}a^2$，$|PF_2|+|F_2Q|=8$，则$E$的标准方程为________.




3．已知椭圆两个焦点的坐标分别是$(-2,0)$，$(2,0)$，并且经过点$\left(\frac{5}{2},-\frac{3}{2}\right)$，则它的标准方程为_____.

### 题型二：椭圆方程的充要条件

4．若方程$\frac{x^2}{m}+\frac{y^2}{4-m}=1$表示椭圆，则实数$m$的取值范围为（　）

A．$m>0$　　B．$m<4$　　C．$0<m<4$　　D．$0<m<4$且$m\neq 2$

5．若曲线$C:(k-4)x^2+\frac{y^2}{6-k}=1$表示椭圆，则实数$k$的取值范围是（　）

A．$(4,6)$　　B．$(4,5)$　　C．$(5,6)$　　D．$(4,5)\cup(5,6)$

6．若方程$\frac{x^2}{4-t}+\frac{y^2}{t-1}=1$表示焦点在$x$轴的椭圆，则$t$的取值范围是（　）

A．$(1,4)$　　B．$\left(1,\frac{5}{2}\right)\cup\left(\frac{5}{2},4\right)$　　C．$\left(1,\frac{5}{2}\right)$　　D．$\left(\frac{5}{2},4\right)$

7．（2024·河南·模拟预测）若方程$\left(m+1\right)x^2+\left(1-m\right)y^2=1-m^2$表示焦点在$x$轴上的椭圆，则（　）

A．$-1<m<1$　　B．$0<m<1$

C．$-1<m<0$　　D．$-1<m<0$或$0<m<1$

8．设$m$为实数，若方程$\frac{x^2}{2-m}+\frac{y^2}{m-1}=1$表示焦点在$x$轴上的椭圆，则实数$m$的取值范围是（　）

A．$\frac{3}{2}<m<2$　　B．$m>\frac{3}{2}$

C．$1<m<2$　　D．$1<m<\frac{3}{2}$

## 题型三：椭圆中焦点三角形的周长与面积及其他问题

9．已知$F_1,F_2$是椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的两个焦点，$P$为椭圆$C$上的一点，且$\overrightarrow{PF_1}\perp\overrightarrow{PF_2}$，若$\triangle PF_1F_2$的面积为9，则$b$的值为_____.

10．设椭圆$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{12}=1$的左右焦点为$F_1,F_2$，椭圆上点$P$满足$|PF_1|:|PF_2|=2:3$，则$\triangle PF_1F_2$的面积为________.

11．已知$F_1$，$F_2$分别是椭圆$C$：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$的左、右焦点，椭圆$C$的离心率为$\sqrt{3}-1$，$P$是$C$在第一象限上的一点.若$PF_1\perp PF_2$，则$\cos\angle PF_2F_1=$_____.

12．已知椭圆$\frac{y^2}{25}+\frac{x^2}{16}=1$的焦点为$F_1$、$F_2$，$P$为该椭圆上任意一点（异于长轴端点），则$\triangle PF_1F_2$的周长为（　）

A．10　　B．13　　C．14　　D．16

## 题型四：椭圆上两点距离的最值问题

13．（2024·宁夏银川·二模）已知椭圆$C$：$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$的左焦点为$F_1$，$M$为椭圆$C$上任意一点，则$\left|MF_1\right|$的最小值为_____.

14．已知$AB=4$，点$P$在点A，$B$所在的一个平面内运动且$PA+PB=6$，则$PA$的最大值是_____，最小值是_____.

15．过椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的右焦点$F$且与长轴垂直的弦的长为$3\sqrt{2}$，过点$P(2,1)$且斜率为$-1$的直线与$C$相交于$A,B$两点，若$P$恰好是$AB$的中点，则椭圆$C$上一点$M$到$F$的距离的最大值为________.

16．已知椭圆$C:\frac{y^2}{a^2}+x^2=1(a>1)$的离心率为$\frac{\sqrt{2}}{2}$，$P$为椭圆$C$上的一个动点，定点$A(-2,0)$，则$|PA|$

的最大值为________.

## 题型五：椭圆上两线段的和差最值问题

17．设实数$x,y$满足$\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1,\sqrt{x^2+y^2-2y+1}+\sqrt{x^2+y^2-2x+1}$的最小值为（　）

A．$2\sqrt{5}-\sqrt{2}$　　B．$1+\sqrt{5}$　　C．$\sqrt{2}$　　D．前三个答案都不对

18．（2024·甘肃定西·统考模拟预测）已知椭圆$C$：$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$的左、右焦点分别为$F_1$，$F_2$，$A$是$C$上一点，$B(2,1)$，则$|AB|+|AF_1|$的最大值为（　）

A．7　　B．8　　C．9　　D．11

19．已知点$P$为椭圆$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$上任意一点，点$M$、$N$分别为$(x-1)^2+y^2=1$和$(x+1)^2+y^2=1$上的点，则$|PM|+|PN|$的最大值为（　）

A．4　　B．5　　C．6　　D．7

20．已知$F_1$，$F_2$分别为椭圆$C:\frac{x^2}{4}+y^2=1$的两个焦点，$P$为椭圆上一点，则$|PF_1|-|PF_2|$的最大值为（　）

A．2　　B．$2\sqrt{3}$　　C．4　　D．$4\sqrt{3}$

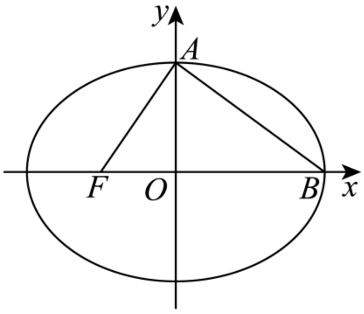
## 题型六：离心率的值及取值范围

21．已知椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左右焦点为$F_1$，$F_2$，以$|F_1F_2|$为直径的圆与椭圆有四个交点，则椭圆离心率的范围为（　）.

A．$\left(\frac{\sqrt{2}}{2},1\right)$　　B．$\left[\frac{\sqrt{2}}{2},1\right)$　　C．$\left(\frac{1}{2},1\right)$　　D．$\left[\frac{1}{2},1\right)$

22．（2024·全国·模拟预测）已知椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的右焦点为$F$，过坐标原点$O$的直线$l$与椭圆$C$交于A，$B$两点．在$\triangle AFB$中，$\angle AFB=120°$，且满足$S_{\triangle AFB}=\sqrt{3}ac$，则椭圆$C$的离心率为________.

23．（2024·高三·河北保定·开学考试）如图，设椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左焦点为$F$，上顶点为A，右顶点为$B$，且$\overrightarrow{FA}\cdot\overrightarrow{AB}=0$，则$C$的离心率为________.

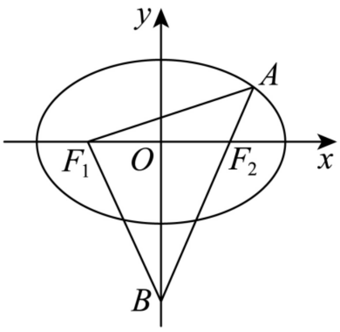



24．（2024·高三·福建·开学考试）已知椭圆$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{m^2}=1$的右焦点$F$与抛物线$y^2=2px\left(p>0\right)$焦点重合，$M$是椭圆与抛物线的一个公共点，$\left|MF\right|=6-3\sqrt{2}$，则椭圆的离心率为_____.

25．（2024·高三·河北沧州·期中）已知$F_1,F_2$为椭圆$C:\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$的两个焦点，$P$为椭圆$C$上一点，且$\triangle PF_1F_2$的周长为6，面积的最大值为$\sqrt{3}$，则椭圆$C$的离心率为________.

26．已知$F_1,F_2$为椭圆$C$的两个焦点，$P$为$C$上一点，若$\triangle PF_1F_2$的三边$\left|PF_1\right|,\left|F_1F_2\right|,\left|PF_2\right|$成等差数列，则$C$的离心率为__________.

27．如图所示，已知椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左右焦点分别为$F_1,F_2$，点A在$C$上，点$B$在$y$轴上，$F_1A\perp F_1B$，$\left|BF_2\right|=4\left|AF_2\right|$，则$C$的离心率为________.




## 题型七：椭圆的简单几何性质问题

**28．（多选题）**连接椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{3}=1(a>\sqrt{3})$的三个顶点所围成的三角形面积为$2\sqrt{3}$，记椭圆$C$的右焦点为$F$，则（　）

A．$a=4$　　B．椭圆$C$的离心率为$\frac{1}{2}$

C．椭圆$C$的焦距为$2\sqrt{7}$　　D．椭圆$C$上存在点$P$，使$|PF|=2\frac{2023}{2024}$

**29．（多选题）**（2024·福建厦门·一模）设椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右焦点分别为$F_1$，$F_2$，过$F_1$

的直线与$C$交于$A$，$B$两点，若$|F_1F_2|=2$，且$\triangle ABF_2$的周长为8，则（　　）

A．$a=2$　　B．$C$的离心率为$\frac{1}{4}$

C．$|AB|$可以为$\pi$　　D．$\angle BAF_2$可以为直角

**30．（多选题）**若矩形$ABCD$的所有顶点都在椭圆$E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{2}=1(a>0)$上，且$|AB|=2\sqrt{2}$，$|AC|=2\sqrt{3}$，点$P$是$E$上与$A,B,C,D$不重合的动点，则（　　）

A．$E$的长轴长为4　　B．存在点$P$，使得$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}=-\frac{1}{2}$

C．直线$PA,PB$的斜率之积恒为$-\frac{1}{2}$　　D．直线$PA,PC$的斜率之积恒为$-\frac{1}{2}$

**31．（多选题）**（2024·湖北·模拟预测）已知$F_1,F_2$是椭圆$E:\frac{y^2}{4}+\frac{x^2}{3}=1$的两个焦点，点$P$在椭圆$E$上，则（　　）

A．点$F_1,F_2$在$x$轴上　　B．椭圆$E$的长轴长为4

C．椭圆$E$的离心率为$\frac{1}{2}$　　D．使得$\triangle F_1PF_2$为直角三角形的点$P$恰有6个

**32．（多选题）**（2024·高三·河南·期中）已知$F_1,F_2$分别是椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右焦点，且$AF_1\perp F_1F_2$，直线$AF_2$与椭圆的另一个交点为$B$，且$\overrightarrow{AF_2}=3\overrightarrow{F_2B}$，则下列结论中正确的是（　　）

A．椭圆的长轴长是短轴长的$\sqrt{6}$倍　　B．线段$AF_1$的长度为$\frac{2}{3}a$

C．椭圆的离心率为$\frac{\sqrt{3}}{3}$　　D．$\triangle BF_1F_2$的周长为$\frac{6+\sqrt{3}}{3}a$

**33．（多选题）**（2024·全国·二模）已知圆$O$：$x^2+y^2=3$经过椭圆$C$：$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）的两个焦点$F_1$，$F_2$，且$P$为圆$O$与椭圆$C$在第一象限内的公共点，且$\triangle PF_1F_2$的面积为1，则下列结论正确的是（　　）

A．椭圆$C$的长轴长为2　　B．椭圆$C$的短轴长为2

C．椭圆$C$的离心率为$\frac{1}{2}$　　D．点$P$的坐标为$\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$

## 题型八：利用第一定义求解轨迹

34．（2024·安徽·二模）已知定点$A(0,2)$，$B(0,-2)$，$C(3,2)$，以$C$为一个焦点作过A，$B$两点的椭圆，则椭圆的另一个焦点$F$的轨迹方程是_________.

35． 已知$M(-2,0)$，$P$是圆$N:x^2-4x+y^2-32=0$上一动点，线段$MP$的垂直平分线交$NP$于点$Q$，则动点$Q$的轨迹方程为______．

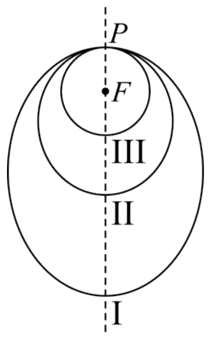
36．（2024·高三·广东揭阳·期中）设A，$B$两点的坐标分别为$(-5,0)$，$(5,0)$，直线$AM$、$BM$相交于点$M$，且它们的斜率之积是$-4$，则点$M$的轨迹方程是______．

37．若$\vee ABC$的两个顶点$B(0,-3)$，$C(0,3)$，周长为$16$，则第三个顶点A的轨迹方程是_________．

38．圆$C_1:(x+2)^2+y^2=1$与$C_2:(x-2)^2+y^2=49$的位置关系为_____；与圆$C_1$，$C_2$都内切的动圆圆心的轨迹方程为_____．

## 题型九：椭圆的实际应用

39．（2024·重庆·三模）如图所示，"嫦娥一号"探月卫星沿地月转移轨道飞向月球，在月球附近一点$P$变轨进入以月球球心$F$为一个焦点的椭圆轨道I绕月飞行，之后卫星在$P$点第二次变轨进入仍以$F$为一个焦点的椭圆轨道II绕月飞行，最终卫星在$P$点第三次变轨进入以$F$为圆心的圆形轨道III绕月飞行，若用$2c_1$和$2c_2$分别表示椭圆轨道I和II的焦距，用$2a_1$和$2a_2$分别表示椭圆轨道I和II的长轴的长，则（    ）




A．$a_1-c_1<a_2-c_2$

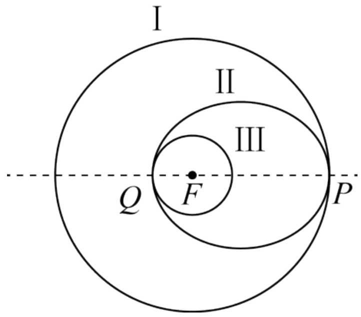
B．$a_1+c_1<a_2+c_2$

C．$\dfrac{c_2}{a_1}>\dfrac{c_1}{a_2}$

D．$\dfrac{c_1}{a_1}>\dfrac{c_2}{a_2}$

40． 2022年神舟接力腾飞，中国空间站全面建成，我们的"太空之家"遨游苍穹．太空中飞船与空间站的对接，需要经过多次变轨．某飞船升空后的初始运行轨道是以地球的中心为一个焦点的椭圆，其远地点（长轴端点中离地面最远的点）到地面的距离为$S_1$，近地点（长轴端点中离地面最近的点）到地面的距离为$S_2$，地球的半径为$R$，则该椭圆的短轴长为_____（用$S_1$，$S_2$，$R$表示）．

41．如图所示，为完成一项探月工程，某月球探测器飞行到月球附近时，首先在以月球球心$F$为圆心的圆形轨道Ⅰ上绕月球飞行，然后在$P$点处变轨进入以$F$为一个焦点的椭圆轨道Ⅱ绕月球飞行，最后在$Q$点处变轨进入以$F$为圆心的圆形轨道Ⅲ绕月球飞行，设圆形轨道Ⅰ的半径为$R$，圆形轨道Ⅲ的半径为$r$，则椭圆轨道Ⅱ的离心率为_______．（用$R$、$r$表示）




# 02

## 重难创新练

1. （2024·广东·一模）已知点 $F$，$A$ 分别是椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左焦点、右顶点，$B(0,b)$ 满足 $\overrightarrow{FB}\cdot\overrightarrow{AB}=0$，则椭圆的离心率等于（　）

A．$\frac{\sqrt{3}+1}{2}$　　B．$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$　　C．$\frac{\sqrt{3}-1}{2}$　　D．$\frac{\sqrt{5}+1}{2}$

2. （2024·辽宁·模拟预测）已知焦点在 $x$ 轴上的椭圆 $C:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{b^2}=1(b>0)$ 的短轴长为 2，则其离心率为（　）

A．$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B．$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C．$\frac{1}{2}$　　D．$\frac{1}{4}$

3. （2024·河南周口·模拟预测）已知椭圆 $C:\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ 的一个焦点为 $F$，点 $P$，$Q$ 是 $C$ 上关于原点对称的两点．则 $|PF|^2+6|QF|$ 的取值范围为（　）

A．$[2,26]$　　B．$[51,52]$　　C．$[51,76]$　　D．$[52,76]$

4. （2024·湖北武汉·模拟预测）设椭圆 $E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左右焦点为 $F_1,F_2$，右顶点为 A，已知点 $P$ 在椭圆 $E$ 上，若 $\angle F_1PF_2=90^\circ,\angle PAF_2=45^\circ$，则椭圆 $E$ 的离心率为（　）

A．$\frac{5}{7}$　　B．$\frac{\sqrt{6}}{3}$　　C．$2-\sqrt{2}$　　D．$\sqrt{3}-1$

5. （2024·浙江·模拟预测）已知 $F_1$，$F_2$ 分别为椭圆 $C$：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左右焦点，过 $F_2$ 的一条直线与 $C$ 交于 $A$，$B$ 两点，且 $AF_1\perp AB$，$|BF_2|=1$，则椭圆长轴长的最小值是（　　）

A．$4\sqrt{2}$　　B．$3+2\sqrt{2}$　　C．6　　D．$4+2\sqrt{2}$

6．（2024·陕西咸阳·模拟预测）设$F_1$，$F_2$分别是椭圆$E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右焦点，过$F_2$的直线交椭圆于A，$B$两点，且$\overrightarrow{AF_1}\cdot\overrightarrow{AF_2}=0$，$\overrightarrow{AF_2}=2\overrightarrow{F_2B}$，则椭圆$E$的离心率为（　）．

A．$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B．$\frac{\sqrt{5}}{3}$　　C．$\frac{3}{4}$　　D．$\frac{3}{5}$

7．（2024·江西新余·模拟预测）已知焦点在$x$轴上的椭圆$C$的左右焦点分别为$F_1$、$F_2$，经过$F_2$的直线$l$与$C$交于$A$、$B$两点，若$\overrightarrow{F_1A}\cdot\overrightarrow{F_1B}=16$，$\overrightarrow{AF_1}\cdot\overrightarrow{AB}=9$，$\overrightarrow{BF_1}\cdot\overrightarrow{BA}=0$，则$C$的方程为：（　）．

A．$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$　　B．$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$　　C．$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{8}=1$　　D．$\frac{x^2}{3}+y^2=1$

8．（2024·内蒙古包头·三模）设$O$为坐标原点，$F_1$，$F_2$为椭圆$C$：$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$的左，右两个焦点，点$R$在$C$上，点$E$是线段$RF_1$上靠近点$F_1$的三等分点，若$OR\perp OE$，则$|OR|=$（　）

A．$\frac{5}{2}$　　B．$\sqrt{5}$　　C．$\sqrt{6}$　　D．$\frac{13}{5}$

9．（2024·全国·模拟预测）已知椭圆$r:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\left(a^2>0,b^2>0,a^2\neq b^2\right)$过点$\left(1,1\right)$，其右顶点A，上顶点$B$．那么以下说法正确的是（　）

A．设$c$是半焦距$O$到$\Gamma$的其中一个焦点的距离，那么必然有$c^2<a^2$

B．$O$到直线$AB$的距离$d_{O-AB}$不是定值

C．$\Gamma$和$x^2+y^2+xy=\frac{3}{4}$没有交点

D．三角形$OAB$面积的取值范围是$[1,+\infty)$

10．**（多选题）**（2024·四川·一模）已知椭圆$E:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$的左顶点为A，左、右焦点分别为$F_1,F_2$，过点$F_1$的直线与椭圆相交于$P,Q$两点，则（　）

A．$|F_1F_2|=1$

B．$|PQ|\leq 4$

C．当$F_2,P,Q$不共线时，$\triangle F_2PQ$的周长为8

D．设点$P$到直线$x=-4$的距离为$d$，则$d=2|PF_1|$

11．**（多选题）**（2024·河南·模拟预测）已知椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的上顶点为$B(0,\sqrt{2})$，右顶点为$A$，左、右焦点分别为$F_1,F_2$，$\cos\angle F_1BF_2=0$．若$P$为$C$上与点$A$，$B$不重合的动点，直线$PA$与$y$轴交于点$M$，直线$PB$与$x$轴交于点$N$，则（　）

A．$C$ 的方程为$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$　　　　B．$\triangle PF_1F_2$ 面积的最大值为 2

C．坐标原点 $O$ 到直线 $AB$ 的距离为$\frac{2\sqrt{3}}{3}$ D．$|AN|\cdot|BM|=4\sqrt{2}$

12．（**多选题**）（2024·江西·模拟预测）已知 $A(-2,0)$，$B(2,0)$，$C(1,0)$，动点 $M$ 满足 $MA$ 与 $MB$ 的斜率之积为 $-\frac{3}{4}$，动点 $M$ 的轨迹记为 $\Gamma$，过点 $C$ 的直线交 $\Gamma$ 于 $P$，$Q$ 两点，且 $P$，$Q$ 的中点为 $R$，则（　）

A．$M$ 的轨迹方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$

B．$|MC|$ 的最小值为 1

C．若 $O$ 为坐标原点，则△$OPQ$ 面积的最大值为$\frac{3}{2}$

D．若线段 $PQ$ 的垂直平分线交 $x$ 轴于点 $D$，则 $R$ 点的横坐标是 $D$ 点的横坐标的 4 倍

13．（2024·广东佛山·模拟预测）定义离心率 $e=\frac{\sqrt{5}}{3}$ 的椭圆为“西瓜椭圆”.已知椭圆 $C:\frac{x^2}{m}+\frac{y^2}{16}=1(m>16)$ 是“西瓜椭圆”，则 $m=$_____.若“西瓜椭圆” $E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的右焦点为 $F$，直线 $y=kx$ 与椭圆 $E$ 交于 $A,B$ 两点，以线段 $AB$ 为直径的圆过点 $F$，则 $k=$_____.

14．（2024·山东济南·三模）已知 $F_1$、$F_2$ 是椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左，右焦点，点 $P$ 为椭圆上一点，$O$ 为坐标原点，$\triangle POF_2$ 为正三角形，则该椭圆的离心率为__________.

15．（2024·山东·二模）已知椭圆 $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{6}=1$ 的焦点分别是 $F_1$，$F_2$，点 $M$ 在椭圆上，如果 $\overrightarrow{F_1M}\cdot\overrightarrow{F_2M}=0$，那么点 $M$ 到 $x$ 轴的距离是_____.

16．（2024·浙江杭州·模拟预测）椭圆 $C$：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）的左、右焦点分别为 $F_1$，$F_2$，过 $F_1$ 且斜率为 $-3\sqrt{7}$ 的直线与椭圆交于 A，$B$ 两点（A 在 $B$ 左侧），若 $(\overrightarrow{F_1A}+\overrightarrow{F_1F_2})\cdot\overrightarrow{AF_2}=0$，则 $C$ 的离心率为_____.

## 03

## 真题实战练

1．（2022 年高考全国甲卷数学真题）已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为$\frac{1}{3}$，$A_1,A_2$ 分别为 $C$

的左、右顶点，$B$ 为 $C$ 的上顶点．若 $\overrightarrow{BA_1}\cdot\overrightarrow{BA_2}=-1$，则 $C$ 的方程为（　）

A．$\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{16}=1$　　B．$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{8}=1$　　C．$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$　　D．$\frac{x^2}{2}+y^2=1$

2．（2022 年高考全国甲卷数学真题）椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左顶点为 $A$，点 $P$，$Q$ 均在 $C$ 上，且关于 $y$ 轴对称．若直线 $AP,AQ$ 的斜率之积为 $\frac{1}{4}$，则 $C$ 的离心率为（　）

A．$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B．$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C．$\frac{1}{2}$　　D．$\frac{1}{3}$

3．（2021 年全国高考乙卷数学试题）设 $B$ 是椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的上顶点，若 $C$ 上的任意一点 $P$ 都满足 $|PB|\le 2b$，则 $C$ 的离心率的取值范围是（　）

A．$\left[\frac{\sqrt{2}}{2},1\right)$　　B．$\left[\frac{1}{2},1\right)$　　C．$\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$　　D．$\left(0,\frac{1}{2}\right]$

4．（2021 年全国新高考 I 卷数学试题）已知 $F_1$，$F_2$ 是椭圆 $C$：$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ 的两个焦点，点 $M$ 在 $C$ 上，则 $|MF_1|\cdot|MF_2|$ 的最大值为（　）

A．13　　B．12　　C．9　　D．6

5．（2022 年新高考全国 I 卷数学真题）已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，$C$ 的上顶点为 $A$，两个焦点为 $F_1$，$F_2$，离心率为 $\frac{1}{2}$．过 $F_1$ 且垂直于 $AF_2$ 的直线与 $C$ 交于 $D$，$E$ 两点，$|DE|=6$，则 $\vee ADE$ 的周长是____________．

6．（2021 年浙江省高考数学试题）已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，焦点 $F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)\ (c>0)$，若过 $F_1$ 的直线和圆 $\left(x-\frac{1}{2}c\right)^2+y^2=c^2$ 相切，与椭圆在第一象限交于点 $P$，且 $PF_2\perp x$ 轴，则该直线的斜率是________，椭圆的离心率是________．

7．（2024 年北京高考数学真题）已知椭圆 $E$：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$，以椭圆 $E$ 的焦点和短轴端点为顶点的四边形是边长为 2 的正方形.过点 $\left(0,t\right)\left(t>\sqrt{2}\right)$ 且斜率存在的直线与椭圆 $E$ 交于不同的两点 $A,B$，过点 A 和 $C\left(0,1\right)$ 的直线 $AC$ 与椭圆 $E$ 的另一个交点为 $D$．

(1)求椭圆 $E$ 的方程及离心率；

(2)若直线 $BD$ 的斜率为 0，求 $t$ 的值．

8．（2024年高考全国甲卷数学真题）已知椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的右焦点为$F$，点$M\left(1,\frac{3}{2}\right)$在$C$上，且$MF\perp x$轴．

(1)求$C$的方程；

(2)过点$P\left(4,0\right)$的直线交$C$于$A,B$两点，$N$为线段$FP$的中点，直线$NB$交直线$MF$于点$Q$，证明：$AQ\perp y$轴．

9．（2024年天津高考数学真题）已知椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$椭圆的离心率$e=\frac{1}{2}$．左顶点为A，下顶点为$B$，$C$是线段$OB$的中点，其中$S_{\triangle ABC}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$．

(1)求椭圆方程．

(2)过点$\left(0,-\frac{3}{2}\right)$的动直线与椭圆有两个交点$P$，$Q$．在$y$轴上是否存在点$T$使得$\overrightarrow{TP}\cdot\overrightarrow{TQ}\le 0$．若存在求出这个$T$点纵坐标的取值范围，若不存在请说明理由．

10．（2023年天津高考数学真题）已知椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左右顶点分别为$A_1,A_2$，右焦点为$F$，已知$\left|A_1F\right|=3,\left|A_2F\right|=1$．

(1)求椭圆的方程和离心率；

(2)点$P$在椭圆上（异于椭圆的顶点），直线$A_2P$交$y$轴于点$Q$，若三角形$A_1PQ$的面积是三角形$A_2PF$面积的二倍，求直线$A_2P$的方程．

11．（2022年新高考天津数学高考真题）椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$的右焦点为$F$，右顶点$A$和上顶点为$B$

满足$\frac{|BF|}{|AB|}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(1)求椭圆的离心率$e$；

(2)直线$l$与椭圆有唯一公共点$M$，与$y$轴相交于点$N$（$N$异于$M$）. 记$O$为原点，若$|OM|=|ON|$，且$\triangle MON$的面积为$\sqrt{3}$，求椭圆的方程.

# 第 05 讲　椭圆及其性质

# 目录

## 01
# 模拟基础练

## 题型一：椭圆的定义与标准方程

1．已知$F_1(0,-1)$，$F_2(0,1)$是椭圆$C$的两个焦点，过$F_2$且垂直于$y$轴的直线交$C$于$A$，$B$两点，且$|AB|=3$，则椭圆$C$的标准方程为________.

【答案】$\frac{y^2}{4}+\frac{x^2}{3}=1$

【解析】根据题意，如图：

$AB=3$，由椭圆的对称性可得：$|AF_2|=\frac{1}{2}|AB|=\frac{3}{2}$，

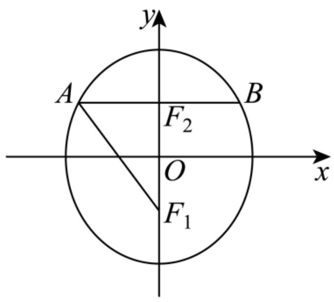
又$|F_1F_2|=2$，由勾股定理可得：$|AF_1|=\sqrt{|F_1F_2|^2+|AF_2|^2}=\sqrt{2^2+(\frac{3}{2})^2}=\frac{5}{2}$，

所以$2a=|AF_1|+|AF_2|=4$，$a=2$，

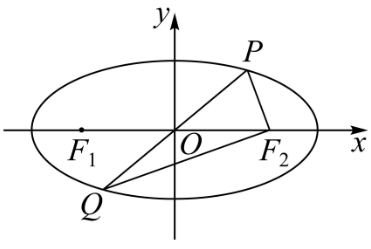
又$c=1$，则$b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{3}$，

椭圆标准方程为$\frac{y^2}{4}+\frac{x^2}{3}=1$.

故答案为：$\frac{y^2}{4}+\frac{x^2}{3}=1$.

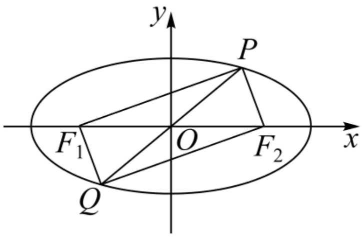



2．已知椭圆$E$：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右焦点分别为$F_1$，$F_2$，过坐标原点的直线交$E$于$P$，$Q$两点，且$PF_2\perp F_2Q$，且$S_{\triangle PF_2Q}=\frac{1}{2}a^2$，$|PF_2|+|F_2Q|=8$，则$E$的标准方程为________.




【答案】$\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{8}=1$

【解析】连接 $PF_1, QF_1$，因为 $OP=OQ, OF_1=OF_2$，




所以四边形 $PF_1QF_2$ 是平行四边形，

所以 $PF_1=F_2Q$， $PF_2=QF_1$，

又 $\because PF_2\perp F_2Q$，所以四边形 $PF_1QF_2$ 为矩形，

设 $PF_1=m, PF_2=n$

则由题意得 $\begin{cases} m+n=2a=8 \\ m^2+n^2=4c^2 \\ \dfrac{1}{2}mn=\dfrac{1}{2}a^2 \end{cases}$，解得 $\begin{cases} a=4 \\ c=2\sqrt{2} \end{cases}$，

则 $b^2=a^2-c^2=8$，则标准方程为 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{8}=1$，

故答案为：$\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{8}=1$.

3．已知椭圆两个焦点的坐标分别是 $(-2,0)$，$(2,0)$，并且经过点 $\left(\dfrac{5}{2},-\dfrac{3}{2}\right)$，则它的标准方程为_____.

【答案】$\dfrac{x^2}{10}+\dfrac{y^2}{6}=1$

【解析】因为椭圆的焦点在 $x$ 轴上，所以设它的标准方程为 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，

由椭圆的定义知 $2a=\sqrt{(\dfrac{5}{2}+2)^2+(-\dfrac{3}{2})^2}+\sqrt{(\dfrac{5}{2}-2)^2+(-\dfrac{3}{2})^2}=2\sqrt{10}$，

所以 $a=\sqrt{10}$ .

又因为 $c=2$，

所以$b^2=a^2-c^2=6$，

所以椭圆的标准方程为$\frac{x^2}{10}+\frac{y^2}{6}=1$.

故答案为：$\frac{x^2}{10}+\frac{y^2}{6}=1$.

## 题型二：椭圆方程的充要条件

4．若方程$\frac{x^2}{m}+\frac{y^2}{4-m}=1$表示椭圆，则实数$m$的取值范围为（　）

A．$m>0$　　B．$m<4$　　C．$0<m<4$　　D．$0<m<4$且$m\neq 2$

【答案】A

【解析】$\because$方程$\frac{x^2}{m}+\frac{y^2}{4-m}=1$表示椭圆，

$\therefore\begin{cases}m>0\\4-m>0\\m\neq 4-m\end{cases}$，得$\begin{cases}m>0\\m<4\\m\neq 2\end{cases}$，得$0<m<4$且$m\neq 2$.

故选：D.

5．若曲线$C:(k-4)x^2+\frac{y^2}{6-k}=1$表示椭圆，则实数$k$的取值范围是（　）

A．$(4,6)$　　B．$(4,5)$　　C．$(5,6)$　　D．$(4,5)\cup(5,6)$

【答案】A

【解析】因为曲线$C:(k-4)x^2+\frac{y^2}{6-k}=1$表示椭圆，即$C:\frac{x^2}{\frac{1}{k-4}}+\frac{y^2}{6-k}=1$表示椭圆

则应满足$\begin{cases}\frac{1}{k-4}>0,\\6-k>0,\\\frac{1}{k-4}\neq 6-k,\end{cases}$即$k\in(4,5)\cup(5,6)$.

故选：D.

6．若方程$\frac{x^2}{4-t}+\frac{y^2}{t-1}=1$表示焦点在$x$轴的椭圆，则$t$的取值范围是（　）

A．$(1,4)$　　B．$\left(1,\frac{5}{2}\right)\cup\left(\frac{5}{2},4\right)$　　C．$\left(1,\frac{5}{2}\right)$　　D．$\left(\frac{5}{2},4\right)$

【答案】B

【解析】命题等价于$4-t>t-1>0$，解得$1<t<\frac{5}{2}$.

故选：C.

7．（2024·河南·模拟预测）若方程$\left(m+1\right)x^2+\left(1-m\right)y^2=1-m^2$表示焦点在$x$轴上的椭圆，则（　）

A．$-1<m<1$　　B．$0<m<1$

C．$-1<m<0$　　D．$-1<m<0$或$0<m<1$

【答案】B

【解析】方程$\left(m+1\right)x^2+\left(1-m\right)y^2=1-m^2$可化为：$\frac{x^2}{1-m}+\frac{y^2}{m+1}=1$，

因为方程$\frac{x^2}{1-m}+\frac{y^2}{m+1}=1$表示焦点在$x$轴上的椭圆，

所以$\begin{cases}1-m>m+1\\ m+1>0\end{cases}$，解得$-1<m<0$.

故选：C

8．设$m$为实数，若方程$\frac{x^2}{2-m}+\frac{y^2}{m-1}=1$表示焦点在$x$轴上的椭圆，则实数$m$的取值范围是（　）

A．$\frac{3}{2}<m<2$　　B．$m>\frac{3}{2}$

C．$1<m<2$　　D．$1<m<\frac{3}{2}$

【答案】A

【解析】$\frac{x^2}{2-m}+\frac{y^2}{m-1}=1$表示焦点在$x$轴上的椭圆，可得$2-m>m-1>0$，解得$1<m<\frac{3}{2}$.

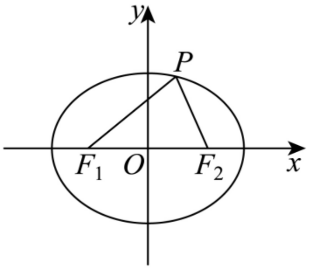
故选：D

## 题型三：椭圆中焦点三角形的周长与面积及其他问题

9．已知$F_1,F_2$是椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的两个焦点，$P$为椭圆$C$上的一点，且$\overrightarrow{PF_1}\perp\overrightarrow{PF_2}$，若$\triangle PF_1F_2$的面积为9，则$b$的值为_____.

【答案】3

【解析】




$\because |PF_1|+|PF_2|=2a$，

$\therefore |PF_1|^2+|PF_2|^2+2|PF_1|\cdot|PF_2|=4a^2$，①

又 $\overrightarrow{PF_1}\perp\overrightarrow{PF_2}$,

$\therefore |PF_1|^2+|PF_2|^2=|F_1F_2|^2=4c^2$ ②

$\therefore$ ①-②得：$2|PF_1|\cdot|PF_2|=4(a^2-c^2)=4b^2$，

$\therefore \frac{1}{2}|PF_1|\cdot|PF_2|=b^2$,

$\because \triangle PF_1F_2$ 的面积为 9，

$\therefore S_{\triangle PF_1F_2}=\frac{1}{2}|PF_1|\cdot|PF_2|=b^2=9, b>0$，

$\therefore b=3$.

故答案为：3.

10．设椭圆 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{12}=1$ 的左右焦点为 $F_1,F_2$，椭圆上点 $P$ 满足 $|PF_1|:|PF_2|=2:3$，则 $\triangle PF_1F_2$ 的面积为________.

【答案】12

【解析】由椭圆定义可得 $|PF_1|+|PF_2|=2a=10$，

则有 $\frac{|PF_1|}{10-|PF_1|}=\frac{2}{3}$，即 $|PF_1|=4$，$|PF_2|=6$，

又 $|F_1F_2|=2c=2\sqrt{25-12}=2\sqrt{13}$，

由 $4^2+6^2=52=\left(2\sqrt{13}\right)^2$，故 $\angle F_1PF_2=90°$，

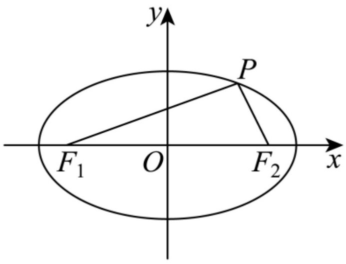
故 $S_{\triangle PF_1F_2}=\frac{1}{2}\times4\times6=12$.

故答案为：12.

11．已知 $F_1$，$F_2$ 分别是椭圆 $C$：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点，椭圆 $C$ 的离心率为 $\sqrt{3}-1$，$P$ 是 $C$ 在第一象限上的一点.若 $PF_1\perp PF_2$，则 $\cos\angle PF_2F_1=$_____.

【答案】$\frac{1}{2}$/0.5

【解析】如图，记$\angle PF_2F_1=\theta$，$|F_1F_2|=2c$，




因为$PF_1\perp PF_2$，则$|PF_2|=2c\cos\theta$，$|PF_1|=2c\sin\theta$，

由椭圆的定义可得$|PF_1|+|PF_2|=2(\sin\theta+\cos\theta)c=2a$，

所以$\frac{c}{a}=\frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}=\sqrt{3}-1$，则$\sin\theta+\cos\theta=\frac{\sqrt{3}+1}{2}$，

又$0<\theta<\frac{\pi}{2}$且$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$，有$\begin{cases}\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \cos\theta=\frac{1}{2}\end{cases}$或$\begin{cases}\sin\theta=\frac{1}{2}\\ \cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$，

解得$\theta=\frac{\pi}{3}$或$\theta=\frac{\pi}{6}$，又点$P$在第一象限，所以$|PF_1|>|PF_2|$，

得$\theta=\frac{\pi}{3}$，则$\cos\angle PF_2F_1=\frac{1}{2}$.

故答案为：$\frac{1}{2}$.

12．已知椭圆$\frac{y^2}{25}+\frac{x^2}{16}=1$的焦点为$F_1$、$F_2$，$P$为该椭圆上任意一点（异于长轴端点），则$\triangle PF_1F_2$的周长为（　）

A．10　　B．13　　C．14　　D．16

【答案】A

【解析】由题意可知：$a=5,b=4,c=\sqrt{a^2-b^2}=3$，

则$|PF_1|+|PF_2|=2a=10,|F_1F_2|=2c=6$，

所以$\triangle PF_1F_2$的周长为$|PF_1|+|PF_2|+|F_1F_2|=16$.

故选：D.

## 题型四：椭圆上两点距离的最值问题

13．（2024·宁夏银川·二模）已知椭圆$C$：$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$的左焦点为$F_1$，$M$为椭圆$C$上任意一点，则$|MF_1|$的最小值为_____.

【答案】1

【解析】由椭圆 $C$：$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 知：$a=2,b=\sqrt{3}$，故 $c=1$，

所以 $F_1(-1,0)$，

所以，$|MF_1|$ 的最小值为 $a-c=1$.

故答案为：1

14．已知 $AB=4$，点 $P$ 在点 A，$B$ 所在的一个平面内运动且 $PA+PB=6$，则 $PA$ 的最大值是_____，最小值是_____.

【答案】 5 1

【解析】依题意知，点 $P$ 的轨迹是以 A，$B$ 为焦点的椭圆，

$2a=6$，$2c=4$，

$\therefore a=3$，$c=2$.

$\therefore PA_{\max}=a+c=3+2=5$，$PA_{\min}=a-c=3-2=1$.

故答案为：5；1.

15．过椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的右焦点 $F$ 且与长轴垂直的弦的长为 $3\sqrt{2}$，过点 $P(2,1)$ 且斜率为 $-1$ 的直线与 $C$ 相交于 $A,B$ 两点，若 $P$ 恰好是 $AB$ 的中点，则椭圆 $C$ 上一点 $M$ 到 $F$ 的距离的最大值为________.

【答案】$3\sqrt{2}+3$/$3+3\sqrt{2}$

【解析】法一：将 $x=c$ 代入椭圆 $C$ 的方程得 $y=\pm\frac{b^2}{a}$，所以 $\frac{2b^2}{a}=3\sqrt{2}$ ①，

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1,\frac{x_2^2}{a^2}+\frac{y_2^2}{b^2}=1$，

两式相减得 $\frac{(x_1-x_2)(x_1+x_2)}{a^2}+\frac{(y_1-y_2)(y_1+y_2)}{b^2}=0$，

又 $x_1+x_2=4$，$y_1+y_2=2,\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-1$，所以 $\frac{2}{a^2}-\frac{1}{b^2}=0$ ②，

解①②得 $a=3\sqrt{2},b=3$，所以 $c=\sqrt{a^2-b^2}=3$，

所以 $C$ 上的点 $M$ 到焦点 $F$ 的距离的最大值为 $a+c=3\sqrt{2}+3$.

法二：将 $x=c$ 代入椭圆 $C$ 的方程得 $y=\pm\frac{b^2}{a}$，所以 $\frac{2b^2}{a}=3\sqrt{2}$ ①，

直线 $AB$ 的方程是 $y-1=-(x-2)$，即 $y=3-x$，

代入椭圆的方程并消去 $y$ 整理得 $(a^2+b^2)x^2-6a^2x+9a^2-a^2b^2=0$，

则 $\Delta=(-6a^2)^2-4(a^2+b^2)(9a^2-a^2b^2)=4a^2b^2(a^2+b^2-9)>0$，

设 $A(x_1,y_1)$， $B(x_2,y_2)$， 则 $x_1+x_2=\dfrac{6a^2}{a^2+b^2}=4$， 即 $a^2=2b^2$ ②，

解①②得 $a=3\sqrt{2},b=3$， 满足 $\Delta>0$， 所以 $c=\sqrt{a^2-b^2}=3$，

所以 $C$ 上的点 $M$ 到焦点 $F$ 的距离的最大值为 $a+c=3\sqrt{2}+3$.

故答案为： $3\sqrt{2}+3$.

16．已知椭圆 $C:\dfrac{y^2}{a^2}+x^2=1(a>1)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$， $P$ 为椭圆 $C$ 上的一个动点，定点 $A(-2,0)$，则 $|PA|$ 的最大值为________.

【答案】3

【解析】由椭圆 $C:\dfrac{y^2}{a^2}+x^2=1(a>1)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

可得 $e^2=\dfrac{c^2}{a^2}=\dfrac{a^2-1}{a^2}=\dfrac{1}{2}$， 解得 $a^2=2$， 所以椭圆的方程为 $\dfrac{y^2}{2}+x^2=1$，

设 $P(x,y)$， 则 $|PA|^2=(x+2)^2+y^2=(x+2)^2+2(1-x^2)=-x^2+4x+6=-(x-2)^2+10$，

因为 $-1\le x\le 1$， 当 $x=1$ 时， 可得 $|PA|^2$ 取得最大值， 最大值为 $9$，

所以 $|PA|$ 的最大值为 $3$.

故答案为： $3$.

## 题型五：椭圆上两线段的和差最值问题

17．设实数 $x,y$ 满足 $\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{4}=1,\sqrt{x^2+y^2-2y+1}+\sqrt{x^2+y^2-2x+1}$ 的最小值为（　）

A． $2\sqrt{5}-\sqrt{2}$　　B． $1+\sqrt{5}$　　C． $\sqrt{2}$　　D．前三个答案都不对

【答案】A

【解析】设 $P(x,y)$， 则 $P$ 在椭圆 $\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{4}=1$ 上，

又 $\sqrt{x^2+y^2-2y+1}+\sqrt{x^2+y^2-2x+1}=\sqrt{x^2+(y-1)^2}+\sqrt{(x-1)^2+y^2}$，

设 $S(0,1),F_2(1,0)$， 则 $F_2$ 为椭圆的右焦点，

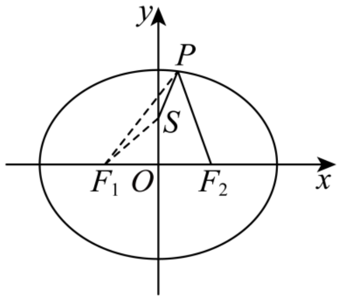
如图，设椭圆的左焦点为 $F_1(-1,0)$， 则：

$\sqrt{x^2+y^2-2y+1}+\sqrt{x^2+y^2-2x+1}=|PS|+|PF_2|=2\sqrt{5}+|PS|-|PF_1|\ge 2\sqrt{5}-|SF_1|$，

当且仅当 $P,S,F_1$ 三点共线且 S 在 $P,F_1$ 之间时等号成立，

而 $|SF_1|=\sqrt{2}$， 故 $\sqrt{x^2+y^2-2y+1}+\sqrt{x^2+y^2-2x+1}$ 的在最小值为 $2\sqrt{5}-\sqrt{2}$，

故选：A.

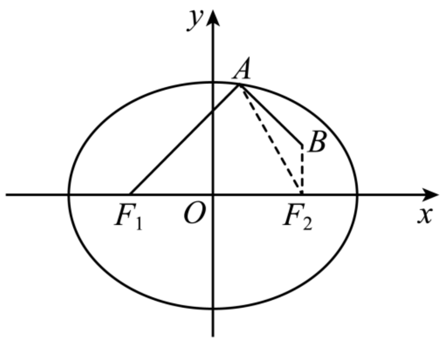



18．（2024·甘肃定西·统考模拟预测）已知椭圆 $C$：$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$的左、右焦点分别为$F_1$，$F_2$，$A$ 是 $C$ 上一点，$B(2,1)$，则$|AB|+|AF_1|$的最大值为（　）

A．7　　B．8　　C．9　　D．11

【答案】A

【解析】




设椭圆的半焦距为$c$，则$F_2(2,0)$，$a=3$，

如图，连接$AF_2$，则$|AB|+|AF_1|=|AB|+2a-|AF_2|=6+|AB|-|AF_2|$，

而$|AB|-|AF_2|\le|BF_2|=1$，当且仅当$A,F_2,B$共线且$F_2$在$A,B$中间时等号成立，

故$|AB|+|AF_1|$的最大值为$7$.

故选：A.

19．已知点 $P$ 为椭圆$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$上任意一点，点 $M$、$N$ 分别为$(x-1)^2+y^2=1$和$(x+1)^2+y^2=1$上的点，则$|PM|+|PN|$的最大值为（　）

A．4　　B．5　　C．6　　D．7

【答案】B

【解析】设圆$(x-1)^2+y^2=1$和圆$(x+1)^2+y^2=1$的圆心分别为$A,B$,半径分别为$r_1,r_2$.

则椭圆$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$的焦点为$A(-1,0),B(1,0)$.

又$|PA|+r_1\ge|PM|$,$|PB|+r_2\ge|PN|$，$|PA|+|PB|=2a=4$，

故$|PM|+|PN|\le|PA|+|PB|+r_1+r_2$，

当且仅当$M,N$分别在$PA,PB$的延长线上时取等号.

此时$|PM|+|PN|$最大值为$|PA|+|PB|+r_1+r_2=4+1+1=6$.

故选：C.

20．已知$F_1$，$F_2$分别为椭圆$C:\frac{x^2}{4}+y^2=1$的两个焦点，$P$为椭圆上一点，则$|PF_1|-|PF_2|$的最大值为（　）

A．2　　B．$2\sqrt{3}$　　C．4　　D．$4\sqrt{3}$

【答案】A

【解析】椭圆上的点$P$满足$|PF_1|-|PF_2|\le|F_1F_2|$，

当点$P$为$F_2F_1$的延长线与$C$的交点时，

$|PF_1|-|PF_2|$达到最大值，最大值为$|F_1F_2|=2\sqrt{3}$.

故选：B

## 题型六：离心率的值及取值范围

21．已知椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$的左右焦点为$F_1$，$F_2$，以$|F_1F_2|$为直径的圆与椭圆有四个交点，则椭圆离心率的范围为（　）.

A．$\left(\frac{\sqrt{2}}{2},1\right)$　　B．$\left[\frac{\sqrt{2}}{2},1\right)$　　C．$\left(\frac{1}{2},1\right)$　　D．$\left[\frac{1}{2},1\right)$

【答案】A

【解析】因为以$|F_1F_2|$为直径的圆与椭圆有四个交点，所以$b<c$，

即$b^2<c^2$，$a^2-c^2<c^2$，$a^2<2c^2$，所以$e^2>\frac{1}{2}$，即$e>\frac{\sqrt{2}}{2}$，

又因为$0<e<1$，所以椭圆离心率的取值范围为$\left(\frac{\sqrt{2}}{2},1\right)$.

故选：A.

22．（2024·全国·模拟预测）已知椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的右焦点为$F$，过坐标原点$O$的直线$l$与椭圆$C$交于A，$B$两点．在$\triangle AFB$中，$\angle AFB=120°$，且满足$S_{\triangle AFB}=\sqrt{3}ac$，则椭圆$C$的离心率为________.

【答案】$\frac{\sqrt{13}-3}{2}$

【解析】设椭圆$C$的左焦点为$F'$，连接$AF'$，$BF'$，根据对称性可知四边形$AFBF'$为平行四边形，

又$\angle AFB=120^\circ$，所以$\angle FAF'=60^\circ$，

又$S_{\triangle ABF}=\frac{1}{2}S_{\square AF'BF}=S_{\triangle F'AF}=\sqrt{3}ac$，

又$|AF|+|AF'|=2a$，$|AF|^2+|AF'|^2-2|AF|\cdot|AF'|\cos\angle FAF'=|FF'|^2$，

即$|AF|^2+|AF'|^2+2|AF|\cdot|AF'|=4a^2$，

$|AF|^2+|AF'|^2-|AF|\cdot|AF'|=4c^2$，

所以$|AF|\cdot|AF'|=\frac{4\left(a^2-c^2\right)}{3}=\frac{4b^2}{3}$，

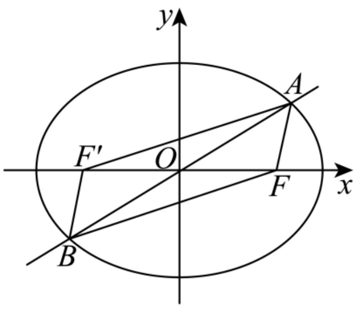
所以$S_{\triangle F'AF}=\frac{1}{2}|AF|\cdot|AF'|\sin\angle FAF'=\frac{\sqrt{3}}{3}b^2$，

即$\sqrt{3}ac=\frac{\sqrt{3}}{3}b^2$，

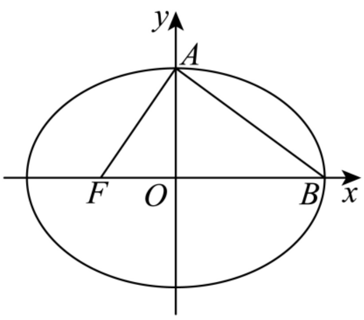
所以$\frac{b^2}{ac}=\frac{a^2-c^2}{ac}=\frac{1}{e}-e=3$，解得$e=\frac{\sqrt{13}-3}{2}$或$e=\frac{-\sqrt{13}-3}{2}$.

又因为$0<e<1$，所以$e=\frac{\sqrt{13}-3}{2}$.

故答案为：$\frac{\sqrt{13}-3}{2}$




23．（2024·高三·河北保定·开学考试）如图，设椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左焦点为$F$，上顶点为A，右顶点为$B$，且$\overrightarrow{FA}\cdot\overrightarrow{AB}=0$，则$C$的离心率为________.




【答案】$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

【解析】因为 $\overrightarrow{FA}\cdot\overrightarrow{AB}=0$，则 $FA\perp AB$，

所以 $\triangle AFB$ 为直角三角形，又 $|FA|=a,|AB|=\sqrt{a^2+b^2},|FB|=a+c$，

得 $a^2+a^2+b^2=(a+c)^2,a^2+a^2+b^2=a^2+2ac+c^2\Rightarrow 2c^2+2ac-2a^2=0$， $\frac{c^2}{a^2}+\frac{c}{a}-1=0\Rightarrow \mathrm{e}=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

故答案为：$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

24．（2024·高三·福建·开学考试）已知椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{m^2}=1$ 的右焦点 $F$ 与抛物线 $y^2=2px\left(p>0\right)$ 焦点重合，$M$ 是椭圆与抛物线的一个公共点，$|MF|=6-3\sqrt{2}$，则椭圆的离心率为_____.

【答案】$\frac{\sqrt{2}}{2}$

【解析】设椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$ 其右焦点为 $F(c,0)$，椭圆上一点 $M(x_0,y_0)$，

则 $|MF|=\sqrt{(x_0-c)^2+{y_0}^2}=\sqrt{{x_0}^2-2cx_0+c^2+(1-\frac{{x_0}^2}{a^2})b^2}=\sqrt{\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right){x_0}^2-2cx_0+a^2}=\left|\frac{c}{a}x_0-a\right|$，

此公式为椭圆的焦半径公式.

因为椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{m^2}=1$ 的右焦点 $F$ 与抛物线 $y^2=2px\left(p>0\right)$ 焦点重合，

所以 $\frac{p}{2}=c$，

设 $M(x_0,y_0)$ 是椭圆与抛物线的一个公共点，因为 $|MF|=6-3\sqrt{2}$，

根据抛物线的定义，$|MF|=x_0+\frac{p}{2}=6-3\sqrt{2}$，

即 $|MF|=x_0+c=6-3\sqrt{2}$ ①

又由椭圆的焦半径公式有 $|MF|=\left|\frac{c}{a}x_0-a\right|=\left|\frac{c}{2}x_0-2\right|=6-3\sqrt{2}$ ②

由①②解得 $c=\sqrt{2}$，

所以离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

故答案为：$\frac{\sqrt{2}}{2}$

25．（2024·高三·河北沧州·期中）已知 $F_1,F_2$ 为椭圆 $C:\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的两个焦点，$P$ 为椭圆 $C$ 上一点，且 $\triangle PF_1F_2$ 的周长为 6，面积的最大值为 $\sqrt{3}$，则椭圆 $C$ 的离心率为________.

【答案】$\frac{1}{2}$/0.5