

福建省莆田第一中学 2023-2024 学年高二下学期期中考试数学

试题

学校:_____姓名:_____班级:_____考号:_____

一、单选题

1. 已知抛物线 $C: y^2 = 2px$ 的焦点为 F , 点 $A(2, m)$ 在抛物线 C 上, 且 $|AF| = 3$, 则 $p =$ ()

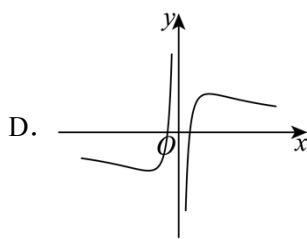
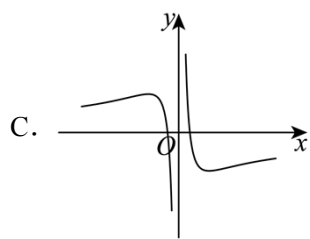
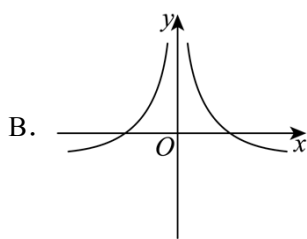
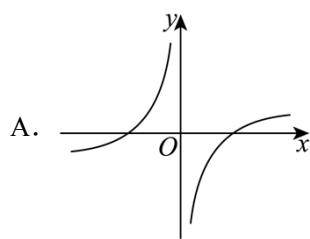
- A. $\frac{1}{2}$ B. 1 C. 2 D. 4

2. 已知 $\left(2x - \frac{1}{x^2}\right)^n$ 的展开式中各项的二项式系数之和为 M , 各项的系数之和为 N , 若

$M - N = 63$, 则展开式中的常数项为 ()

- A. 180 B. 60 C. 280 D. 240

3. 函数 $y = \frac{\ln|x|}{x}$ 的图象大致是 ()



4. 甲、乙二人争夺一场围棋比赛的冠军. 若比赛为“三局两胜”制, 甲在每局比赛中获胜的概率均为 $\frac{2}{3}$, 且各局比赛结果相互独立. 则在甲获得冠军的条件下, 比赛进行了 3 局的概率为

- A. $\frac{4}{5}$ B. $\frac{2}{5}$ C. $\frac{20}{27}$ D. $\frac{8}{27}$

5. 6 位学生在游乐场游玩 A, B, C 三个项目, 每个人都只游玩一个项目, 每个项目都有人游玩, 若 A 项目必须有偶数人游玩, 则不同的游玩方式有 ()

- A. 180 种 B. 210 种 C. 240 种 D. 360 种

6. 双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 ，过 F_2 作 x 轴垂线交双曲线于 A, B 两点，

$\triangle VF_1AB$ 为正三角形，则双曲线的离心率为 ()

- A. $\frac{\sqrt{21}}{3}$ B. $\sqrt{2}$ C. $\sqrt{3}$ D. $\frac{\sqrt{6}}{2}$

7. 甲、乙、丙三人相互做传球训练，第 1 次由甲将球传出，每次传球时，传球者都等可能地将球传给另外两个人中的任何一人，则 6 次传球后球在甲手中的概率为 ()

- A. $\frac{11}{32}$ B. $\frac{31}{96}$ C. $\frac{5}{16}$ D. $\frac{17}{48}$

8. 若对于任意的 $0 < x_1 < x_2 < m$ ，都有 $\frac{x_2 \ln x_1 - x_1 \ln x_2}{x_1 - x_2} > 2$ ，则 m 的最大值为 ()

- A. e B. $\frac{1}{e}$ C. 2 D. $\frac{1}{2}$

二、多选题

9. 下列命题正确的是 ()

- A. 对于事件 A, B ，若 $A \subseteq B$ ，且 $P(A) = 0.3$ ， $P(B) = 0.6$ ，则 $P(B|A) = 1$
 B. 若随机变量 $\xi \sim N(2, \sigma^2)$ ， $P(\xi < 4) = 0.84$ ，则 $P(2 < \xi < 4) = 0.16$
 C. 相关系数 r 的绝对值越接近 1，两个随机变量的线性相关程度越强
 D. 在做回归分析时，残差图中残差点分布的带状区域的宽度越宽表示回归效果越好

10. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q ，其前 n 项的积为 T_n ，且满足 $a_1 > 1$ ， $a_{99}a_{100} - 1 > 0$ ，

$\frac{a_{99} - 1}{a_{100} - 1} < 0$ ，则 ()

- A. $0 < q < 1$ B. $a_{99}a_{101} - 1 < 0$
 C. T_{100} 的值是 T_n 中最大的 D. 使 $T_n > 1$ 成立的最大正整数 n 的值为 198

11. 对于满足一定条件的连续函数 $f(x)$ ，存在一个点 x_0 ，使得 $f(x_0) = x_0$ ，则称该函数为“不动点”函数，而称 x_0 为该函数的一个不动点. 依据不动点理论，下列说法正确的是 ()

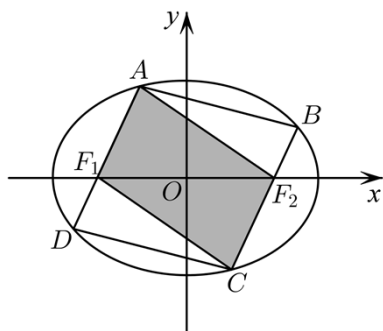
- A. 函数 $f(x) = \ln x + 1$ 有 1 个不动点
 B. 函数 $f(x) = \cos x$ 有 2 个不动点
 C. 若定义域为 $\mathbb{R}$ 的奇函数 $f(x)$ ，其图象上存在有限个不动点，则不动点个数是奇数
 D. 若 $f(x) = \sqrt{e^x - \frac{1}{2}x - a}$ 在区间 $[0, 1]$ 上存在不动点，则实数 a 满足 $1 \leq a \leq e - \frac{3}{2}$

三、填空题

12. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，若 $a_5 + a_7 + a_9 = 6$ ，则 $S_{13} =$ _____.

13. 设函数 $f(x) = m \ln x - \frac{x^2}{2} - 2x$ (m 为实数)，若 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递减，求实数 m 的取值范围_____.

14. 如图所示，在椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 中， F_1, F_2 为其两焦点，过两焦点作直线 $AD \parallel BC$ ，连接各边，若图中阴影部分面积与 $ABCD$ 的面积之比为2:3，则直线 AB 的斜率为_____.



四、解答题

15. 已知 $\{a_n\}$ 是各项均为正数的等比数列，其前 n 项和为 S_n ， $a_1 = 3$ ， $a_1, S_2, a_3 - 6$ 成等差数列.

(1)求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2)若 $b_n = \log_3 a_n$ ，求数列 $\left\{\frac{1}{b_n b_{n+1}}\right\}$ 的前 n 项和 T_n .

16. 某市春节期间7家超市的广告费支出 x_i (万元)和销售额 y_i (万元)数据如下:

超市	A	B	C	D	E	F	G
广告费支出 x_i	1	2	4	6	11	13	19
销售额 y_i	19	32	40	44	52	53	54

(1)若用线性回归模型拟合 y 与 x 的关系，求 y 关于 x 的线性回归方程；

(2) 用二次函数回归模型拟合 y 与 x 的关系, 可得回归方程: $\hat{y} = -0.17x^2 + 5x + 20$, 经计算二次函数回归模型和线性回归模型的相关指数 R^2 分别约为 0.93 和 0.75, 请用 R^2 说明选择哪个回归模型更合适, 并用此模型预测超市应支出多少万元广告费, 能获得最大的销售额? 最大的销售额是多少? (精确到个位数)

参数数据及公式: $\sum_{i=1}^7 x_i = 56$, $\sum_{i=1}^7 y_i = 294$, $\sum_{i=1}^7 x_i y_i = 2794$, $\sum_{i=1}^7 x_i^2 = 708$,

$$\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \cdot \bar{x} \bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \bar{x}^2}, \quad \hat{a} = \bar{y} - \hat{b} \bar{x}.$$

17. 某学校工会组织趣味投篮比赛, 每名选手只能在下列两种比赛方式中选择一种.

方式一: 选手投篮 3 次, 每次投中可得 1 分, 未投中不得分, 累计得分;

方式二: 选手最多投 3 次. 如第 1 次投中可进行第 2 次投篮, 如第 2 次投中可进行第 3 次投篮. 如某次未投中, 则投篮中止. 每投中 1 次可得 2 分, 未投中不得分, 累计得分;

若甲乙两位老师参加比赛, 已知甲选择方式一参加比赛, 乙选择方式二参加比赛.

假设甲, 乙每次投中的概率均为 $\frac{1}{2}$, 且每次投篮相互独立.

(1) 求甲得分不低于 2 分的概率;

(2) 求乙得分的分布列及期望;

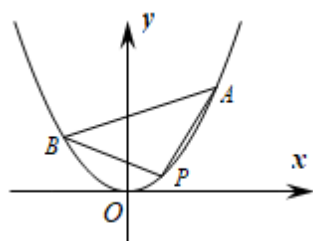
(3) 求甲胜出的概率.

18. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + (1-a)x - a \ln x (a \in \mathbb{R})$.

(1) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性;

(2) 已知 $a > 0$, 若 $x > 0$, $f(x) \geq \ln a + 1 - \frac{1}{2}a^2$, 求实数 a 的取值范围.

19. 已知点 P 、 A 、 B 是抛物线 $C: x^2 = 4y$ 上的点, 且 $PA \perp PB$.



(1) 若点 P 的坐标为 $(2, 1)$, 则动直线 AB 是否过定点? 如果过定点, 请求出定点坐标, 反之, 请说明理由.

(2)若 $|PA|=|PB|$ ，求 $VPAB$ 面积的最小值.

参考答案:

1. C

【分析】求出抛物线的准线方程，利用抛物线定义，列式计算作答.

【详解】点 F 为抛物线 $C: y^2 = 2px$ 的焦点，其准线方程为: $x = -\frac{p}{2}$,

因为点 $A(2, m)$ 在抛物线 C 上，且 $|AF| = 3$ ，则有 $2 - (-\frac{p}{2}) = 3$ ，解得 $p = 2$ ，

所以 $p = 2$.

故选: C

2. D

【分析】根据二项式展开式的二项式系数之和与各项系数之和求出 n ，结合二项式展开式的通项公式计算即可求解.

【详解】 $\left(2x - \frac{1}{x^2}\right)^n$ 的展开式中各项的二项式系数之和 $M = 2^n$.

对于 $\left(2x - \frac{1}{x^2}\right)^n$ ，令 $x = 1$ ，则 $N = \left(2 \times 1 - \frac{1}{1^2}\right)^n = 1$.

由 $M - N = 2^n - 1 = 63$ ，解得 $n = 6$.

所以 $\left(2x - \frac{1}{x^2}\right)^6$ 的展开式的通项公式为 $T_{r+1} = C_6^r (2x)^{6-r} \left(-\frac{1}{x^2}\right)^r = (-1)^r \times 2^{6-r} C_6^r x^{6-3r}$,

令 $6 - 3r = 0$ ，则 $r = 2$ ，

故 $\left(2x - \frac{1}{x^2}\right)^6$ 的展开式中的常数项为 $T_3 = (-1)^2 \times 2^4 \times C_6^2 = 240$.

故选: D.

3. D

【分析】判断 $f(x)$ 的奇偶性和在 $(0, +\infty)$ 上的单调性，即可唯一确定正确选项.

【详解】设 $f(x) = \frac{\ln|x|}{x}$ ，则 $f(x)$ 的定义域是 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ ，同时

$f(-x) = \frac{\ln|-x|}{-x} = \frac{\ln|x|}{-x} = -\frac{\ln|x|}{x} = -f(x)$ ，故 $f(x)$ 是奇函数，排除 B 选项；

当 $x > 0$ 时， $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ ， $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$ ，所以当 $0 < x < e$ 时， $f'(x) > 0$ ；当 $x > e$ 时，

$f'(x) < 0$.

故 $f(x)$ 在 $(0, e)$ 上递增, 在 $(e, +\infty)$ 上递减, 能够体现 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上先递增后递减的图象只有 D 选项.

故选: D.

4. B

【分析】先计算出甲获得冠军的概率, 然后计算比赛 3 局甲获得冠军的概率, 再用条件概率的计算公式, 计算得题目所求“在甲获得冠军的情况下, 比赛进行了 3 局的概率”.

【详解】三局比赛甲“胜、负、胜”的概率为 $\frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{27}$; 三局比赛甲“负、胜、胜”的概率为 $\frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{27}$; 两局比赛甲“胜、胜”的概率为 $\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$. 根据条件概率计算公式, “在甲获得冠军的情况下, 比赛进行了 3 局的概率”为

$\frac{\frac{4}{27} + \frac{4}{27}}{\frac{4}{27} + \frac{4}{27} + \frac{4}{9}} = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$. 故选 B.

【点睛】本小题主要考查条件概率的计算, 考查相互独立事件概率的计算, 还考查了分类加法计数原理. 属于基础题.

5. C

【分析】分 A 有 2 人和 4 人, 结合排列组合求解即可.

【详解】若 A 有 2 人游玩, 则有 $C_6^2 C_4^3 C_1^1 A_2^2 + \frac{C_4^2 C_2^2}{A_2^2} A_2^2 = 15 \times (8+6) = 210$ 种;

若 A 有 4 人游玩, 则有 $C_6^4 A_2^2 = 15 \times 2 = 30$ 种;

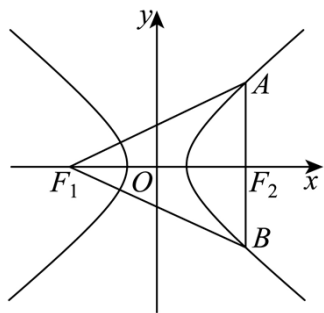
所以共有 240 种,

故选: C.

6. C

【分析】利用点在双曲线上代入可得三角形的边长 $|AB| = \frac{2b^2}{a}$, 再利用双曲线的性质构造离心率的齐次方程, 求出即可.

【详解】



设 $A(c, y_1)$,

代入双曲线方程可得 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} = 1 \Rightarrow y_1^2 = \frac{c^2 - a^2}{a^2} \times b^2 = \frac{b^4}{a^2}$,

所以 $|AB| = \frac{2b^2}{a}$ 即正三角形的边长,

所以正三角形的高为 $\frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{2b^2}{a} = \frac{\sqrt{3}b^2}{a}$,

所以

$$2c = \frac{\sqrt{3}b^2}{a} \Rightarrow 2ac = \sqrt{3}b^2 \Rightarrow 2ac = \sqrt{3}(c^2 - a^2) \Rightarrow \sqrt{3}c^2 - 2ac - \sqrt{3}a^2 = 0 \Rightarrow e = \sqrt{3},$$

故选: C.

7. A

【分析】设 n 次传球后球在甲手中的概率为 p_n , 求出 $p_1 = 0$, 根据题意求出数列 $\{p_n\}$ 的递推

公式, 求出 p_n 的表达式, 即可求得 p_6 的值.

【详解】设 n 次传球后球在甲手中的概率为 p_n , 当 $n=1$ 时, $p_1 = 0$,

设 $A_n = \text{"}n\text{次传球后球在甲手中"}$, 则 $A_{n+1} = A_n A_{n+1} + \overline{A_n} A_{n+1}$,

则 $P(A_{n+1}) = P(A_n A_{n+1}) + P(\overline{A_n} A_{n+1}) = P(A_n)P(A_{n+1} | A_n) + P(\overline{A_n})P(A_{n+1} | \overline{A_n})$.

即 $p_{n+1} = p_n \times 0 + (1 - p_n) \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(1 - p_n)$,

所以, $p_{n+1} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}\left(p_n - \frac{1}{3}\right)$, 且 $p_1 - \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}$,

所以, 数列 $\left\{p_n - \frac{1}{3}\right\}$ 是以 $-\frac{1}{3}$ 为首项, 以 $-\frac{1}{2}$ 为公比的等比数列,

所以, $p_n - \frac{1}{3} = -\frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$, 所以, $p_n = \frac{1}{3} \left[1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]$,

所以 6 次传球后球在甲手中的概率为 $p_6 = \frac{1}{3} \times \left(1 + \frac{1}{32}\right) = \frac{11}{32}$.

故选: A

8. B

【分析】问题转化为 $\frac{\ln x_1 + 2}{x_1} < \frac{\ln x_2 + 2}{x_2}$, 得到函数 $f(x) = \frac{\ln x + 2}{x}$ 在定义域 $(0, m)$ 上单调递增, 求出函数的导数, 得到 $\frac{-\ln x - 1}{x^2} \dots 0$ 在 $(0, m)$ 上恒成立, 求出 m 的最大值即可.

【详解】解: $\because 0 < x_1 < x_2 < m, \therefore x_1 - x_2 < 0,$

$$\therefore x_2 \ln x_1 - x_1 \ln x_2 < 2(x_1 - x_2),$$

$$\therefore \frac{\ln x_1}{x_1} - \frac{\ln x_2}{x_2} < \frac{2}{x_2} - \frac{2}{x_1},$$

$$\therefore \frac{\ln x_1 + 2}{x_1} < \frac{\ln x_2 + 2}{x_2},$$

故函数 $f(x) = \frac{\ln x + 2}{x}$ 在定义域 $(0, m)$ 上单调递增,

$$\text{故 } f'(x) = \frac{1 - (\ln x + 2)}{x^2} = \frac{-\ln x - 1}{x^2} \dots 0 \text{ 在 } (0, m) \text{ 上恒成立,}$$

$$\text{故 } -\ln x - 1 \dots 0, \text{ 解得: } 0 < x \leq \frac{1}{e},$$

故 m 的最大值是 $\frac{1}{e}$,

故选: B.

9. AC

【分析】对于 A, 根据事件之间的关系, 可得概率计算, 结合条件概率的计算公式, 可得答案; 对于 B, 根据正态分布的性质, 利用其对称性, 可得答案; 对于 C, 根据相关系数的性质, 可得答案; 对于 D, 根据残差图的性质, 可得答案.

【详解】对于 A, 由 $A \subseteq B$, 则 $P(AB) = P(A)$, 故 $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(A)} = 1$, 故 A 正确;

对于 B, 由随机变量 $\xi \sim N(2, \sigma^2)$, 则随机变量 ξ 满足的正态分布曲线关于直线 $\xi = 2$ 对称,

$$\text{故 } P(2 < \xi < 4) = P(0 < \xi < 2), \quad P(\xi < 0) = P(\xi > 4) = 1 - P(\xi < 4) = 0.16,$$

$$P(2 < \xi < 4) = \frac{0.84 - 0.16}{2} = 0.34, \text{ 故 B 错误;}$$

对于 C, 根据相关系数的性质, 可得 C 正确;

对于 D, 根据残差图的性质, 可知宽度越窄表示回归效果越好, 故 D 错误.

故选: AC.

10. ABD

【分析】根据题目所给已知条件, 结合等比数列的性质对选项逐一分析, 由此确定正确选项.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。

如要下载或阅读全文，请访问：

<https://d.book118.com/616111204140010135>