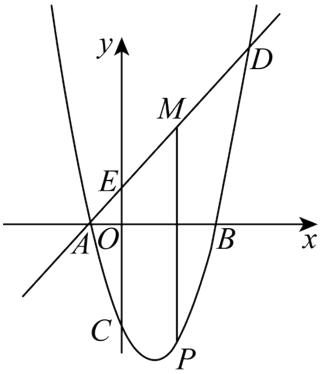
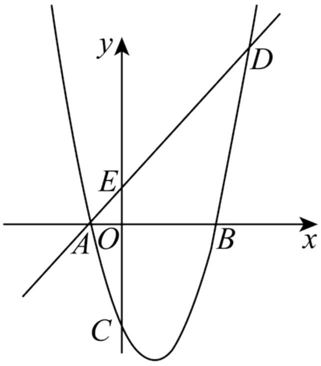
# 第22章二次函数综合压轴题（特殊四边形问题）专题训练--2024-2025学年人教版九年级上册数学期末提升专题训练

1．如图，在平面直角坐标系中，抛物线$y=x^2+bx+c$交 $x$ 轴于$A\left(-1,0\right)$、$B\left(3,0\right)$两点，交 $y$ 轴于点 C．一次函数$y=kx+1\left(k\neq 0\right)$与抛物线交于 $A$ 、$D$ 两点，交$y$ 轴于点 $E$ ．






备用图

(1)求抛物线的解析式；

(2)若点 $P$ 是第四象限内抛物线上的一动点，过点 $P$ 作 $PM\parallel y$轴交 $AD$ 于点 $M$，求出$PM+\frac{\sqrt{2}}{2}AM$的最大值及相应的点 $P$ 的坐标；

(3)将抛物线沿着射线 $AE$ 方向平移了$\sqrt{2}$个长度得到新的抛物线，新抛物线与原抛物线 交于 $R$ 点，点 $H$ 是原抛物线对称轴上一动点，在平面内是否存在 $N$ 点，使得以点 $A$、 $R$、$H$、$N$ 为顶点的四边形是矩形？若存在，请直接写出点 $N$ 的坐标；若不存在，请说明理由．

2．在平面直角坐标系中，抛物线$y=-x^2-4x+c$与$x$轴交于点A，$B$（点A在点$B$

的左侧），与 $y$ 轴交于点 $C$，且点 A 的坐标为 $(-5,0)$．

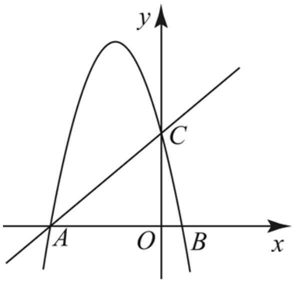



图1

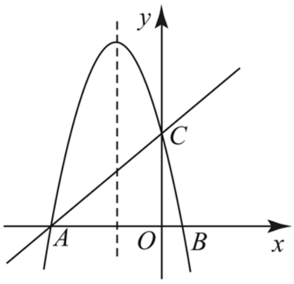



图2

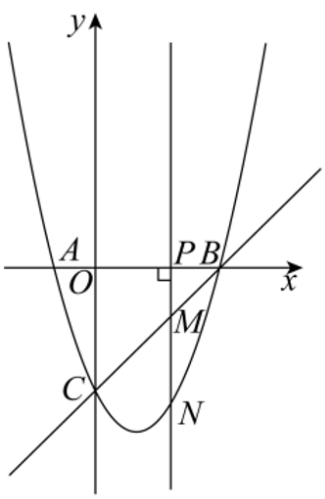
(1)求点 $C$ 的坐标；

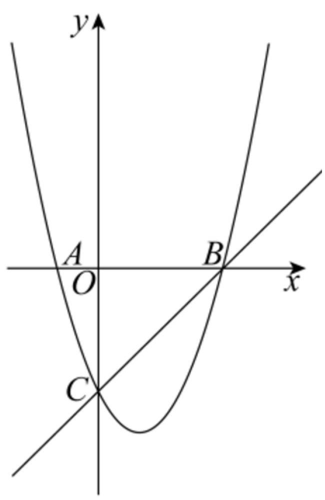
(2)如图 1，若点 $P$ 是第二象限内抛物线上一动点，求三角形 $ACP$ 面积的最大值；

(3)如图 2，若点 $M$ 是抛物线上一点，点 $N$ 是抛物线对称轴上一点，是否存在点 $M$ 使以 A，$C$，$M$，$N$ 为顶点的四边形是平行四边形？若存在，请直接写出点 $M$ 的坐标；若不存在，请说明理由．

3．综合与探究

如图，抛物线 $y=x^2+bx+c$ 与 $x$ 轴交于 $A(-1,0)$，$B(3,0)$ 两点，与 $y$ 轴交于点 $C$．点 $P(m,0)$ 是 $x$ 轴上的一个动点，过点 $P$ 作直线 $PM\perp x$ 轴，与直线 $BC$ 交于点 $M$，与抛物线交于点 $N$．



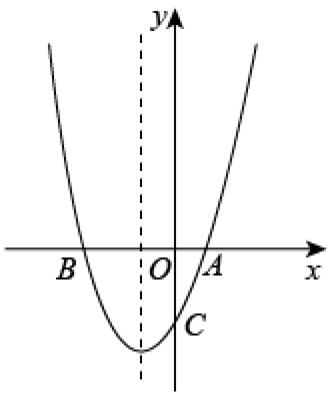

备用图

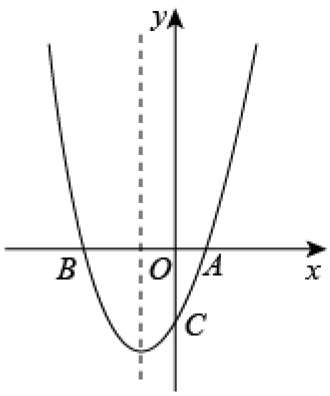
(1)求这个抛物线的函数表达式．

(2)①若点 $P$ 在线段 $OB$ 上运动，求线段 $MN$ 的最大值；

②若点 $P$ 在 $x$ 轴的正半轴上运动，在 $y$ 轴上是否存在点 $Q$，使以 $M$，$N$，$C$，$Q$ 为顶点的四边形为菱形？若存在，请直接写出点 $Q$ 的坐标；若不存在，请说明理由．

4．如图，抛物线 $y=ax^2+2x-3a$ 经过 $A\left(1,0\right)$、$B\left(b,0\right)$、$C\left(0,c\right)$三点．




备用图

(1)求 $a$，$b$，$c$ 的值；

(2)在抛物线对称轴上找出一点 $P$，使 $PA+PC$ 的值最小，并求出此时$\triangle ACP$ 的面积；

(3)若点 $M$ 为 $x$ 轴上一动点，抛物线上是否存在一点 $N$，使以 $A$，$C$，$M$，$N$ 四点构成的四边形为平行四边形？若存在，请直接写出点 $N$ 的坐标；若不存在，请说明理由．

5．如图，已知抛物线$y=ax^2+bx-3\left(a\neq 0\right)$与$x$轴交于A、$B$两点，过点A的直线$l$与抛物线交于点$C$，其中A点的坐标是$\left(1,0\right)$，$C$点坐标是$\left(4,-3\right)$.

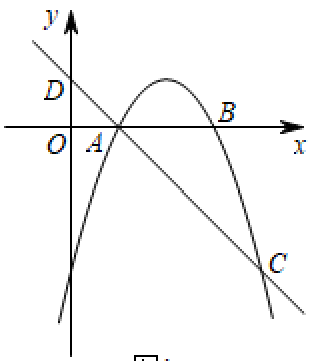


图1

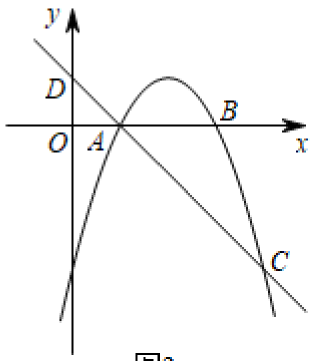


图2

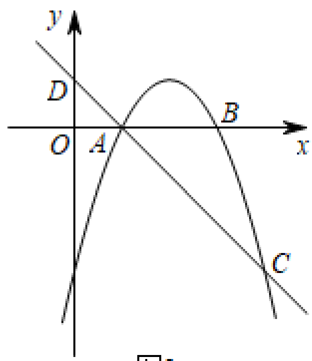


图3

(1)求抛物线解析式；

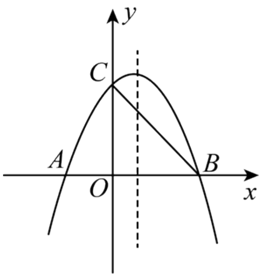
(2)点$E$是（1）中抛物线对称轴上的动点，点$F$是$x$轴上的动点，点$M$是（1）中抛物线上的一动点且位于直线$AC$上方.

①试求$\triangle ACM$的最大面积以及此时点$M$的坐标；

②在①的条件下求$ME+EF+\dfrac{\sqrt{2}}{2}AF$的最小值.

(3)抛物线上是否存在点$P$，平面内一点$Q$，使得以$P$、A、$C$、$Q$为顶点的四边形是以$AC$为边的矩形？如果存在，求出$Q$点的坐标；如果不存在，请说明理由.

6．如图，抛物线 $y=a\left(x-h\right)^2+k$ 的顶点坐标是 $(\frac{1}{2},\frac{9}{4})$，与 $x$ 轴交于点A、点 $B\left(2,0\right)$，与 $y$ 轴交于点 $C$．

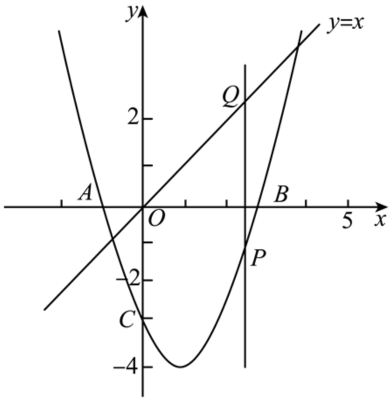



(1)求抛物线的解析式；

(2)求 $\triangle BOC$ 的面积；

(3)点 $P$ 在抛物线的对称轴上，点 $Q$ 在抛物线上，是否存在点 $Q$，使得以 $B$、$C$、$P$、$Q$ 为顶点的四边形是平行四边形？若存在，请求出点 $Q$ 的坐标；若不存在，请说明理由．

7．如图，在直角坐标系中，二次函数 $y=x^2+bx+c$ 的图象与 $x$ 轴相交于点 $A\left(-1,0\right)$ 和点 $B\left(3,0\right)$，与 $y$ 轴交于点C．




(1)求 $b$、$c$ 的值；

(2)点 $P\left(m,n\right)$ 为抛物线上的动点，过 $P$ 作 $x$ 轴的垂线交直线 $l$：$y=x$ 于点 $Q$.

①当 $0<m<3$ 时，求 $P$ 点到直线 $l$：$y=x$ 的距离的最大值；

②是否存在 $m$，使得以点 $O$、$C$、$P$、$Q$ 为顶点的四边形是菱形，若不存在，请说明理由；若存在，请直接写出 $m$ 的值.

8. 如图，在平面直角坐标系中，抛物线 $y=ax^2+bx-3(a\neq 0)$ 交 $x$ 轴于点 $A(-1,0)$，点 $B(3,0)$，交 $y$ 轴于点 $C$，连接 $AC$、$BC$；

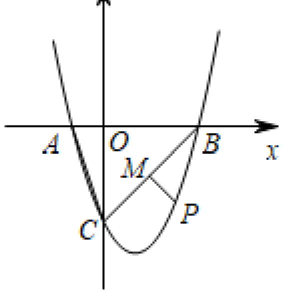



图1

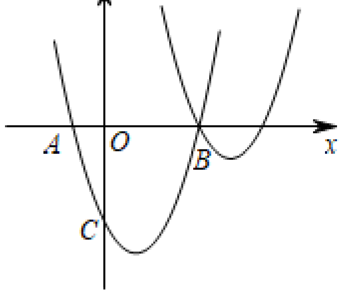


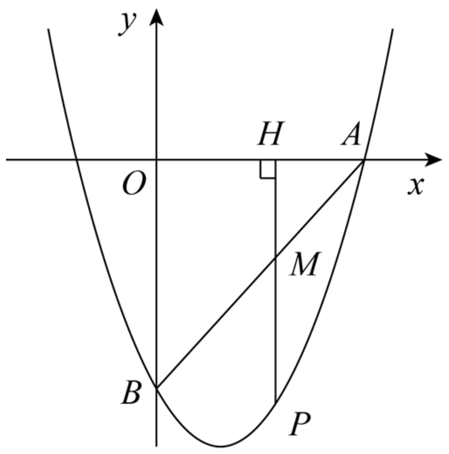

图2

(1)求抛物线的函数表达式；

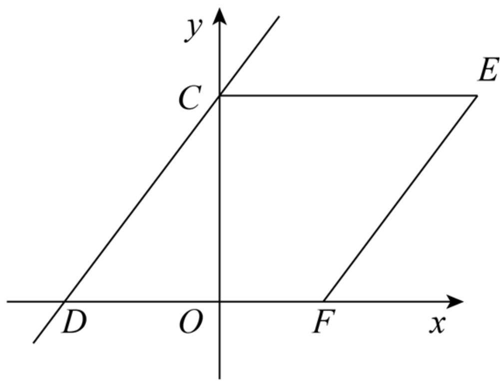
(2)如图 1，$P$ 是第四象限内抛物线上一动点，过点 $P$ 作 $PM\perp BC$ 交 $BC$ 于点 $M$，求 $PM$ 的最大值以及此时点 $P$ 的坐标；

(3)如图 2，把抛物线 $y=ax^2+bx-3(a\neq 0)$ 沿着射线 $CB$ 方向平移，平移后的抛物线恰好经过 $(3,0)$，点 $E$ 是新抛物线与 $x$ 轴的另一个交点，点 $F$ 是新抛物线的顶点，点 $Q$ 是新抛物线对称轴上的一动点，点 $G$ 是平面内一动点，直接写出所有使得以点 $E$、$F$、$Q$、$G$ 为顶点的四边形是菱形的点 $G$ 的坐标．

9．已知抛物线 $y=x^2+bx+c$．




图①




图②

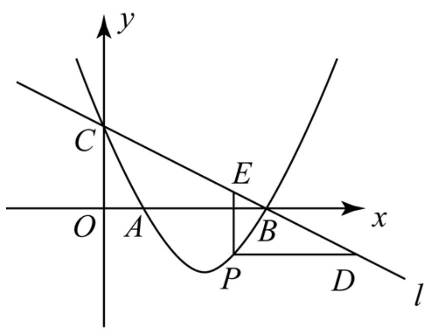
(1)如图①，若抛物线图象与 $x$ 轴交于点 $A(3,0)$，与 $y$ 轴交点 $B(0,-3)$．连接 $AB$．

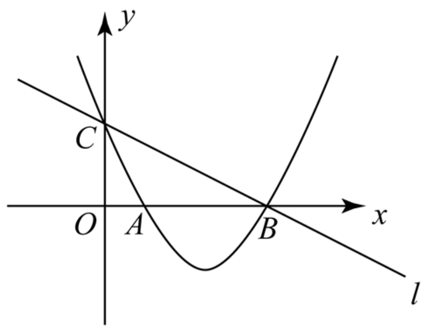
①求该抛物线所表示的二次函数表达式；

②若点 $P$ 是抛物线上一动点（与点 A 不重合），过点 $P$ 作 $PH\perp x$ 轴于点 $H$，与线段 $AB$ 交于点 $M$．是否存在点 $P$ 使得点 $M$ 是线段 $PH$ 的三等分点？若存在，请求出点 $P$ 的坐标；若不存在，请说明理由．

(2)如图②，直线 $y=\frac{4}{3}x+n$ 与 $y$ 轴交于点 $C$，同时与抛物线 $y=x^2+bx+c$ 交于点 $D(-3,0)$，以线段 $CD$ 为边作菱形 $CDFE$，使点 $F$ 落在 $x$ 轴的正半轴上，若该抛物线与线段 $CE$ 没有交点，求 $b$ 的取值范围．

10．如图，直线 $l$：$y=-\frac{1}{2}x+1$ 与 $x$ 轴、$y$ 轴分别交于点 $B$、$C$，经过 $B$、$C$ 两点的抛物线 $y=x^2+bx+c$ 与 $x$ 轴的另一个交点为 $A$.




备用图

(1)求该抛物线的解析式；

(2)若点 $P$ 在直线 $l$ 下方的抛物线上，过点 $P$ 作 $PD//x$ 轴交 $l$ 于点 $D$，$PE//y$ 轴交 $l$ 于点 $E$，求 $PD+PE$ 的最大值；

(3)设 $F$ 为直线 $l$ 上的点，点 $P$ 仍在直线 $l$ 下方的抛物线上，以 $A$、$B$、$P$、$F$ 为顶点的四边形能否构成平行四边形？若能，求出点 $F$ 的坐标；若不能，请说明理由.

11．如图，平面直角坐标系中，已知抛物线$y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$与$x$轴交于$A\left(-1,0\right)$，$B\left(3,0\right)$两点，与$y$轴交于点$C\left(0,2\right)$．

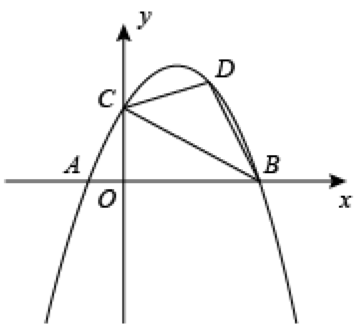


图1

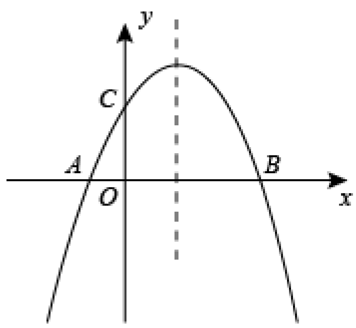


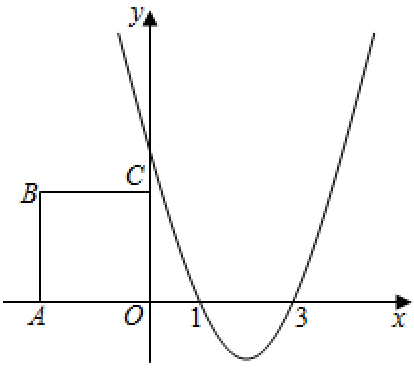
图2

(1)求该抛物线的解析式；

(2)如图1，点$D$是第一象限内抛物线上一动点，设点$D$的横坐标为$m$，连接$CD$，$BD$，$BC$，$AC$．当$m$何值时，$\triangle BCD$的面积最大？最大面积是多少？

(3)如图2，若点$N$为抛物线对称轴上一点，探究抛物线上是否存在点$M$，使得以$B$，$C$，$M$，$N$为顶点的四边形是平行四边形？若存在，请直接写出所有满足条件的点$M$的坐标；若不存在，请说明理由．

12．如图，抛物线 $y=ax^2+bx+6$ 经过点 $(1,0)$，$(3,0)$ 两点，边长为4的正方形 $OABC$ 的顶点 $A$、$C$ 分别在 $x$ 轴上，$y$ 轴上．



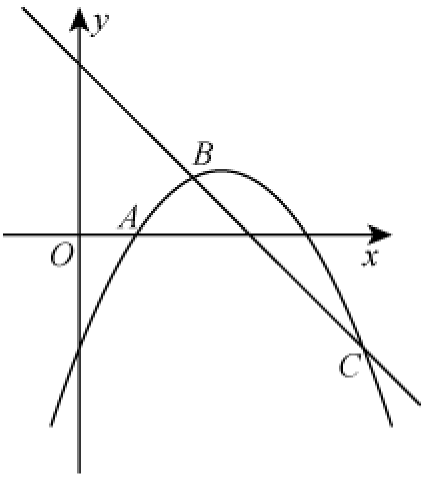

(1)求抛物线的解析式；

(2)将正方形 $OABC$ 向右平移，平移距离记为 $h$．

①当点 $C$ 首次落在抛物线上时，求 $h$ 的值；

②当抛物线落在正方形内部的部分，满足 $y$ 随 $x$ 的增大而减小时，请直接写出 $h$ 的取值范围．

13．如图，在平面直角坐标系 $xOy$ 中，二次函数 $y=-\frac{1}{2}x^2+bx+c$ 的图象经过点 $A(1，0)$，且当 $x=0$ 和 $x=5$ 时所对应的函数值相等．一次函数 $y=-x+3$ 与二次函数 $y=-\frac{1}{2}x^2+bx+c$ 的图象分别交于 $B$，$C$ 两点，点 $B$ 在第一象限．

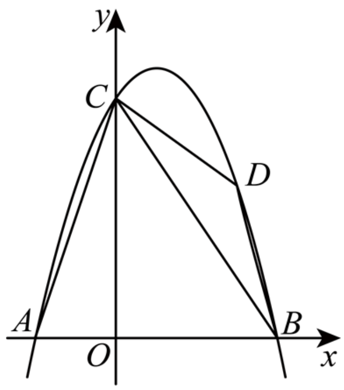



（1）求二次函数 $y=-\frac{1}{2}x^2+bx+c$ 的表达式；

（2）连接 $AB$，求 $AB$ 的长；

（3）连接 $AC$，$M$ 是线段 $AC$ 的中点，将点 $B$ 绕点 $M$ 旋转 180°得到点 $N$，连接 $AN$，$CN$，判断四边形 $ABCN$ 的形状，并证明你的结论．

14．如图所示，抛物线 $y=ax^2+bx+c\left(a\neq 0\right)$ 与 $x$ 轴交于 A 、$B$ 两点，与 $y$ 轴交于点 $C$，且点 A 的坐标为 $A(-2,0)$，点 $C$ 的坐标为 $C(0,6)$，对称轴为直线 $x=1$．点 $D$ 是抛物线上一个动点，设点 $D$ 的横坐标为 $m\left(1<m<4\right)$，连接 $AC$，$BC$，$DC$，$DB$．




（1）求抛物线的函数表达式；

（2）当$\triangle BCD$的面积等于$\Delta AOC$的面积的$\dfrac{3}{4}$时，求$m$的值；

（3）在（2）的条件下，若点$M$是$x$轴上一动点，点$N$是抛物线上一动点，试判断是否存在这样的点$M$，使得以点$B,D,M,N$为顶点的四边形是平行四边形．若存在，请直接写出点$M$的坐标；若不存在，请说明理由．

15．二次函数$y=\dfrac{m}{6}x^2-\dfrac{2m}{3}x+m(m>0)$的图象交$y$轴于点$A$，顶点为$P$，直线$PA$与$x$轴交于点$B$．

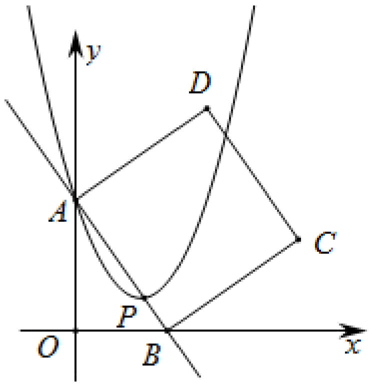
（1）当$m$=1时，求顶点$P$的坐标；

（2）若点$Q$（$a$，$b$）在二次函数$y=\dfrac{m}{6}x^2-\dfrac{2m}{3}x+m(m>0)$的图象上，且$b-m>0$，试求$a$的取值范围；

（3）在第一象限内，以$AB$为边作正方形$ABCD$．

①求点$D$的坐标（用含$m$的代数式表示）；

②若该二次函数的图象与正方形$ABCD$的边$CD$有公共点，请直接写出符合条件的整数$m$的值．




16．如图 1 所示，抛物线 $y=\frac{2}{3}x^2+bx+c$ 与 $x$ 轴交于 $A$、$B$ 两点，与 $y$ 轴交于点 $C$，已知 $C$ 点坐标为（0，4），抛物线的顶点的横坐标为 $\frac{7}{2}$，点 $P$ 是第四象限内抛物线上的动点，四边形 $OPAQ$ 是平行四边形，设点 $P$ 的横坐标为 $m$．

（1）求抛物线的解析式；

（2）求使 $\triangle APC$ 的面积为整数的 $P$ 点的个数；

（3）当点 $P$ 在抛物线上运动时，四边形 $OPAQ$ 可能是正方形吗？若可能，请求出点 $P$ 的坐标，若不可能，请说明理由；

（4）在点 $Q$ 随点 $P$ 运动的过程中，当点 $Q$ 恰好落在直线 $AC$ 上时，则称点 $Q$ 为“和谐点”，如图（2）所示，请直接写出当 $Q$ 为“和谐点”的横坐标的值．

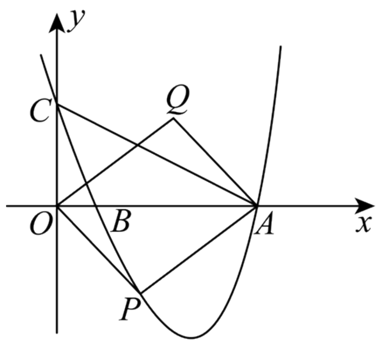



图1

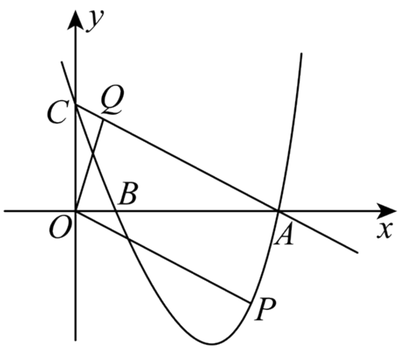


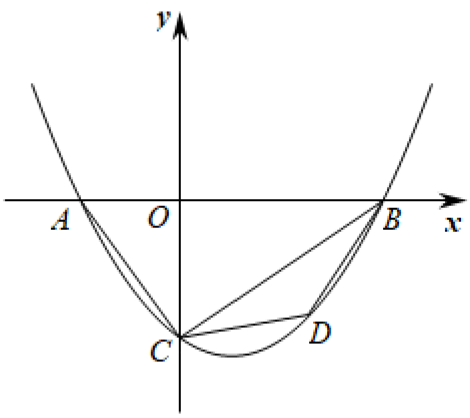

图2

17．如图，抛物线 y＝a（x+2）（x﹣4）与 x 轴交于 A，B 两点，与 y 轴交于点 C，且∠ACO＝∠CBO．

（1）求线段 OC 的长度；

（2）若点 D 在第四象限的抛物线上，连接 BD、CD，求△BCD 的面积的最大值；

（3）若点 P 在平面内，当以点 A、C、B、P 为顶点的四边形是平行四边形时，直接写出点 P 的坐标．

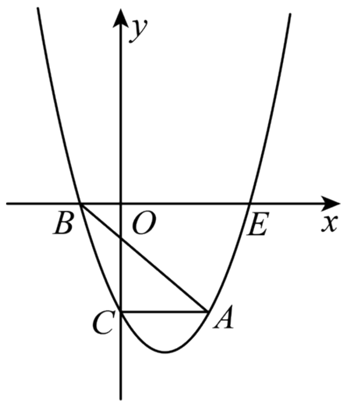


18．如图，抛物线$y=ax^2+bx-3$经过点$A\left(2,-3\right)$，与$x$轴负半轴交于点$B$，与$y$轴交于点$C$，且$OC=3OB$．

（1）求抛物线的解析式；

（2）点$D$在$y$轴上，且$\angle BDO=\angle BAC$，求点$D$的坐标；

（3）点$M$在抛物线上，点$N$在抛物线的对称轴上，是否存在以点A，$B$，$M$，$N$为顶点的四边形是平行四边形？若存在．求出所有符合条件的点$M$的坐标；若不存在，请说明理由.



**参考答案：**

1．(1) $y=x^2-2x-3$

(2) $PM+\frac{\sqrt{2}}{2}AM$ 取得最大值 9，点 $P(2,-3)$

(3)点 $N$ 的坐标为 $(4,-1)$ 或 $(-2,-1)$ 或 $\left(0,\frac{-3+\sqrt{17}}{2}\right)$ 或 $\left(0,\frac{-3-\sqrt{17}}{2}\right)$

【分析】（1）根据题意将点坐标代入求解即可；

（2）根据题意求得一次函数解析式 $y=x+1$，即可判定 $\triangle OAE$ 为等腰直角三角形，得到 $\triangle MAH$ 为等腰直角三角形，则 $AM=\sqrt{2}MH$，设点 $M(t,t+1)(0<t<3)$，则点 $P(t,t^2-2t-3)$，有 $PM+\frac{\sqrt{2}}{2}AM=PM+MH$ 化简得到二次函数求最值即可；

（3）根据题意可知抛物线沿着 $x$ 轴和 $y$ 轴正方向各平移 1 个单位，得到新的抛物线为 $y=x^2-4x+1$，即可得到点 $R(2,-3)$，即可设点 $H$ 的坐标为 $(1,m)$，设点 $N$ 的坐标为 $(s,t)$，可知 $A$，$R$ 两点在对称轴两侧，若以 $AR$ 为矩形的边，过 $A$，$R$ 两点作 $AR$ 的垂线与对称轴的交点即 $H$ 点，$H$ 点在直线 $AR$ 上面时当 $A$ 点平移至 $R$ 点时，$H$ 点平移至 $N$ 点，$H$ 点在直线 $AR$ 下面时当 $A$ 点平移至 $R$ 点时，$N$ 点平移至 $H$ 点，根据平移性质和矩形对角线相等建立方程组求出 $N$ 点坐标；若以 $AR$ 为矩形的对角线，则线段 $AR$ 的中点坐标和线段 $HN$ 的中点坐标重合且 $AR=HN$，由此建立方程组求解.

【详解】（1）解：∵抛物线 $y=x^2+bx+c$ 交 $x$ 轴于 $A(-1,0)$、$B(3,0)$ 两点，

$\therefore\begin{cases}1-b+c=0\\9+3b+c=0\end{cases}$，解得 $\begin{cases}b=-2\\c=-3\end{cases}$，

则抛物线的解析式 $y=x^2-2x-3$；

（2）解：∵一次函数 $y=kx+1(k\neq0)$ 过点 $A(-1,0)$，

$\therefore -k+1=0$，解得 $k=1$，

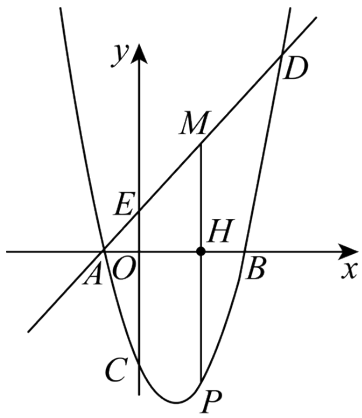
则一次函数解析式 $y=x+1$，

∴点 $E(0,1)$，

$\therefore OA=OE=1$，

则 $\triangle OAE$ 为等腰直角三角形，

∵ $PM\parallel y$ 轴，且设 $PM$ 与 $x$ 轴交于点 $H$，如图，




$\therefore \triangle MAH$ 为等腰直角三角形，

$\therefore AM=\sqrt{2}MH$，

设点 $M(t,t+1)(0<t<3)$，则点 $P(t,t^2-2t-3)$，

$\therefore PM+\frac{\sqrt{2}}{2}AM=PM+\frac{\sqrt{2}}{2}\times\sqrt{2}MH=\left[t+1-\left(t^2-2t-3\right)\right]+t+1$

$=-(t-2)^2+9$，

当 $t=2$ 时，$PM+\frac{\sqrt{2}}{2}AM$ 取得最大值 9，点 $P(2,-3)$；

（3）解：∵抛物线 $y=(x-1)^2-4$ 沿着射线 $AE$ 方向平移了 $\sqrt{2}$ 个长度得到新的抛物线，

∴抛物线沿着 $x$ 轴和 $y$ 轴正方向各平移 1 个单位，

∴新的抛物线为 $y=(x-1-1)^2-4+1=x^2-4x+1$，

联立得 $\begin{cases}y=x^2-4x+1\\y=x^2-2x-3\end{cases}$，解得 $\begin{cases}x=2\\y=-3\end{cases}$，

则点 $R(2,-3)$，

由原抛物线的表达式知，其对称轴为直线 $x=1$，故设点 $H$ 的坐标为 $(1,m)$，设点 $N$ 的坐标为 $(s,t)$，

①当 $AR$ 是边时，

点 $A$ 向右平移 3 个单位向下平移 3 个单位得到点 $R$，

则点 $H(N)$ 向右平移 3 个单位向下平移 3 个单位得到点 $N(H)$，且 $AN=RH(AH=RN)$，

即 $\begin{cases}1+3=s\\m-3=t\\(s+1)^2+t^2=(2-1)^2+(m+3)^2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}1-3=s\\m+3=t\\(1+1)^2+m^2=(s-2)^2+(t+3)^2\end{cases}$，

解得：$\begin{cases} m=2 \\ s=4 \\ t=-1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} m=-3 \\ s=-2 \\ t=-1 \end{cases}$

故点 $N$ 的坐标为 $(4,-1)$ 或 $(-2,-1)$；

②当 $AR$ 是对角线时，

由中点坐标公式和 $AR=HN$ 得：

$\begin{cases} \frac{1}{2}(-1+2)=\frac{1}{2}(s+1) \\ \frac{1}{2}(0-3)=\frac{1}{2}(m+t) \\ (2+1)^2+3^2=(s-1)^2+(m-t)^2 \end{cases}$，解得 $\begin{cases} m=\frac{-3-\sqrt{17}}{2} \\ t=\frac{-3+\sqrt{17}}{2} \\ s=0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} m=\frac{-3+\sqrt{17}}{2} \\ t=\frac{-3-\sqrt{17}}{2} \\ s=0 \end{cases}$，

故点 $N$ 的坐标为 $\left(0,\frac{-3+\sqrt{17}}{2}\right)$ 或 $\left(0,\frac{-3-\sqrt{17}}{2}\right)$.

综上，点 $N$ 的坐标为 $(4,-1)$ 或 $(-2,-1)$ 或 $\left(0,\frac{-3+\sqrt{17}}{2}\right)$ 或 $\left(0,\frac{-3-\sqrt{17}}{2}\right)$.

【点睛】本题考查二次函数的综合，涉及待定系数法求函数解析式，勾股定理解直角三角形，二次函数的性质，矩形的性质和坐标的平移；根据平移特征和矩形性质列出方程组是解题关键.

2．(1) $(0,5)$

(2) $\frac{125}{8}$

(3)存在，点 $M$ 的坐标为：$(-3,8)$ 或 $(3,-16)$ 或 $(-7,-16)$

【分析】（1）把点 $A$ 的坐标代入 $y=-x^2-4x+c$，求出 $c$ 的值即可；

（2）过 $P$ 作 $PE\perp AC$ 于点 $E$，过点 $P$ 作 $PF\perp x$ 轴交 $AC$ 于点 $H$，垂足为 $F$，利用勾股定理可得 $AC=\sqrt{5^2+5^2}=5\sqrt{2}$，即有 $S_{\triangle APC}=\frac{1}{2}\times AC\times PE=\sqrt{5^2+5^2}=\frac{5\sqrt{2}}{2}PE$，

当 $PE$ 取最大值时，三角形 $ACP$ 面积为最大值．证明 $\triangle PHE$ 是等腰直角三角形，得 $PE=\frac{PH}{\sqrt{2}}$，当 $PH$ 最大时，$PE$ 最大，运用待定系数法求直线 $AC$ 解析式为 $y=x+5$，设 $P\left(m,-m^2-4m+5\right)$，$(-5<m<0)$，则 $H(m,m+5)$，求得 $PH$，再根据二次函数的性质求解即可；

（3）分①当 $AM$ 为平行四边形 $ANMC$ 的对角线时，②当 $AN$ 为平行四边形 $ANMC$ 的对角线时，③当 $AC$ 为平行四边形 $ANMC$ 的对角线时，三种情况讨论求解即可.

【详解】(1)（1）$\because$点 $A(-5,0)$ 在抛物线 $y=-x^2-4x+c$ 的图象上，

$\therefore 0=-5^2+4\times5+c$，

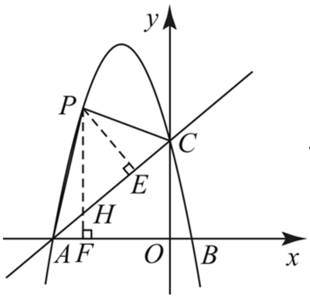
$\therefore c=5$，

即抛物线解析式为：$y=-x^2-4x+5$，

当 $x=0$ 时，有 $y=5$，

$\therefore$点 $C$ 的坐标为 $(0,5)$；

（2）过 $P$ 作 $PE\perp AC$ 于点 $E$，过点 $P$ 作 $PF\perp x$ 轴交 $AC$ 于点 $H$，垂足为 $F$，如图：




$\because A(-5,0)$，$C(0,5)$

$\therefore OA=OC$，$AC=\sqrt{5^2+5^2}=5\sqrt{2}$，

$\therefore S_{\vee APC}=\dfrac{1}{2}\times AC\times PE=\sqrt{5^2+5^2}=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}PE$，

当 $PE$ 取最大值时，三角形 $ACP$ 面积为最大值.

$\because OA=OC$，

$\therefore\triangle AOC$ 是等腰直角三角形，

$\therefore\angle CAO=45^\circ$，

$\because PF\perp x$ 轴，

$\therefore\angle AHF=45^\circ=\angle PHE$，

$\therefore\vee PHE$ 是等腰直角三角形，

$\therefore PE=\dfrac{PH}{\sqrt{2}}$，

$\therefore$当 $PH$ 最大时，$PE$ 最大，

设直线 $AC$ 解析式为 $y=kx+b$，

将 $A(-5,0)$、$C(0,5)$ 代入，

得：$\begin{cases}-5k+b=0\\ b=5\end{cases}$，

$\therefore\begin{cases}k=1\\ b=5\end{cases}$，

∴直线 $AC$ 解析式为 $y=x+5$，

设 $P\left(m,-m^2-4m+5\right)$，$(-5<m<0)$，则 $H(m,m+5)$，

$\therefore PH=\left(-m^2-4m+5\right)-(m+5)=-m^2-5m=-\left(m+\frac{5}{2}\right)^2+\frac{25}{4}$，

$\because a=-1<0$，

∴当 $m=-\frac{5}{2}$ 时，$PH$ 最大为 $\frac{25}{4}$，

∴此时 $PE$ 最大为 $PE=\frac{PH}{\sqrt{2}}=\frac{25\sqrt{2}}{8}$，

∴ △$ACP$ 面积的最大值：$S_{\vee APC}=\frac{5\sqrt{2}}{2}PE=\frac{5\sqrt{2}}{2}\times\frac{25\sqrt{2}}{8}=\frac{125}{8}$，

即面积最大值为：$\frac{125}{8}$；

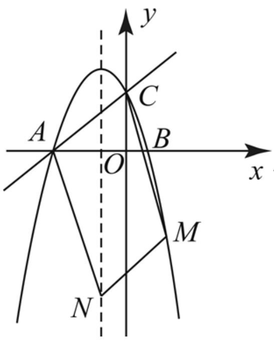
（3）存在.

$\because y=-x^2-4x+5=-(x+2)^2+9$，

∴抛物线的对称轴为直线 $x=-2$，

设点 $N$ 的坐标为 $(-2,m)$，点 $M$ 的坐标为 $\left(x,-x^2-4x+5\right)$

分三种情况：①当 $AM$ 为平行四边形 $ANMC$ 的对角线时，如图，




$\because A(-5,0)$、$C(0,5)$，

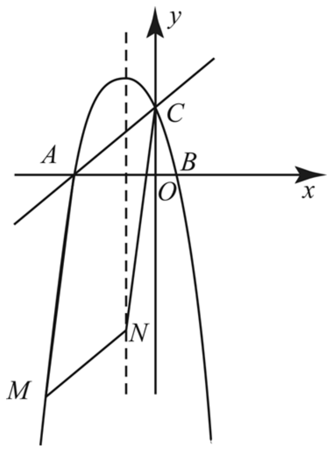
$\therefore x_C-x_A=x_M-x_N$，即 $x-(-2)=0-(-5)$，

解得，$x=3$.

$\therefore -x^2-4x+5=-3^2-4\times3+5=-16$，

∴点 $M$ 的坐标为 $(3,-16)$

②当 $AN$ 为平行四边形 $ANMC$ 的对角线时，如图，

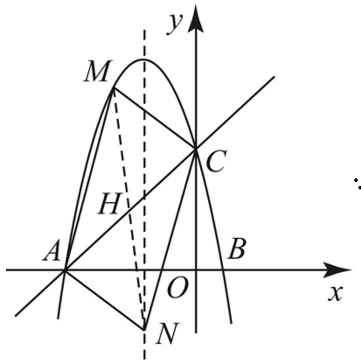



方法同①可得，$x=-7$，

$\therefore -x^2-4x+5=-(-7)^2-4\times(-7)+5=-16$，

∴点 $M$ 的坐标为 $(-7,-16)$；

③当 $AC$ 为平行四边形 $ANMC$ 的对角线时，如图，




$\because A(-5,0)$、$C(0,5)$，

∴线段 $AC$ 的中点 $H$ 的坐标为 $\left(\dfrac{-5+0}{2},\dfrac{0+5}{2}\right)$，即 $H\left(-\dfrac{5}{2},\dfrac{5}{2}\right)$，

$\therefore \dfrac{x+(-2)}{2}=-\dfrac{5}{2}$，解得，$x=-3$，

$\therefore -x^2-4x+5=-(-3)^2-4\times(-3)+5=8$，

∴点 $M$ 的坐标为 $(-3,8)$，

综上，点 $M$ 的坐标为：$(-3,8)$ 或 $(3,-16)$ 或 $(-7,-16)$．

【点睛】本题是二次函数综合题，其中涉及到二次函数图象上点的坐标特征，二次函数图象与几何变换，二次函数的性质，平行四边形的判定与性质．熟知几何图形的性质利用数形结合是解题的关键．

3．(1) $y=x^2-2x-3$

(2)①$MN$的最大值为$\frac{9}{4}$；②存在这样的$Q$点，$Q$点的坐标为 $(0,-1)$或$(0,-3\sqrt{2}-1)$或$(0,3\sqrt{2}-1)$

【分析】(1）将$A$、$B$点的坐标代入函数解析式，即可求出$b$、$c$的值，从而求出函数解析式．

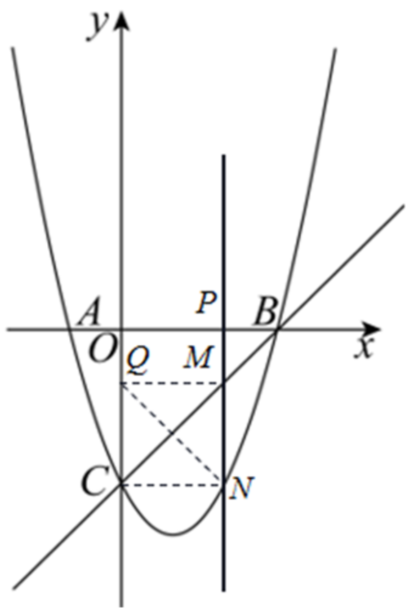
（2）①$MN=PN-PM$，先求出过$BC$的直线的解析式为$y=x-3$，$PM$ 的长度为$|m-3|$，$PN$的长度为二次函数当$x=m$时，$y$的值的绝对值，$PN-PM$可以得出关于$m$的二次函数解析式，求出这个函数的最大值即可求解．

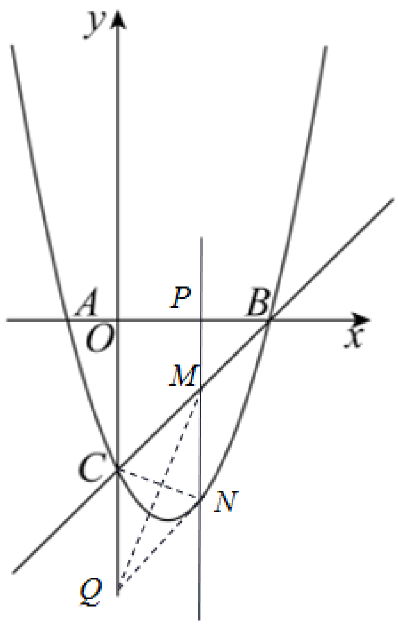
②组成菱形时，分三种情况，第一种情况，当$QN$作为菱形对角线;第二种情况，当$QN$作为菱形的一条边时；第三种情况，当$QN$作为菱形的一条边且$P$在$B$点右侧时，如下图:

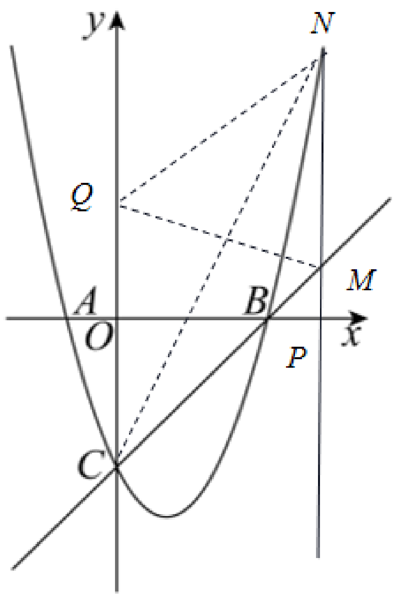
第一种情况，对角线$MC\perp QN$，因为$BC$的斜率为1，$\angle OCM=45°$，而菱形的对角线平分角，可得到$\angle BCN=45°$，所以菱形$QCNM$为正方形，$N$点纵坐标与$C$点纵坐标相同，即可求解$m$的值，然后可以求出$Q$点坐标;

第二种情况，当$QN$作为菱形的一条边时，有$MN=MC$，联立出关于$m$的方程，求解即可得到答案;

第三种情况，当$P$在$B$点右侧时，$MC$只能是菱形的边，同样有$MN=MC$，可以联立出关于$m$的方程，求解即可得到答案．






【详解】（1）解：把 $A(-1,0), B(3,0)$ 代入 $y=x^2+bx+c$ 中，得

$$\begin{cases}0=1-b+c\\0=9+3b+c\end{cases}$$

解得$\begin{cases}b=-2,\\c=-3.\end{cases}$

$\therefore y=x^2-2x-3$.

（2）解：①设直线 $BC$ 的表达式为 $y=kx+b$，把 $B(3,0)$，$C(0,-3)$ 代入 $y=kx+b$.

得，$\begin{cases}0=3k+b,\\-3=b.\end{cases}$ 解这个方程组，得$\begin{cases}k=1,\\b=-3.\end{cases}$

$\therefore y=x-3$.

$\because$点 $P(m,0)$ 是 $x$ 轴上的一动点，且 $PM\perp x$ 轴.

$\therefore N(m,m-3), M\left(m,m^2-2m-3\right)$.

$\therefore MN=m-3-\left(m^2-2m-3\right)$

$=-m^2+3m$

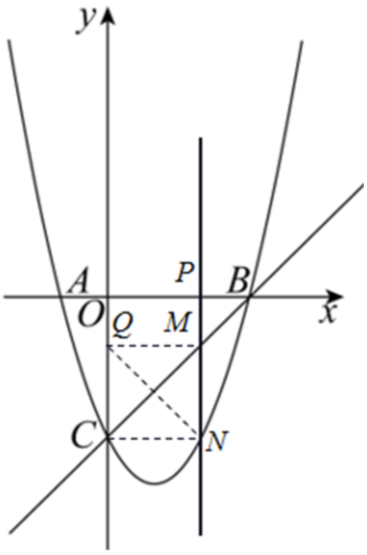
$=-\left(m-\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{9}{4}$.

$\because P$ 在 $OB$ 上运动，

$0<m<3$

$\therefore$当$m=\dfrac{3}{2}$时，$MN$有最大值$\dfrac{9}{4}$.

②第一种情况，对角线$MC\perp QN$，因为$BC$的斜率为1，$\angle OCM=45°$，而菱形的对角线平分角，可得到$\angle BCN=45°$，所以菱形$QCNM$为正方形；




则此时点$N$的纵坐标为$-3$，有$m^2-2m-3=-3$

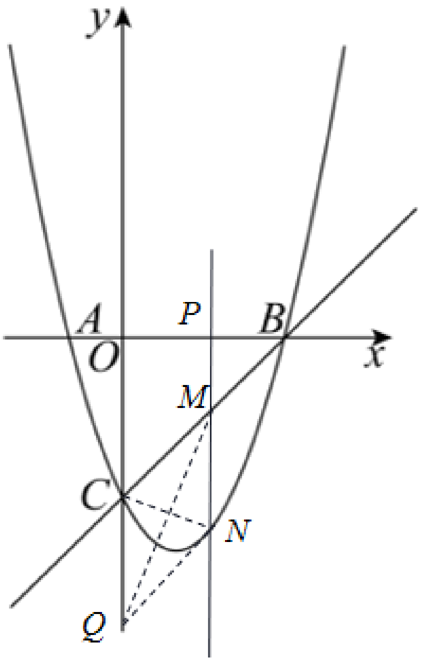
解得$m=2$或$m=0$(舍去)，

则$CQ=QM=2$，

$OQ=OC-CQ=1$，

$\therefore Q(0,-1)$

第二种情况：当$QN$作为菱形的一条边时，有$MN=MC$




$MN=-m^2+3m$，$MC=\sqrt{2}m$，

所以$-m^2+3m=\sqrt{2}m$

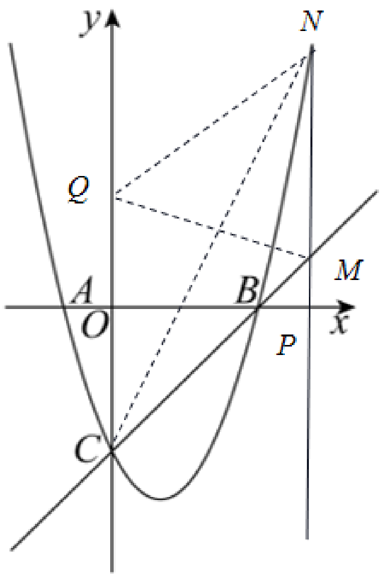
解得$m=3-\sqrt{2}$或0(舍去)，

$CQ=MN=3\sqrt{2}-2$

$\therefore OQ=OC+CQ=3+3\sqrt{2}-2=3\sqrt{2}+1$

$\therefore$此时$Q$点坐标为$(0,-3\sqrt{2}-1)$.

第三种情况：当$P$在$B$点右侧时，如下图，有$MN=MC$，




$MN=m^2-3m$，$MC=\sqrt{2}m$，

$\therefore m^2-3m=\sqrt{2}m$，解得$m=3+\sqrt{2}$或0(舍去)，

$\therefore CQ=MN=3\sqrt{2}+2$

$\therefore OQ=CQ-OC=3\sqrt{2}-1$

此时$Q$点的坐标为：$(0,3\sqrt{2}-1)$

综上所述，点$Q$的坐标为$(0,-1)$或$(0,-3\sqrt{2}-1)$或$(0,3\sqrt{2}-1)$.

【点睛】本题考查了二次函数的综合运用、二次函数性质、待定系数法、一次函数的性质、菱形的性质和判定等知识，解题的关键是会构建二次函数解决最值问题，并用分类讨论的思想思考问题.

4．(1) $a=1$，$b=-3$，$c=-3$

(2)点$P$见解析，$S_{\triangle ACP}=2$

(3)存在，$N(-2,-3)$或$N(-1+\sqrt{7},3)$或$N(-1-\sqrt{7},3)$

【分析】（1）将$A(1,0)$代入$y=ax^2+2x-3a$，求出$a$的值，确定函数的解析式后，再将$B$点和$C$点代入解析式即可求$b$、$c$的值；

（2）根据抛物线的对称轴可知当$B$、$C$、$P$三点共线时，$PA+PC$有最小值，直线$BC$与对称轴的交点即为$P$点，求出$P$点坐标再求$\triangle ACP$的面积即可；

（3）设$M(x,0),N(t,\ t^2+2t-3)$，分三种情况讨论：①当$AC$为平行四边形的对角线时；②当$AM$为平行四边形的对角线时；③当$AN$为平行四边形的对角线时；根据平行四边形的对角线互相平分，利用中点坐标公式求解即可.

【详解】（1）解：（1）将$A(1,0)$代入$y=ax^2+2x-3a$，

$\therefore a+2-3a=0$，

解得$a=1$，

$\therefore y=x^2+2x-3$，

将$B(b,0)$代入$y=x^2+2x-3$，

$\therefore b^2+2b-3=0$，

解得：$b=1$（舍）或$b=-3$，

将$C(0,c)$代入$y=x^2+2x-3$，

$\therefore c=-3$；

（2）$\because y=x^2+2x-3=(x+1)^2-4$，

∴抛物线的对称轴为直线$x=-1$，

∵$A$点与$B$点关于对称轴对称，

$\therefore PA=PB$，

$\therefore PA+PC=PB+PC\geq BC$，

∴当$B$、$C$、$P$三点共线时，$PA+PC$有最小值，

设$BC$的直线解析式为$y=kx+m$

$\therefore\begin{cases}-3k+m=0\\m=-3\end{cases}\therefore\begin{cases}k=-1\\m=-3\end{cases}$

$\therefore y=-x-3$，

$\therefore P(-1,-2)$，

设 $AP$ 的直线解析式为 $y=ex+f$

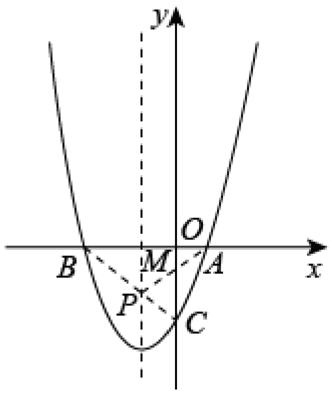
$\therefore \begin{cases}-e+f=-2\\ e+f=0\end{cases}\therefore \begin{cases}e=1\\ f=-1\end{cases}$

$\therefore y=x-1$，

$\therefore$直线 $AP$ 与 $y$ 轴交于 $M\left(0,-1\right)$

$\therefore CM=2$

$\therefore S_{\triangle ACP}=\dfrac{1}{2}\times 2\times\left(1+1\right)=2$




（3）存在点 $N$，使以 $A$，$C$，$M$，$N$ 四点构成的四边形为平行四边形，理由如下：

设 $M(x,0),N\left(t，t^2+2t-3\right)$，

①当 $AC$ 为平行四边形的对角线时，

$\begin{cases}x+t=1\\ t^2+2t-3=-3\end{cases}$，

$\therefore \begin{cases}x=1\\ t=0\end{cases}$（舍），$\begin{cases}x=3\\ t=-2\end{cases}$

$\therefore N(-2,-3)$；

②当 $AM$ 为平行四边形的对角线时，

$\begin{cases}x+1=t\\ -3+t^2+2t-3=0\end{cases}$，

$\therefore \begin{cases}x=-2+\sqrt{7}\\ t=-1+\sqrt{7}\end{cases}$，$\begin{cases}x=-2-\sqrt{7}\\ t=-1-\sqrt{7}\end{cases}$

$\therefore N(-1+\sqrt{7},3)$ 或 $N(-1-\sqrt{7},3)$；

③当 $AN$ 为平行四边形的对角线时，

$\begin{cases}1+t=x\\t^2+2t-3=-3\end{cases}$，

$\therefore\begin{cases}x=1\\t=0\end{cases}$（舍），$\begin{cases}x=-1\\t=-2\end{cases}$

$\therefore N(-2,-3)$；

综上所述：$N$ 点坐标为 $N(-2,-3)$ 或 $N(-1+\sqrt{7},3)$ 或 $N(-1-\sqrt{7},3)$

【点睛】本题考查二次函数的图像及性质，熟练掌握二次函数的图像及性质，用轴对称求最短距离的方法，平行四边形的性质，分类讨论是解题的关键.

5．(1) $y=-x^2+4x-3$

(2)①$\triangle ACM$ 的面积有最大值 $\frac{27}{8}$，此时 $M\left(\frac{5}{2},\frac{3}{4}\right)$；② $\frac{9\sqrt{2}}{8}$

(3)存在，$Q$ 点坐标为 $(5,-2)$ 或 $(-4,-5)$

【分析】（1）根据待定系数法，即可求出抛物线的函数解析式；

（2）① 设直线 $AC$ 的解析式，过点 $M$ 作 $MN /\!/ y$ 轴交 $AC$ 于点 $N$，设 $M\left(t,-t^2+4t-3\right)$，则 $N\left(t,-t+1\right)$，可得 $S_{\triangle ACM}=-\frac{3}{2}\left(t-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{27}{8}$，当 $t=\frac{5}{2}$ 时，$\triangle ACM$ 的面积有最大值 $\frac{27}{8}$ 此时 $M\left(\frac{5}{2},\frac{3}{4}\right)$；② 过 $M$ 点作 $MG\perp AC$ 交于点 $G$，交对称轴于点 $E$，交 $x$ 轴于点 $F$，当 $M$、$E$、$F$、$G$ 四点共线时，$ME+EF+\frac{\sqrt{2}}{2}AF$ 有最小值，利用等积法 $S\triangle ACM=\frac{27}{8}=\frac{1}{2}\times AC\times MG$，即为所求；

（3）分两种情况讨论：当 $P$ 点在 $AC$ 上方时，过点 $P$ 作 $PG\perp x$ 轴交于点 $G$，过点 $Q$ 作 $QH\perp x$ 轴交于点 $H$，则有 $AG=PG$，设 $P\left(x,-x^2+4x-3\right)$，$Q\left(a,b\right)$，则 $x-1=-x^2+4x-3$，求出 $P\left(2,1\right)$，再由 $BH=HQ$，得到 $-b=a-3$ ①，由 $AC=PQ$，得到 $3\sqrt{2}=\sqrt{\left(a-2\right)^2+\left(b-1\right)^2}$ ②，联立①②，求出 $Q$ 点的坐标；当 $P$ 点在直线 $AC$ 的下方时，过点 $Q$ 作 $QK\perp x$ 轴交于 $K$ 点，过 $C$ 点作 $MN\perp x$ 轴交于 $N$ 点，过 $P$ 作 $PM\perp MN$ 交于 $M$ 点，则有 $PM=CM$，求出点 $P$ 的坐标；再根据 $KQ=AK$，$QP=AC$ 即可求出点 $Q$.

【详解】（1）$\because$点 $A\left(1,0\right)$，点 $C\left(4,-3\right)$ 在抛物线 $y=ax^2+bx-3$