• 第6讲　几何概型

最新考纲　1.了解随机数的意义，能运用模拟方法估计概率；2.了解几何概型的意义.

知识梳理

1.几何概型的定义

如果每个事件发生的概率只与构成该事件区域的<u>长度</u>(面积或体积)成比例，那么称这样的概率模型为几何概率模型，简称为几何概型.

2.几何概型的两个根本特点

(1)无限性：在一次试验中，可能出现的结果有<u>无限多个</u>;

(2)等可能性：每个结果的发生具有<u>等可能性</u>.

3.几何概型的概率公式

$$P(A)=\frac{\text{构成事件}A\text{的区域长度（面积或体积）}}{\text{试验的全部结果所构成的区域长度（面积或体积）}}.$$

诊断自测

1.判断正误(在括号内打"√"或"×") 精彩PPT展示

(1)随机模拟方法是以事件发生的频率估计概率.(　　)

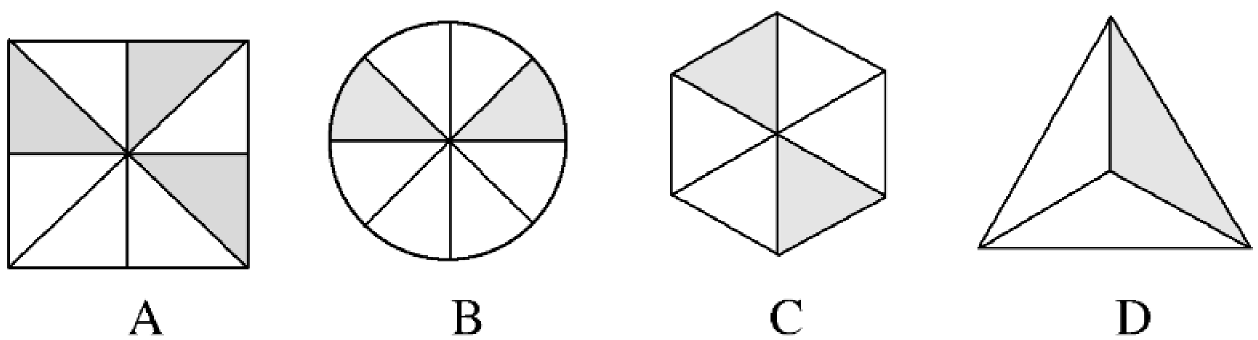
(2)从区间[1，10]内任取一个数，取到1的概率是$\frac{1}{10}$.(　　)

(3)概率为0的事件一定是不可能事件.(　　)

(4)在几何概型定义中的区域可以是线段、平面图形、立体图形.(　　)

答案　(1)√　(2)×　(3)×　(4)√

2.(必修3P140练习1改编)有四个游戏盘，将它们水平放稳后，在上面扔一颗玻璃小球，假设小球落在阴影局部，那么可中奖，小明要想增加中奖时机，应选择的游戏盘是(　　)



解析　如题干选项中图，各种情况的概率都是其面积比，中奖的概率依次为 $P(A)=\frac{3}{8}$，$P(B)=\frac{2}{8}$，$P(C)=\frac{2}{6}$，$P(D)=\frac{1}{3}$，所以 $P(A)>P(C)=P(D)>P(B)$.

答案　A

3.(2016·全国 II 卷)某路口人行横道的信号灯为红灯和绿灯交替出现，红灯持续时间为 40 秒.若一名行人来到该路口遇到红灯，则至少需要等待 15 秒才出现绿灯的概率为(　　)

A.$\frac{7}{10}$　　B.$\frac{5}{8}$　　C.$\frac{3}{8}$　　D.$\frac{3}{10}$

解析　至少需要等待 15 秒才出现绿灯的概率为$\frac{40-15}{40}=\frac{5}{8}$.

答案　B

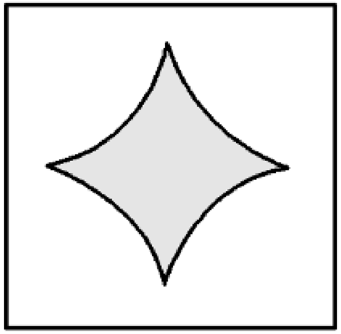
4.球O内切于棱长为2的正方体，假设在正方体内任取一点，那么这一点不在球内的概率为________.

解析　由题意知球的半径为1，其体积为$V_{球}=\frac{4\pi}{3}$，正方体的体积为$V_{正方体}=2^3=8$，则这一点不在球内的概率

$$P=1-\frac{\frac{4\pi}{3}}{8}=1-\frac{\pi}{6}.$$

答案　$1-\frac{\pi}{6}$

5.(2021·贵阳质检)如下图，在边长为1的正方形中随机撒1 000粒豆子，有180粒落到阴影局部，据此估计阴影局部的面积为__________.



解析 由题意知，$\frac{S_{阴}}{S_{正}}=\frac{180}{1\ 000}=0.18.$

$\because S_{正}=1$，$\therefore S_{阴}=0.18.$

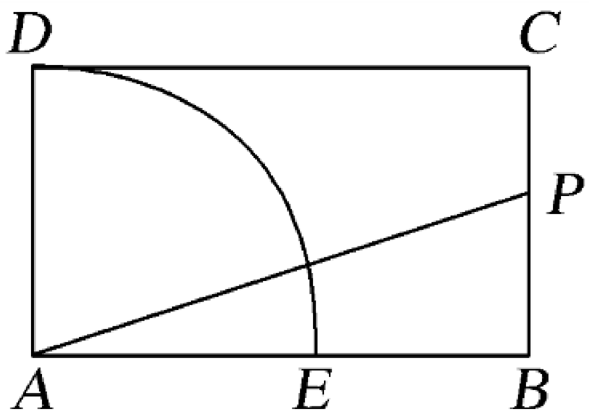
答案 0.18

考点一　与长度(角度)有关的几何概型

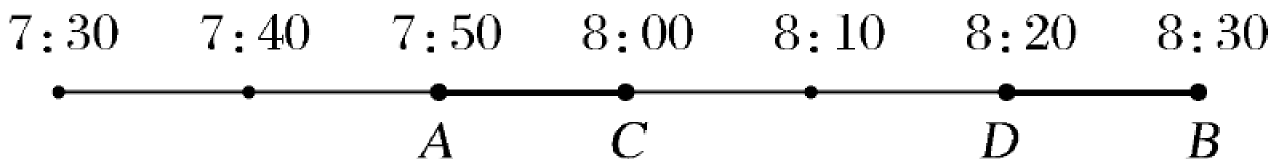
【例 1】 (1)(2016·全国Ⅰ卷)某公司的班车在 7：30，8：00，8：30 发车，小明在 7：50 至 8：30 之间到达发车站乘坐班车，且到达发车站的时刻是随机的，则他等车时间不超过 10 分钟的概率是(　　)

A.$\frac{1}{3}$　　B.$\frac{1}{2}$　　C.$\frac{2}{3}$　　D.$\frac{3}{4}$

(2)如图，四边形 $ABCD$ 为矩形，$AB=\sqrt{3}$，$BC=1$，以 A 为圆心，1 为半径作四分之一个圆弧$\overset{\frown}{DE}$，在$\angle DAB$ 内任作射线 AP，则射线 AP 与线段 BC 有公共点的概率为________.



解析　(1)如下图，画出时间轴：



小明到达的时间会随机的落在图中线段 AB 上，而当他的到达时间落在线段 AC 或 DB 上时，才能保证他等车的时间不超过 10 分钟，根据几何概型得所求概率 $P=\frac{10+10}{40}=\frac{1}{2}$.

(2)因为在$\angle DAB$内任作射线AP，则等可能基本事件为"$\angle DAB$内作射线AP"，所以它的所有等可能事件所在的区域H是$\angle DAB$，当射线AP与线段BC有公共点时，射线AP落在$\angle CAB$内，区域H为$\angle CAB$，所以射线AP与线段BC有公共点的概率为$\dfrac{\angle CAB}{\angle DAB}=\dfrac{30°}{90°}=\dfrac{1}{3}$.

答案　(1)B　(2)$\dfrac{1}{3}$

规律方法 (1)解答几何概型问题的关键在于弄清题中的考查对象和对象的活动范围.当考查对象为点，且点的活动范围在线段上时，用“线段长度”为测度计算概率，求解的核心是确定点的边界位置.

(2)①第(2)题易出现“以线段 BD 为测度”计算几何概型的概率，导致错求 $P=\frac{1}{2}$.

②当涉及射线的转动，扇形中有关落点区域问题时，应以角对应的弧长的大小作为区域度量来计算概率.事实上，当半径一定时，曲线弧长之比等于其所对应的圆心角的弧度数之比.