

3.3 幂函数



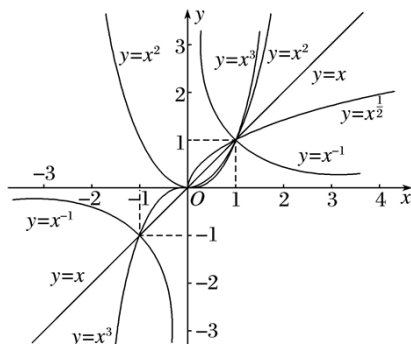
知识梳理

学问点一 幂函数的概念

一般地，函数 $y=x^a$ 叫做幂函数，其中 x 是自变量， a 是常数.

学问点二 五个幂函数的图象与性质

1. 在同一平面直角坐标系内函数 (1) $y=x$; (2) $y=x^{\frac{1}{2}}$; (3) $y=x^2$; (4) $y=x^{-1}$; (5) $y=x^3$ 的图象如图.



2. 五个幂函数的性质

	$y=x$	$y=x^2$	$y=x^3$	$y=x^{\frac{1}{2}}$	$y=x^{-1}$
定义域	$\mathbf{R}$	$\mathbf{R}$	$\mathbf{R}$	$[0, +\infty)$	$\{x x \neq 0\}$
值域	$\mathbf{R}$	$[0, +\infty)$	$\mathbf{R}$	$[0, +\infty)$	$\{y y \neq 0\}$
奇偶性	奇	偶	奇	非奇非偶	奇
单调性	增	在 $[0, +\infty)$ 上增, 在 $(-\infty, 0]$ 上减	增	增	在 $(0, +\infty)$ 上减, 在 $(-\infty, 0)$ 上减

学问点三 一般幂函数的图象特征

- 全部的幂函数在 $(0, +\infty)$ 上都有定义，并且图象都过点 $(1, 1)$.
- 当 $a > 0$ 时，幂函数的图象通过原点，并且在区间 $[0, +\infty)$ 上是增函数.
特殊地，当 $a > 1$ 时，幂函数的图象下凸；当 $0 < a < 1$ 时，幂函数的图象上凸.
- 当 $a < 0$ 时，幂函数的图象在区间 $(0, +\infty)$ 上是减函数.
- 幂指数互为倒数的幂函数在第一象限内的图象关于直线 $y=x$ 对称.
- 在第一象限作直线 $x=a (a > 1)$ ，它同各幂函数图象相交，按交点从下到上的依次，幂指数按从小到大的依次排列.



题型探究

题型一、幂函数的定义

1. 下列函数中，是幂函数的是 ()

A. $y = 2x$

B. $y = x^2$

C. $y = 2^x$

D. $y = \log_2 x$

【答案】B

【详解】依据幂函数的形式 $y = x^a$ 可推断 B 正确，A 为一次函数，C 为指数函数，D 为对数函数

故选：B

2. 幂函数 $f(x) = x^a$ 的图象过点 $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ，则 $f(4) =$ ()

A. $\frac{1}{16}$

B. $\frac{1}{4}$

C. 2

D. 4

【答案】C

【详解】因为幂函数 $f(x) = x^a$ 的图象过点 $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ，所以有： $\frac{\sqrt{2}}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^a$ ，即 $a = \frac{1}{2}$ 。

所以 $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$ ，故 $f(4) = 4^{\frac{1}{2}} = 2$ ，

故选：C.

3. 已知幂函数 $f(x)$ 的图象过点 $\left(3, \frac{1}{3}\right)$ ，则此函数的解析式为_____.

【答案】 $f(x) = x^{-1}$

【详解】由题意，设 $f(x) = x^a$ ，代入点 $\left(3, \frac{1}{3}\right)$ 得 $\frac{1}{3} = 3^a$ ，解得 $a = -1$ ，则 $f(x) = x^{-1}$ 。

故答案为： $f(x) = x^{-1}$ 。

4. 已知幂函数 $y = (m^2 + m - 1)x^{m+1}$ 的图象关于 y 轴对称，则 $m =$ _____.

【答案】1

【详解】因为 $y = (m^2 + m - 1)x^{m+1}$ 为幂函数，所以 $m^2 + m - 1 = 1$ ，解得 $m = 1$ 或 $m = -2$ ，

当 $m = 1$ 时 $y = x^2$ 为偶函数，函数图象关于 y 轴对称，符合题意；

当 $m = -2$ 时 $y = x^{-1}$ 为奇函数，函数图象关于原点对称，不符合题意；

即 $m = 1$ ；

故答案为：1

题型二、幂函数的定义域

1. 下列幂函数中，定义域为 $\mathbf{R}$ 的是 ()

- A. $y = x^{-1}$ B. $y = x^{-\frac{1}{2}}$ C. $y = x^{\frac{1}{3}}$ D. $y = x^{\frac{1}{2}}$

【答案】C

【详解】对选项 A，则有： $x \neq 0$

对选项 B，则有： $x > 0$

对选项 C，定义域为： $\mathbf{R}$

对选项 D，则有： $x \geq 0$

故答案选：C

2. 已知幂函数 $f(x)$ 的图象过点 $(2, \sqrt{2})$ ，则 $f(x)$ 的定义域为 ()

- A. $\mathbf{R}$ B. $(0, +\infty)$
C. $[0, +\infty)$ D. $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

【答案】C

【详解】设 $f(x) = x^\alpha$ ，因为 $f(x)$ 的图象过点 $(2, \sqrt{2})$ ，

所以 $2^\alpha = \sqrt{2}$ ，解得 $\alpha = \frac{1}{2}$ ，则 $f(x) = \sqrt{x}$ ，

故 $f(x)$ 的定义域为 $[0, +\infty)$ 。

故选：C

3. 写出函数 $y = x^{\frac{5}{3}}$ 与 $y = x^{\frac{1}{5}}$ 的定义域和值域。

【答案】见解析

【详解】令 $f(x) = x^{\frac{5}{3}} = \sqrt[3]{x^5}$ ，定义域为 $\mathbf{R}$ ，因为 $f(-x) = -\sqrt[3]{x^5} = -f(x)$ ，所以函数 $f(x)$ 为奇函数，且在 $(0, +\infty)$ 上单调递增，所以 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，故值域为 $\mathbf{R}$ 。

令 $g(x) = x^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{x}$ ，定义域为 $\mathbf{R}$ ，因为 $g(-x) = -\sqrt[5]{x} = -g(x)$ ，所以函数 $g(x)$ 为奇函数，且在 $(0, +\infty)$ 上单调递增，所以 $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，故值域为 $\mathbf{R}$ 。

题型三、幂函数的值域

1. 函数 $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$ 的定义域为_____，值域为_____。

【答案】 $(0, +\infty)$ $(0, +\infty)$

【详解】 $Q f(x) = x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$, 所以 $x > 0$,

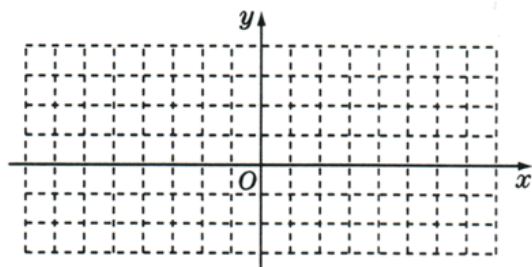
因此, 函数 $f(x) = x^{-\frac{1}{2}}$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, 值域为 $(0, +\infty)$.

故答案为: $(0, +\infty)$; $(0, +\infty)$.

2. 求函数 $y = x^{m^2+m+1} (m \in N)$ 的定义域、值域, 并推断其单调性

【详解】因为, $m \in N$, $m^2 + m + 1 = m(m+1) + 1$ 必为奇数, 且大于 0, 所以定义域为 R , 值域为 R , 并且在 $(-\infty, +\infty)$ 上为增函数.

3. (1) 运用五点作图法, 在图中画出 $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ 的图象, 并注明定义域.



(2) 求函数 $h(x) = x^{\frac{4}{3}} - 2x^{\frac{2}{3}} - 3$ 的值域.

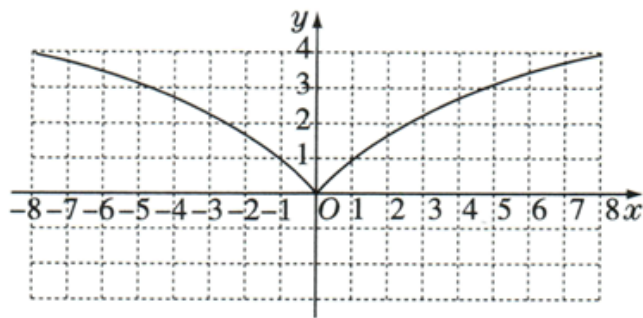
【答案】(1) 作图见解析, 定义域为 R ; (2) $[-4, +\infty)$.

【详解】(1) 由于 $f(x) = x^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{x^2}$,

则 $f(0) = 0$, $f(-1) = f(1) = 1$, $f(-8) = f(8) = \sqrt[3]{8^2} = 4$,

所以 $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ 过点 $(0, 0), (-1, 1), (1, 1), (-8, 4), (8, 4)$,

故 $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ 的图象, 如图所示, 函数的定义域为 R ;



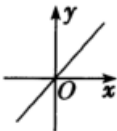
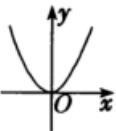
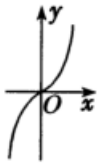
(2) 由题可知 $h(x) = x^{\frac{4}{3}} - 2x^{\frac{2}{3}} - 3$,

设 $x^{\frac{2}{3}} = t \geq 0$, 则 $h(x) = m(t) = t^2 - 2t - 3 = (t-1)^2 - 4 \geq -4$,

当 $t=1$ 时取等号, 故 $h(x)$ 的值域为 $[-4, +\infty)$.

题型四、幂函数的图像

1. 五个幂函数的图象与性质

解析式	$y = x$	$y = x^2$	$y = x^3$	$y = x^{\frac{1}{2}}$	$y = \frac{1}{x}$
图象					
定义域	_____	_____	_____	_____	_____
值域	_____	_____	_____	_____	_____
奇偶性	_____函数	_____函数	_____函数	_____函数	_____函数
单调性	在 $(-\infty, +\infty)$ 上 单调 _____	在 $(-\infty, 0]$ 上单 调_____, 在 $(0, +\infty)$ 上单调 _____	在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调 _____	在 $[0, +\infty)$ 上单 调_____	在 $(-\infty, 0)$ 上 单调 _____, 在 $(0, +\infty)$ 上单 调 _____
定点	_____				

【答案】 定义域: 1 $\mathbf{R}$, 2 $\mathbf{R}$, 3 $\mathbf{R}$, 4 $[0, +\infty)$, 5 $\{x | x \neq 0\}$ 值域: 1 $\mathbf{R}$, 2 $[0, +\infty)$,

3 $\mathbf{R}$, 4 $[0, +\infty)$, 5 $\{y | y \neq 0\}$ 奇偶性: 1 奇函数, 2 偶函数, 3 奇函数, 4 既不是奇

函数也不是偶函数, 5 奇函数 单调性: 1 递增, 2 递减; 递增, 3 递增, 4 递增, 5

递增, 递增 定点: (1,1)

2. 推断正误.

(1) 幂函数的图象必过点 (0,0) 和 (1,1). ()

(2) 幂函数的图象都过其次、四象限. ()

(3) 当幂指数 α 取 1, 3, $\frac{1}{2}$ 时, 幂函数 $y = x^\alpha$ 是增函数. ()

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。
如要下载或阅读全文，请访问：

<https://d.book118.com/617056200026006132>