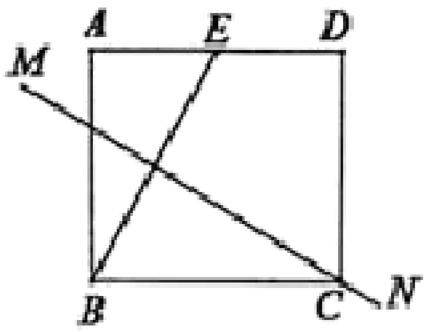
1.2 矩形的性质与判定 新思维同步提高训练(Word版含解答)-2021-2022 学年九年级数学北师大版上册

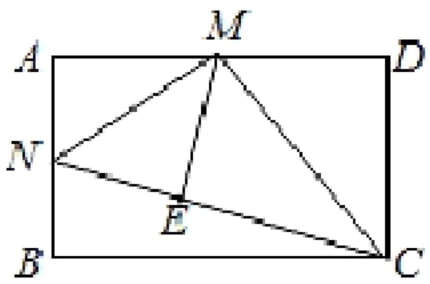
一、选择题

1.如图，矩形纸片 ABCD 中，点 E 是 AD 的中点，且 AE=2，BE 的垂直平分线 MN 恰好过点 C，则矩形的一边 AB 的长度为(　)



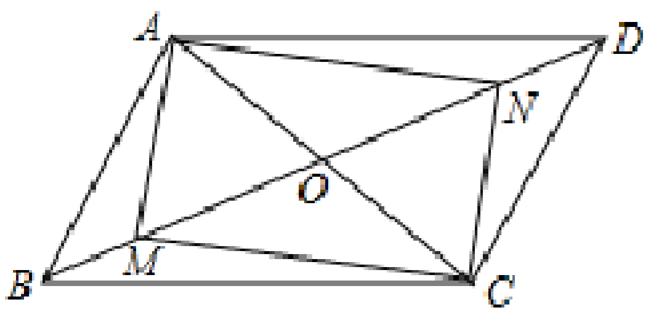
A. 2　　B. $2\sqrt{5}$　　C. 4　　D. $2\sqrt{3}$

2.如图，已知在矩形 ABCD 中，M 是 AD 边中点，将矩形分别沿 MN、MC 折叠，A、D 两点刚好落在点 E 处，已知 AN＝3，MN＝5，设 BN＝x，则 x 的值为（　）



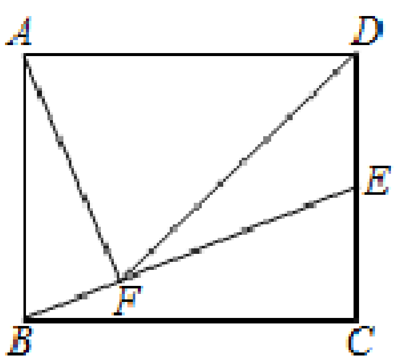
A. $\frac{5}{3}$　　B. $\frac{7}{3}$　　C. $\frac{5}{2}$　　D. $\frac{9}{4}$

3.如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，M、N 是 BD 上两点，$BM = DN$，连接 AM、MC、CN、NA，添加一个条件，使四边形 $AMCN$ 是矩形，这个条件是（　）



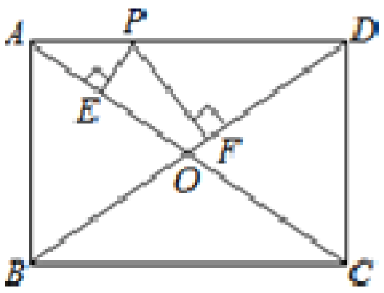
A. $\angle AMB = \angle CND$　　B. $MB = MO$　　C. $BD \perp AC$　　D. $AC = 2OM$

4.如图，点 E 是矩形 ABCD 的边 CD 上一点，作 AF⊥BE 于 F，连接 DF，若 AB＝6，DF＝BC，则 CE 的长度为（　）



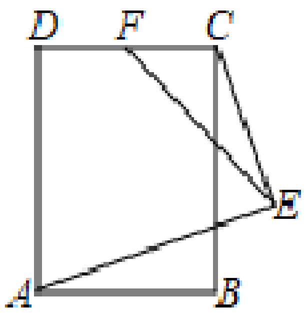
A. 2　　B. $\frac{5}{2}$　　C. 3　　D. $\frac{7}{2}$

5.如图，矩形 ABCD 对角线 AC、BD 相交于点 O，点 P 是 AD 边上的一个动点，过点 P 分别作 PE⊥AC 于点 E，PF⊥BD 于点 F，若 AB＝3，BC＝4，则 PE＋PF 的值为（　）



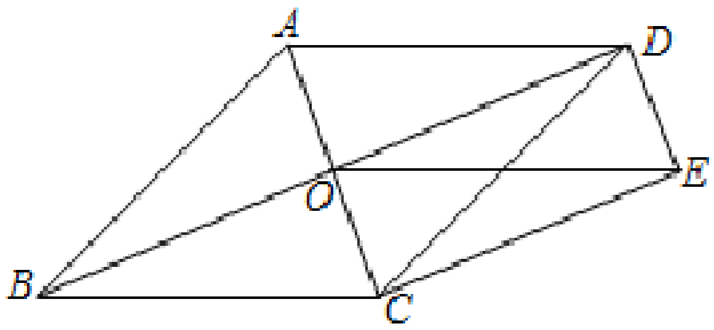
A. 10　　　　B. 9.6　　　　C. 4.8　　　　D. 2.4

6.如图，在矩形 ABCD 中，AB＝6，BC＝8，F 为边 CD 的中点，E 为矩形 ABCD 外一动点，且∠AEC＝90°，则线段 EF 的最大值为（　）



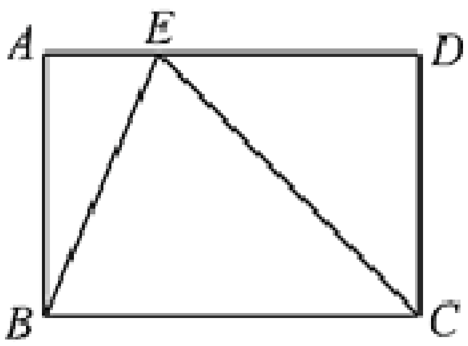
A. 7　　　　B. 8　　　　C. 9　　　　D. 10

7.如图，点 O 是菱形 ABCD 对角线的交点，DE∥AC，CE∥BD，连接 OE，设 AC＝12，BD＝16，则 OE 的长为（　）



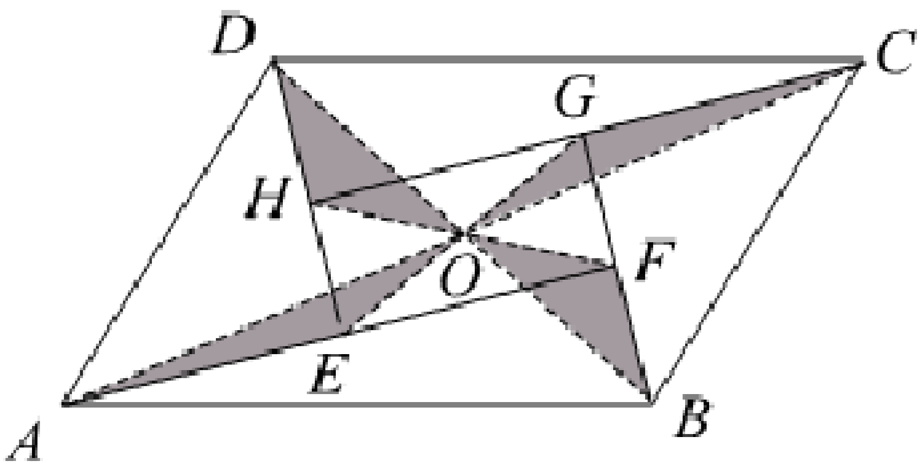
A. 8　　　　B. 9　　　　C. 10　　　　D. 12

8.如图，矩形 ABCD 中，$AB=2$，点 E 在边 AD 上，EB 平分 $\angle AEC$，$\angle DCE=45^{\circ}$，则 AE 长（　）



A. $\sqrt{2}$　　　　B. $2\sqrt{2}-2$　　　　C. $2-\sqrt{2}$　　　　D. 2

9.如图是一个由 5 张纸片拼成的 ▱ABCD，相邻纸片之间互不重叠也无缝隙，其中两张等腰直角三角形纸片的面积都为 S_1，另两张直角三角形纸片的面积都为 S_2，中间一张矩形纸片 EFGH 的面积为 S_3，FH 与 GE 相交于点 O.当 $\triangle AEO,\triangle BFO,\triangle CGO,\triangle DHO$ 的面积相等时，下列结论一定成立的是（　）



A. $S_1=S_2$　　B. $S_1=S_3$　　C. AB = AD　　D. EH = GH

10.如图，在一张矩形纸片 ABCD 中，AB＝4，BC＝8，点 E，F 分别在 AD，BC 上，将纸片 ABCD 沿直线 EF 折叠，点 C 落在 AD 上的一点 H 处，点 D 落在点 G 处，有以下四个结论：

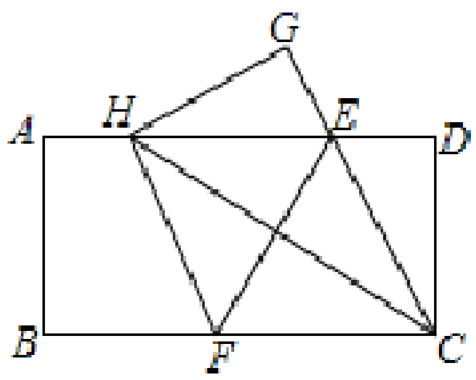
①四边形 CFHE 是菱形；

②EC 平分∠DCH；

③线段 BF 的取值范围为 3≤BF≤4；

④当点 H 与点 A 重合时，EF＝2$\sqrt{5}$．

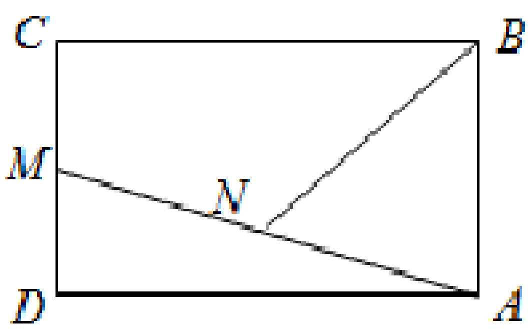
以上结论中，你认为正确的有（ ）个．



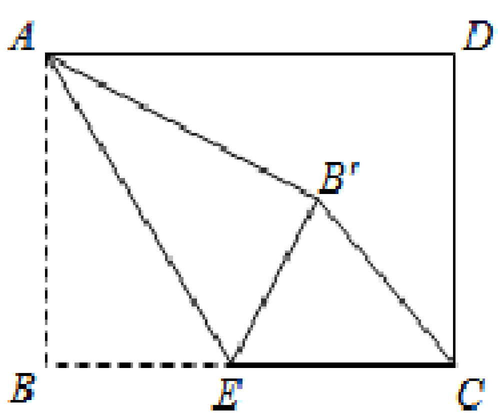
A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

二、填空题

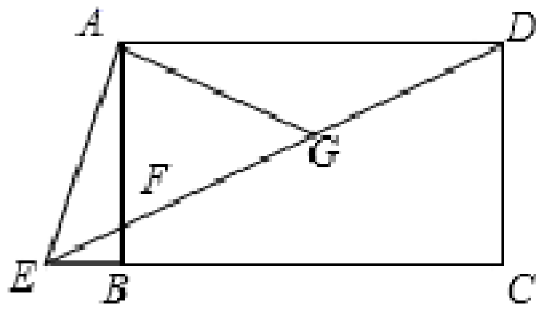
11.如图，矩形 ABCD 中，M 是边 CD 的中点，连接 AM 取 AM 的中点 M ， 连接 BN ．若 AB＝2 ， BC＝3 ，则 BN 的长为_________.



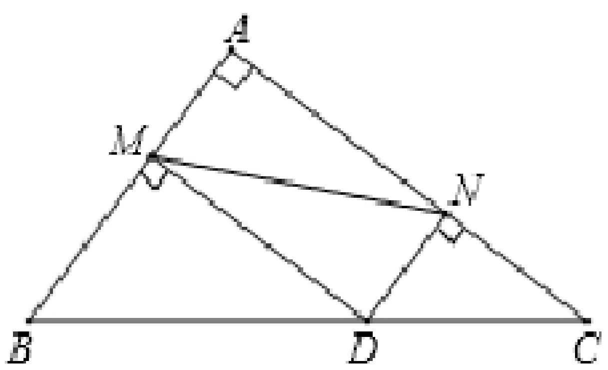
12.如图，在长方形 ABCD 中，AB＝3，BC=4，点 E 是边 BC 上的一点，连接 AE，把∠B 沿 AE 折叠，使点 B 落在点 B' 处，当△CEB' 为直角三角形时，BE 的长为_________.



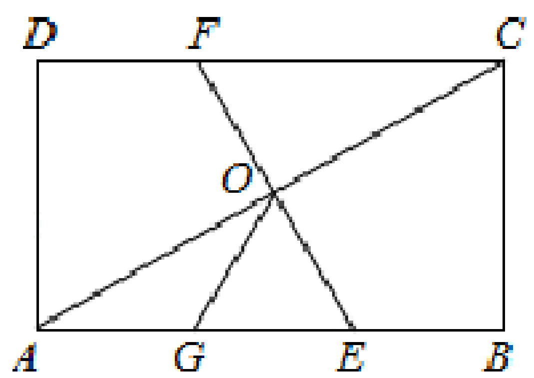
13.四边形 ABCD 是矩形，点 E 在线段 CB 的延长线上，连接 DE 交 AB 于点 F ，$\angle AED=2\angle CED$ ，点 G 是 DF 的中点．BE＝1，AG＝4，则 CD＝________．



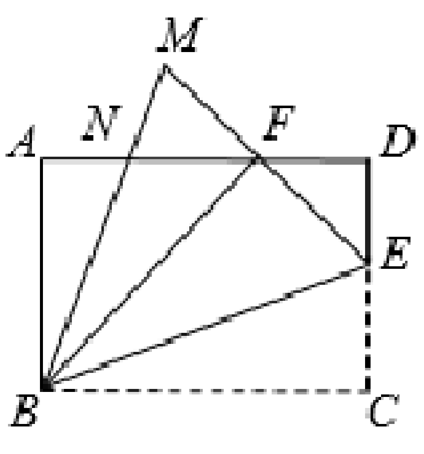
14.如图，在 $Rt\Delta ABC$ 中，$\angle BAC=90°$ ，且 $BA=3$ ，$AC=4$ ，点 D 是斜边 BC 上的一个动点，过点 D 分别作 $DM\perp AB$ 于点 M ，$DN\perp AC$ 于点 N ，连接 MN ，则线段 MN 的最小值为________．



15.如图，在矩形 ABCD 中，O 为 AC 中点，EF 过 O 点且 EF⊥AC 分别交 DC 于 F，交 AB 于 E，点 G 是 AE 中点且∠AOG=30°．某班学习委员得到四个结论：①DC=3OG；②OG= $\frac{1}{2}$ BC；③ △ OGE 是等边三角形；④$S_{\triangle AOE}=\frac{1}{6}S_{矩形ABCD}$ ，问：学习委员得到结论正确的是________．（填写所有正确结论的序号）



16.如图，在矩形 ABCD 中，$BC=16$ ，E 为 CD 上一点，将 △BCE 沿 BE 折叠，使点 C 正好落在 AD 边上的 F 处，作 $\angle ABF$ 的平分线交 AD 于 N ，交 EF 的延长线于 M ，若 $NF=\frac{1}{2}BC$ ，则 AB 的长为 ________．



三、解答题

17.四边形 ABCD 为矩形，E 是 AB 延长线上的一点．

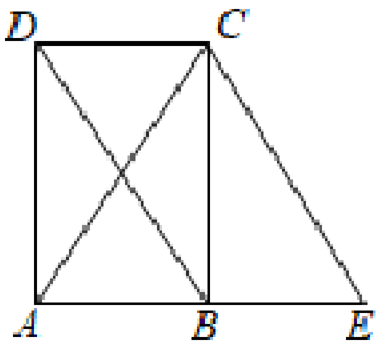


图1

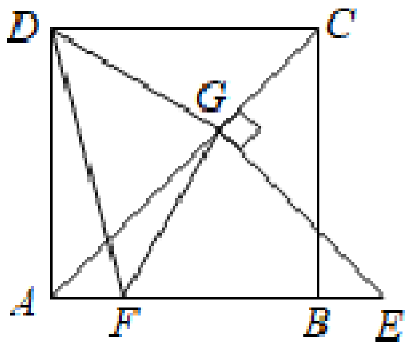
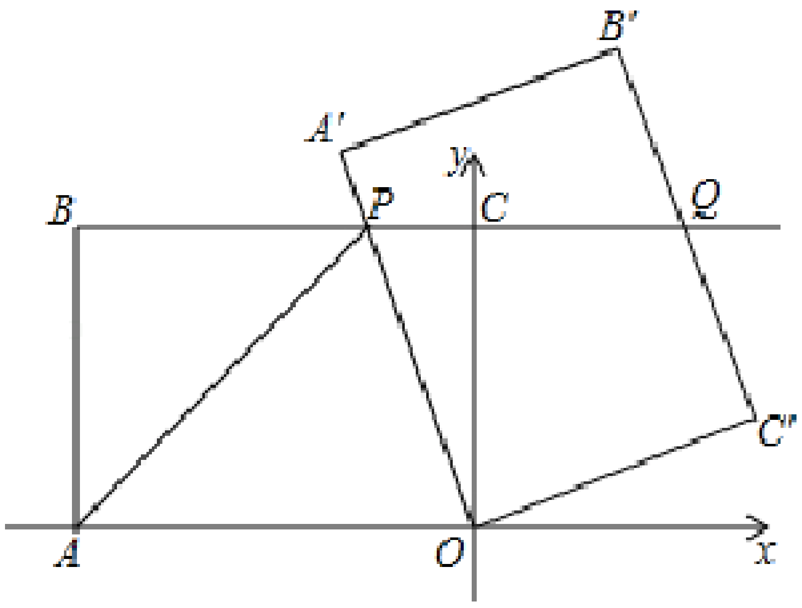


图2

（1）若 $AC=EC$，如图 1，求证：四边形 BECD 为平行四边形；

（2）若 $AB=AD$，点 F 是 AB 上的点，$AF=BE$，$EG\perp AC$ 于点 G，如图 2，求证：△DGF 是等腰直角三角形．

18.如图，在平面直角坐标系中，O 为坐标原点，点 A 的坐标为$(-8,0)$，直线 BC 经过点 $B(-8,6)$，$C(0,6)$，将四边形 OABC 绕点 O 按顺时针方向旋转角度α得到四边形 OA′B′C′，此时边 OA′与边 BC 交于点 P，边 B′C′与 BC 的延长线交于点 Q，连接 AP．

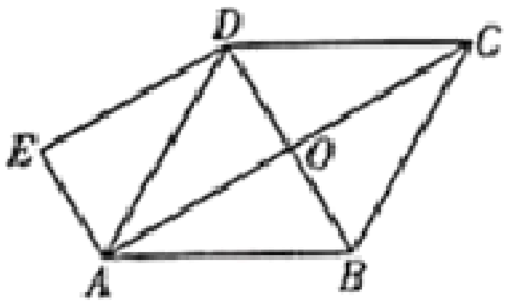


（1）四边形 OABC 的形状是________．

（2）在旋转过程中，当∠PAO=∠POA，求 P 点坐标．

（3）在旋转过程中，当 P 为线段 BQ 中点时，连接 OQ，求△OPQ 的面积．

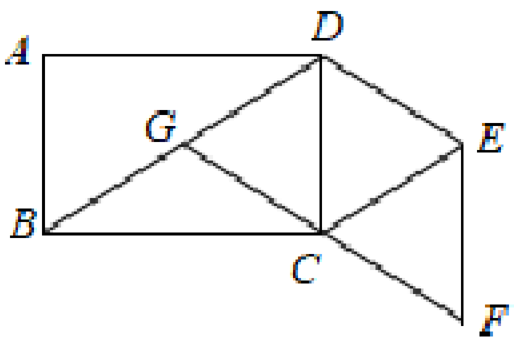
19.如图，菱形 ABCD 的对角线 AC、BD 相交于点 O，分别过 A、D 两点作 AO、DO 的垂线，两垂线交于点 E。



（1）求证：四边形 AODE 是矩形；

（2）若∠DAE=60°，AD=6，求 BD 的长。

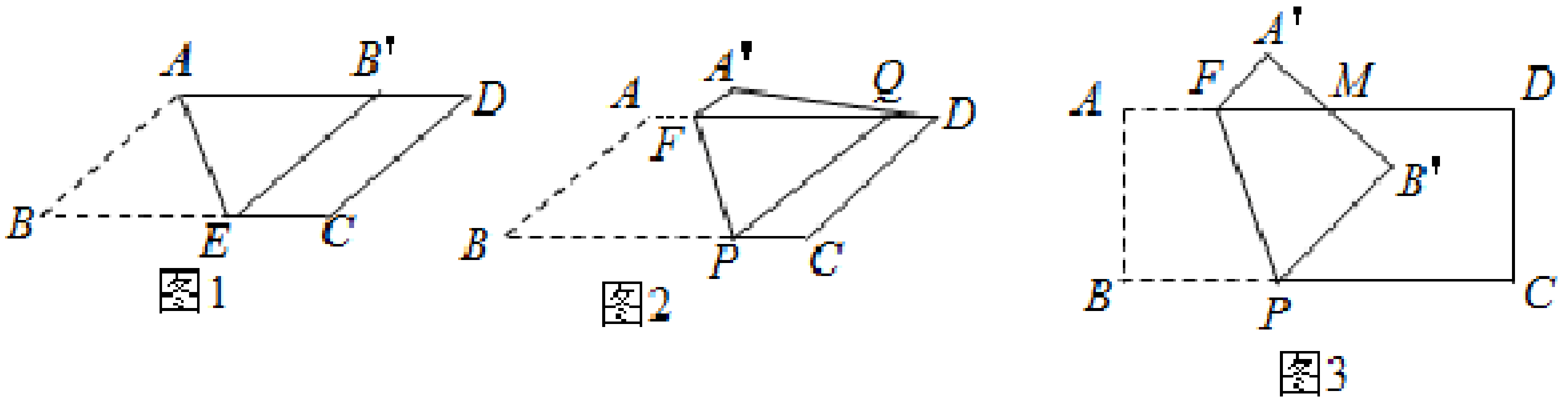
20.如图，四边形 ABCD 为矩形，G 是对角线 BD 的中点．连接 GC 并延长至 F，使 $CF=GC$，以 DC、CF 为邻边作 ▱DCFE，连接 CE．



（1）若四边形 DCFE 是菱形，判断四边形 CEDG 的形状，并证明你的结论．

（2）在（1）条件下，连接 DF，若 $BC=\sqrt{3}$，求 DF 的长．

21.探索与应用：如图

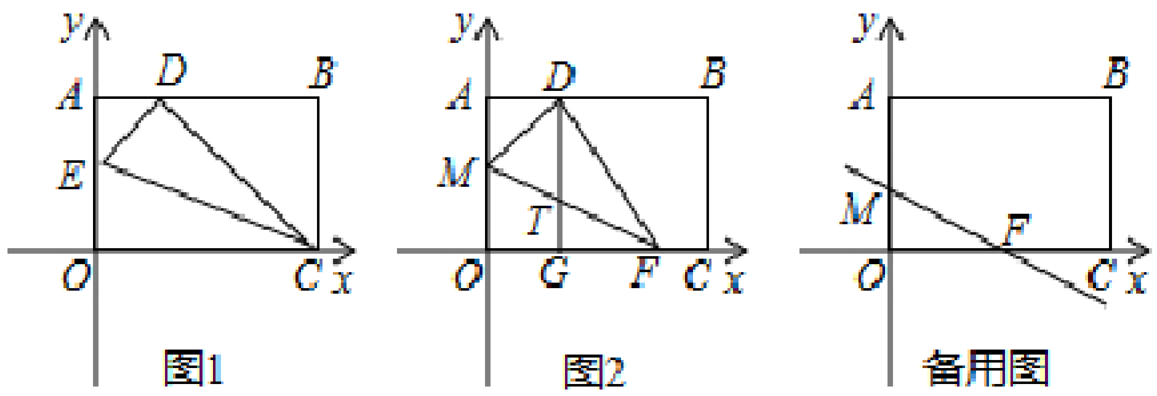


（1）问题解决：如图 1.在平行四边形纸片 ABCD（AD＞AB）中，将纸片沿过点 A 的直线折叠，使点 B 落在 AD 上的点 B' 处，折线 AE 交 BC 于点 E，连接 B'E.求证：四边形 $ABEB'$ 是菱形.

（2）规律探索：如图 2，在平行四边形纸片 ABCD（AD＞AB）中，将纸片沿过点 P 的直线折叠，点 B 恰好落在 AD 上的点 Q 处，点 A 落在点 A′ 处，得到折痕 FP，那么△PFQ 是等腰三角形吗？请说明理由.

（3）拓展应用：如图 3，在矩形纸片 ABCD（AD＞AB）中，将纸片沿过点 P 的直线折叠，得到折痕 FP，点 B 落在纸片 ABCD 内部点 B' 处，点 A 落在纸片 ABCD 外部点 A' 处，$A'B'$ 与 AD 交于点 M，且 $A'M = B'M$.已知：AB＝4，AF＝2，求 BP 的长.

22.将一矩形纸片 $OABC$ 放在直角坐标系中，O 为原点，C 在 x 轴上，$OA=9$，$OC=15$.



（1）如图 1，在 OA 上取一点 E，将 $\triangle EOC$ 沿 EC 折叠，使 O 点落至 AB 边上的 D 点，求直线 EC 的解析式；

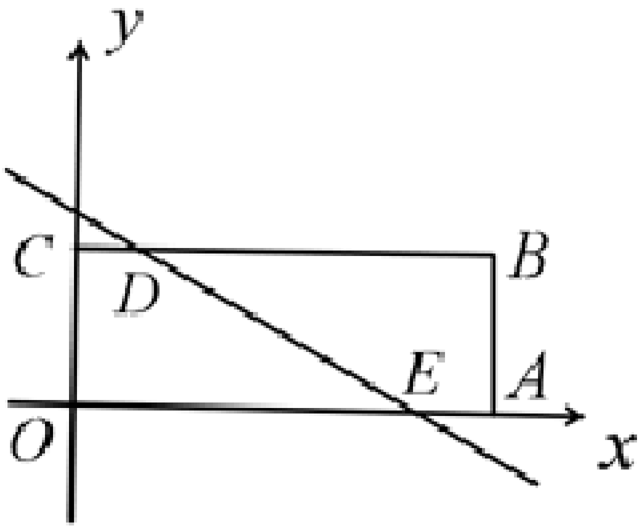
（2）如图 2，在 OA、OC 边上选取适当的点 M、F，将 $\triangle MOF$ 沿 MF 折叠，使 O 点落在 AB 边上的 D' 点，过 D' 作 $DG\perp CO$ 于点 G 点，交 MF 于 T 点.

①求证：$TG=AM$；

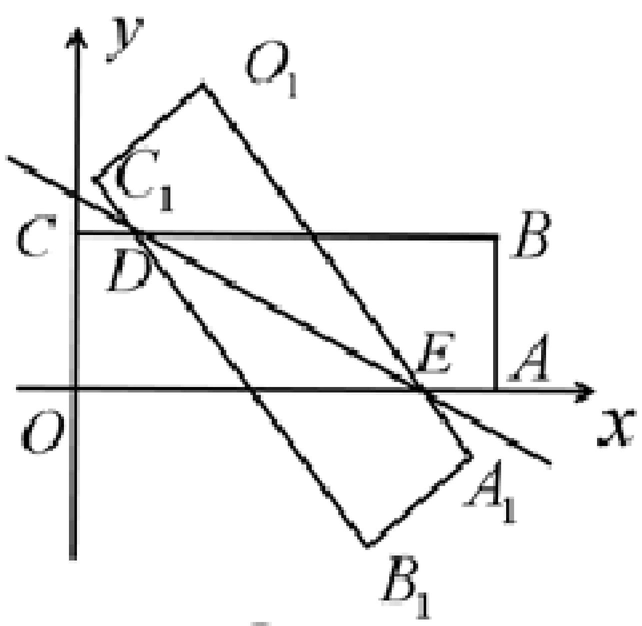
②设 $T(x,y)$，探求 y 与 x 满足的等量关系式，并将 y 用含 x 的代数式表示（指出变量 x 的取值范围）；

(3) 在(2)的条件下，当 $x=6$ 时，点 P 在直线 MF 上，问坐标轴上是否存在点 Q，使以 M、D'、Q、P 为顶点的四边形是平行四边形，若存在，请直接写出 Q 点坐标；若不存在，请说明理由.

23.在平面直角坐标系中，O 为原点，四边形 OABC 是矩形，点 A，C 的坐标分别是 $(3,0)$，$(0,1)$．点 D 是边 BC 上的动点(与端点 B，C 不重合)，过点 D 作直线 $y=-\frac{1}{2}x+b$ 交边 OA 于点 E．



图①



图②

（1）如图①，直接写出 D，E 两点的坐标（用含 b 的式子表示）．

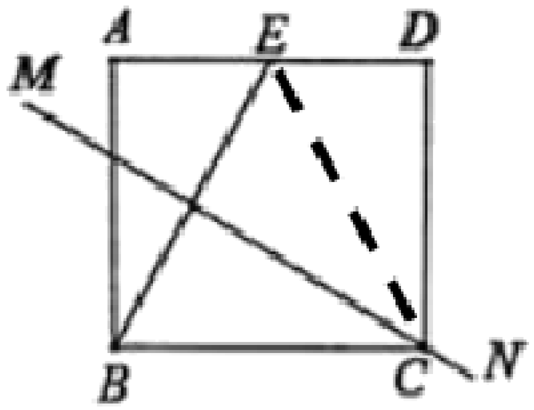
（2）如图②，若矩形 OABC 关于直线 DE 的对称图形为矩形 $O_1A_1B_1C_1$，试探究矩形 $O_1A_1B_1C_1$ 与距形 OABC 的重叠部分的面积是否发生变化？若不变，求出重叠部分的面积：若改变，请说明理由；

（3）矩形 OABC 绕着它的对称中心旋转，如果旋转前后两矩形重叠部分的图形是菱形，请直接写出这个菱形面积的最大值和最小值.

答案

一、选择题

1.解：连接 EC，



∵矩形 ABCD，点 E 是 AD 的中点，AE=2

∴AD=BC=2AE=4，DE=AE=2，∠D=90°，

∵BE 的垂直平分线 MN 恰好过点 C，

∴CE=BC=4，

在 Rt△CDE 中，

$AB=CD=\sqrt{CE^2-DE^2}=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}$.

故答案为：D.

2.解：∵四边形 ABCD 是矩形，

∴∠A＝90°，AB＝CD，AD＝BC，

∵AN＝3，MN＝5，

∴AM＝ $\sqrt{MN^2-AN^2}=\sqrt{5^2-3^2}$ ＝4，

∵M 是 AD 边中点，

∴AM＝DM＝4，BC＝8，

∵将矩形分别沿 MN、MC 折叠，A、D 两点刚好落在点 E 处，

∴AN＝NE＝3，CE＝CD，

∵$BN^2+BC^2=CN^2$，

∴$x^2+8^2=(x+6)^2$，

解得 x＝ $\frac{7}{3}$.

故答案为：B.

3.证明：∵四边形 ABCD 是平行四边形，

∴OA=OC，OB=OD

∵对角线 BD 上的两点 M、N 满足 BM=DN，

∴OB-BM=OD-DN，即 OM=ON，

∴四边形 AMCN 是平行四边形，

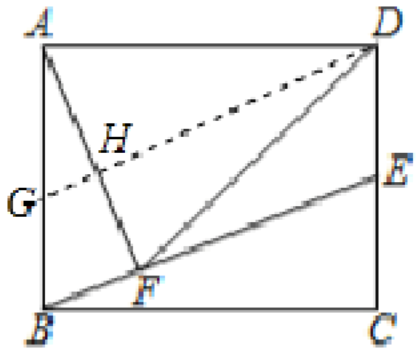
∵2OM=AC，

∴MN=AC，

∴四边形 AMCN 是矩形.

故答案为：D.

4.解：过 D 作 DH⊥AF 于点 H，延长 DH 与 AB 相交于点 G，



∵四边形 ABCD 为矩形，

∴AD=BC，

∵DF=BC，

∴DA=DF，

∴AH=FH，

∵AF⊥BE，

∴DG∥BE，

∴GH 为△ABF 的中位线，

∴AG=BG= $\frac{1}{2}$ AB=3，

∵矩形 ABCD 中，AB=DC=6，AB∥DC，

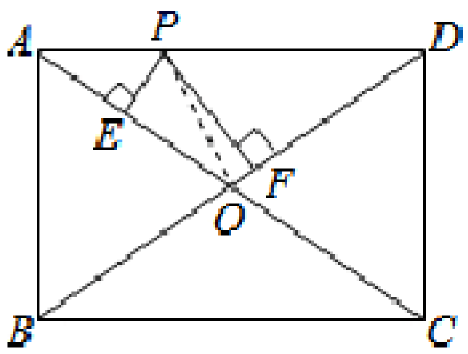
∴四边形 BEDG 为平行四边形，

∴DE=BG=3，

∴CE=CD-DE=6-3=3.

故答案为：C.

5.解：连接 OP，



∵矩形 ABCD 的两边 AB=3，BC=4，

∴$S_{矩形ABCD}$=AB•BC=12，OA=OC，OB=OD，AC=BD，AC= $\sqrt{AB^2+BC^2}$ =5，

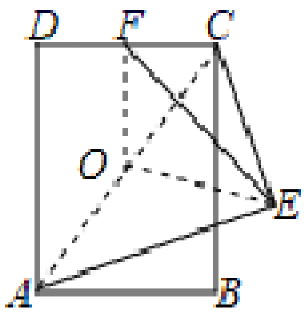
∴$S_{\triangle AOD}$ = $\frac{1}{4}$ $S_{矩形ABCD}$ =3，OA=OD= $\frac{5}{2}$ ，

∴$S_{\triangle AOD}$=$S_{\triangle AOP}$+$S_{\triangle DOP}$ = $\frac{1}{2}$ OA•PE+ $\frac{1}{2}$ OD•PF= $\frac{1}{2}$ OA（PE+PF）= $\frac{1}{2}$ × $\frac{5}{2}$ ×（PE+PF）=3，

∴PE+PF= $\frac{12}{5}$ =2.4.

故答案为：D.

6.解：如图，连接 AC，取 AC 的中点 O，连结 OF，OE，



∵矩形 ABCD 中，AB＝6，BC＝8，∠B＝90°，F 为 CD 的中点，

∴AC＝ $\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{6^2+8^2}=10$，

∵AO＝OC，CF＝FD，

∴OF＝ $\frac{1}{2}$ AD＝ $\frac{1}{2}$ BC＝4，

∵∠AEC＝90°，

∴OE＝ $\frac{1}{2}$ AC＝ $\frac{1}{2}\times 10$ ＝5，

由三角形的三边关系得，O、E、F 三点共线时 EF 最大，

此时 $EF_{最大}$＝4+5＝9.

故答案为：C.

7.解：∵DE∥AC，CE∥BD，

∴四边形 OCED 为平行四边形，

∵四边形 ABCD 是菱形，AC＝12，BD＝16，

∴AC⊥BD， $OA=OC=\frac{1}{2}AC=6, OB=OD=\frac{1}{2}BD=8,$

∴∠DOC＝90°， $CD=\sqrt{OC^2+OD^2}=\sqrt{6^2+8^2}=10,$

∴平行四边形 OCED 为矩形，

∴OE＝CD＝10，

故答案为：C.

8.解：∵四边形 ABCD 是矩形，

∴AB=CD=2，∠A=∠D=∠DCB=90°，

∵∠DCE=45°，

∴DE=DC=2，

∴EC=2 $\sqrt{2}$，

∵∠DCE=45°，

∴∠DEC=45°，

∵EB 平分∠AEC，

∴∠AEB=∠BEC= $\frac{1}{2}$ ∠AEC= $\frac{180°-45°}{2}$ =67.5°，

∵AD∥BC

∴∠AEB=∠EBC，

∴∠BEC=∠EBC，

∴BC=CE=2 $\sqrt{2}$，

∴AD=BC=2 $\sqrt{2}$，

∴AE=AD-DE=2 $\sqrt{2}$ -2，

故答案为：B.

9.解：由题意得，△AED 和△BCG 是等腰直角三角形，

$\therefore\ \angle ADE=\angle DAE=\angle BCG=\angle GBC=45^{\circ}$

∵四边形 ABCD 是平行四边形，

∴AD=BC，CD=AB，∠ADC=∠ABC，∠BAD=∠DCB

∴∠HDC=∠FBA，∠DCH=∠BAF，

∴△AED≌△CGB，△CDH≌ABF

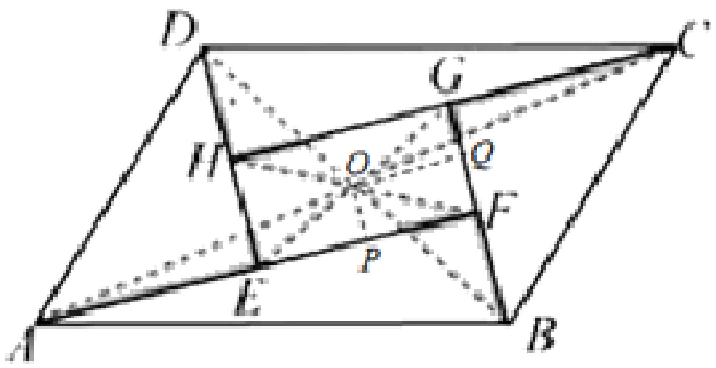
∴AE=DE=BG=CG

∵四边形 HEFG 是矩形

∴GH=EF，HE=GF

设 AE=DE=BG=CG=a， HE=GF= b ，GH=EF= c

过点 O 作 OP⊥EF 于点 P，OQ⊥GF 于点 Q，



∴OP//HE，OQ//EF

∵点 O 是矩形 HEFG 的对角线交点，即 HF 和 EG 的中点，

∴OP，OQ 分别是△FHE 和△EGF 的中位线，

$\therefore\ OP=\frac{1}{2}HE=\frac{1}{2}b$ ， $OQ=\frac{1}{2}EF=\frac{1}{2}c$

$\because\ S_{\triangle BOF}=\frac{1}{2}BF\cdot OQ=\frac{1}{2}(a-b)\times\frac{1}{2}c=\frac{1}{4}(a-b)c$

$S_{\triangle AOE}=\frac{1}{2}AE\cdot OP=\frac{1}{2}a\times\frac{1}{2}b=\frac{1}{4}ab$

$\because\ S_{\triangle BOF}=S_{\triangle AOE}$

$\therefore\ \frac{1}{4}(a-b)c=\frac{1}{4}ab$ ，即 $ac-bc=ab$

而 $S_1=S_{\triangle AED}=\frac{1}{2}AE\cdot DE=\frac{1}{2}a^2$ ，

$S_2=S_{\triangle AFB}=\frac{1}{2}AF\cdot BF=\frac{1}{2}(a+c)(a-b)=\frac{1}{2}(a^2-ab+ac-bc)=\frac{1}{2}(a^2-ab+ab)=\frac{1}{2}a^2$

所以， $S_1=S_2$ ，A 符合题意，

$S_3=HE\cdot EF=(a-b)(a+c)=a^2-bc-ab+ac=a^2+ab-ab=a^2$

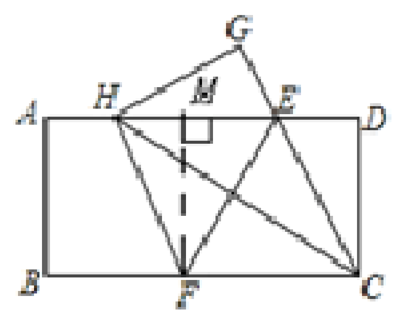
$\therefore\ S_1\neq S_3$ ，B 不符合题意，

而 $AB=AD$ 于 $EH=GH$ 都不一定成立，故 C,D 都不符合题意，

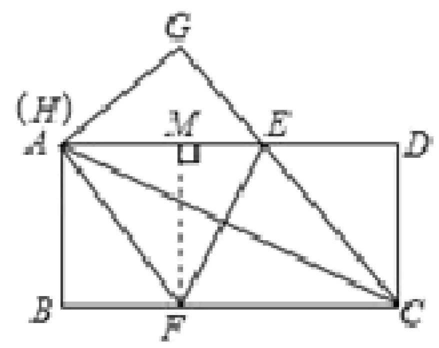
故答案为：A

10.解：∵将纸片 ABCD 沿直线 EF 折叠，

∴FC=FH，∠HFE=∠CFE，
∵AD∥BC，
∴∠HEF=∠EFC=∠HFE，HE∥FC，
∴△HFE 为等腰三角形，
∴HE=HF=FC，
∵EH 与 CF 都是矩形 ABCD 的对边 AD、BC 的一部分，
∴EH∥CF，且 HE =FC，
∴四边形 CFHE 是平行四边形，
∵FC=FH，
∴四边形 CFHE 是菱形，
故①符合题意；
∵HC 为菱形的对角线，
∴∠BCH＝∠ECH，∠BCD=90°，
∴只有∠DCE＝30° 时 EC 平分∠DCH，
故②不符合题意；



过点 F 作 FM⊥AD 于 M，



点 H 与点 A 重合时，BF 最小，设 BF＝x，则 AF＝FC＝8－x，
在 Rt△ABF 中，$AB^2+BF^2=AF^2$，
即 $4^2+x^2=(8-x)^2$，
解得 x＝3，
点 G 与点 D 重合时，点 H 与点 M 重合，BF 最大，CF=FM=DM＝CD＝4，
∴BF＝4，
∴线段 BF 的取值范围为 3≤BF≤4，
故③符合题意；
当点 H 与点 A 重合时，由③中 BF=3，
∴AF=AE=CF=EC=8-3=5，
则 ME＝5－3＝2，
由勾股定理得，
$EF=\sqrt{MF^2+ME^2}=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$，