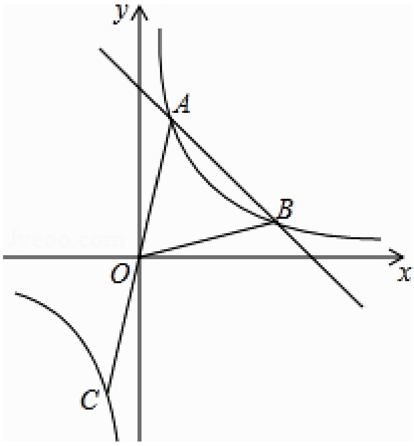
全国中考数学反比例函数的综合中考真题汇总及详细答案

一、反比例函数

1．如图，直线 y=﹣ x+b 与反比例函数 y= $\frac{k}{x}$ 的图象相交于 A（1，4），B 两点，延长 AO 交反比例函数图象于点 C，连接 OB．



（1）求 k 和 b 的值；

（2）直接写出一次函数值小于反比例函数值的自变量 x 的取值范围；

（3）在 y 轴上是否存在一点 P，使 $S_{\triangle PAC}=\frac{2}{5}S_{\triangle AOB}$？若存在请求出点 P 坐标，若不存在请说明理由．

【答案】（1）解：将 A（1，4）分别代入 y=﹣ x+b 和 $y=\frac{k}{x}$ 得：4=﹣ 1+b，4= $\frac{k}{1}$ ，解得：b=5，k=4

（2）解：一次函数值小于反比例函数值的自变量 x 的取值范围为：x＞4 或 0＜x＜1

（3）解：过 A 作 AN⊥x 轴，过 B 作 BM⊥x 轴， 由（1）知，b=5，k=4，

∴直线的表达式为：y=﹣ x+5，反比例函数的表达式为：$y=\frac{4}{x}$

由 $-x+5=\frac{4}{x}$，解得：x=4，或 x=1，

∴B（4，1），

∴ $S_{\triangle AOB}=S_{四边形ANMB}=\frac{1}{2}(AN+BM)MN=\frac{1}{2}(1+4)\times 3=\frac{15}{2}$ ，

∵ $S_{\triangle PAC}=\frac{2}{5}S_{\triangle AOB}$ ，

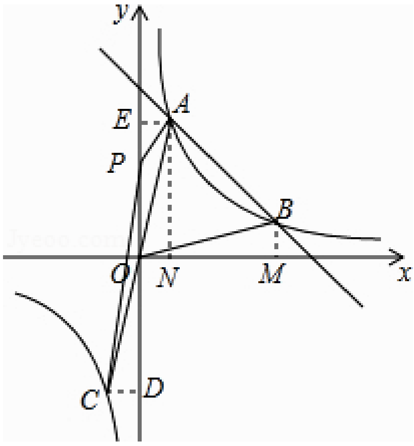
∴ $S_{\triangle PAC}=\frac{2}{5}\times\frac{15}{2}=3$ ，

过 A 作 AE⊥y 轴，过 C 作 CD⊥y 轴，设 P（0，t），

∴$S_{\triangle PAC}$= $\frac{1}{2}$ OP•CD+ $\frac{1}{2}$ OP•AE= $\frac{1}{2}$ OP （ CD+AE ） =|t|=3 ，

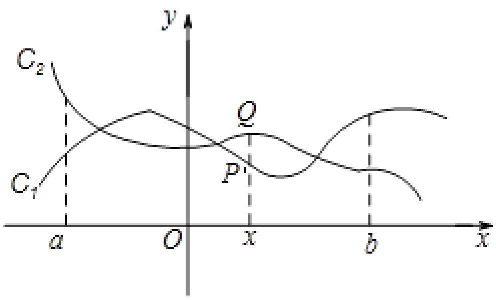
解得：t=3，t=－ 3，

∴P（0，3）或 P（0，﹣3）．



【解析】【分析】（1）由待定系数法即可得到结论；（2）根据图象中的信息即可得到结论；（3）过 A 作 AM⊥x 轴，过 B 作 BN⊥x 轴，由（1）知，b=5，k=4，得到直线的表达式为：y=－ x+5，反比例函数的表达式为：$y=\frac{4}{x}$列方程$-x+5=\frac{4}{x}$，求得 B（4，1），于是得到$S_{\triangle AOB}=S_{四边形ANMB}=\frac{1}{2}(AN+BM)MN=\frac{1}{2}(1+4)\times3=\frac{15}{2}$，由已知条件得到$S_{\triangle PAC}=\frac{2}{5}\times\frac{15}{2}=3$，过 A 作 AE⊥y 轴，过 C 作 CD⊥y 轴，设 P（0，t），根据三角形的面积公式列方程即可得到结论．

2．如图，点 P（x，y_1）与 Q（x，y_2）分别是两个函数图象 C_1 与 C_2 上的任一点．当 a≤x≤b 时，有－ 1≤y_1－ y_2≤1 成立，则称这两个函数在 a≤x≤b 上是“相邻函数”，否则称它们在 a≤x≤b 上是“非相邻函数”．例如，点 P（x，y_1）与 Q（x，y_2）分别是两个函数 y=3x+1 与 y=2x－ 1 图象上的任一点，当－ 3≤x≤－ 1 时，y_1－ y_2=（3x+1）－ （2x－ 1）=x+2，通过构造函数 y=x+2 并研究它在－ 3≤x≤－ 1 上的性质，得到该函数值的范围是－ 1≤y≤1，所以－ 1≤y_1－ y_2≤1 成立，因此这两个函数在－ 3≤x≤－ 1 上是“相邻函数”．



（1）判断函数 y=3x+2 与 y=2x+1 在－ 2≤x≤0 上是否为“相邻函数”，并说明理由；

（2）若函数 y=x²－ x 与 y=x－ a 在 0≤x≤2 上是“相邻函数”，求 a 的取值范围；

（3）若函数 $y=\frac{a}{x}$与 y=－ 2x+4 在 1≤x≤2 上是“相邻函数”，直接写出 a 的最大值与最小值．

【答案】（1）解：是“相邻函数”，

理由如下：$y_1-y_2=(3x+2)-(2x+1)=x+1$，构造函数 $y=x+1$，

∵$y=x+1$ 在 $-2\le x\le 0$，是随着 x 的增大而增大，

∴当 $x=0$ 时，函数有最大值 1，当 $x=-2$ 时，函数有最小值 -1，即 $-1\le y\le 1$，

∴$-1\le y_1-y_2\le 1$，

即函数 $y=3x+2$ 与 $y=2x+1$ 在 $-2\le x\le 0$ 上是“相邻函数”

（2）解：$y_1-y_2=(x^2-x)-(x-a)=x^2-2x+a$，构造函数 $y=x^2-2x+a$，

∵$y=x^2-2x+a=(x-1)^2+(a-1)$，

∴顶点坐标为：$(1,a-1)$，

又∵抛物线 $y=x^2-2x+a$ 的开口向上，

∴当 $x=1$ 时，函数有最小值 $a-1$，当 $x=0$ 或 $x=2$ 时，函数有最大值 a，即 $a-1\le y\le a$，

∵函数 $y=x^2-x$ 与 $y=x-a$ 在 $0\le x\le 2$ 上是“相邻函数”，

∴$-1\le y_1-y_2\le 1$，即 $\begin{cases} a\le 1 \\ a-1\ge -1 \end{cases}$，

∴$0\le a\le 1$

（3）解：$y_1-y_2=\frac{a}{x}-(-2x+4)=\frac{a}{x}+2x-4$，构造函数 $y=\frac{a}{x}+2x-4$，

∵$y=\frac{a}{x}+2x-4$

∴当 $x=1$ 时，函数有最小值 $a-2$，

当 $x=2$ 时，函数有最大值 $\frac{a}{2}$，即 $a-2\le y\le \frac{a}{2}$，

∵函数 $y=\frac{a}{x}$ 与 $y=-2x+4$ 在 $1\le x\le 2$ 上是“相邻函数”，

∴$-1\le y_1-y_2\le 1$，即 $\begin{cases} \frac{a}{2}\le 1 \\ a-2\ge -1 \end{cases}$，

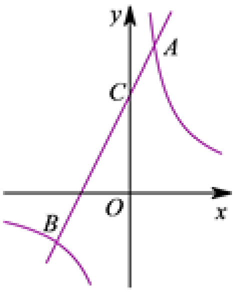
∴$1\le a\le 2$；

∴a 的最大值是 2，a 的最小值 1

【解析】【分析】（1）$y_1-y_2=(3x+2)-(2x+1)=x+1$，构造函数 $y=x+1$，因为 $y=x+1$ 在 $-2\le x\le 0$，是随着 x 的增大而增大，所以当 $x=0$ 时，函数有最大值 1，当 $x=-2$ 时，函数有最小值 -1，即 $-1\le y\le 1$，所以 $-1\le y_1-y_2\le 1$，即函数 $y=3x+2$ 与 $y=2x+1$ 在 $-2\le x\le 0$ 上是“相邻函数”；（2）$y_1-y_2=(x^2-x)-(x-a)=x^2-2x+a$，构造函数 $y=x^2-2x+a$，因为 $y=x^2-2x+a=(x-1)^2+(a-1)$，所以顶点坐标为：$(1,a-1)$，又抛物线 $y=x^2-2x+a$ 的开口向上，所以当 $x=1$ 时，函数有最小值 $a-1$，当 $x=0$ 或 $x=2$ 时，函数有最大值 a，即 $a-1\le y\le a$，因为函数 $y=x^2-x$ 与 $y=x-a$ 在 $0\le x\le 2$ 上是“相邻函数”，所以 $-1\le y_1-y_2$

≤1，即 0≤a≤1；（3）当 x=1 时，函数有最小值 a﹣ 2，当 x=2 时，函数有最大值$\frac{a}{2}$，因为函数 y=$\frac{a}{x}$与 y=﹣ 2x+4 在 1≤x≤2 上是“相邻函数”，﹣ 1≤y_1﹣ y_2≤1，即 1≤a≤2，所以 a 的最大值是 2，a 的最小值 1.

3．如图，在平面直角坐标系 xOy 中，直线 $y = kx + b(k \neq 0)$ 与双曲线 $y = \frac{6}{x}$ 相交于点 A（m，6）和点 B（-3，n），直线 AB 与 y 轴交于点 C.



（1）求直线 AB 的表达式；

（2）求 $AC:CB$ 的值.

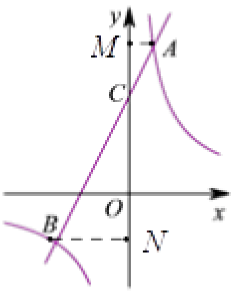
【答案】（1）解：∵点 A（m，6）和点 B（-3，n）在双曲线 $y = \frac{6}{x}$，∴m=1，n=-2，

∴点 A（1，6），点 B（-3，-2），

将点 A、B 代入直线 $y = kx + b$，得 $\begin{cases} k + b = 6 \\ -3k + b = -2 \end{cases}$，解得 $\begin{cases} k = 2 \\ b = 4 \end{cases}$，

∴直线 AB 的表达式为： $y = 2x + 4$

（2）解：分别过点 A、B 作 AM⊥y 轴，BN⊥y 轴，垂足分别为点 M、N，



则∠AMO＝∠BNO＝90°，AM=1，BN=3，

∴AM//BN，∴△ACM∽△BCN，

∴ $\frac{AC}{CB} = \frac{AM}{BN} = \frac{1}{3}$

【解析】【分析】根据反比例函数的解析式可得 m 和 n 的值，利用待定系数法求一次函数的表达式；作辅助线，构建平行线，根据平行线分线段成比例定理可得结论.

4．在平面直角坐标系 xOy 中，反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象经过点 A（1，4），B（m，n）.

（1）求反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的解析式；

（2）若二次函数 $y=(x-1)^2$ 的图象经过点 B，求代数式 $\frac{m^2-2m-3}{4}-\frac{n+1}{mn}$ 的值；

（3）若反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象与二次函数 $y=a(x-1)^2$ 的图象只有一个交点，且该交点在直线 y=x 的下方，结合函数图象，求 a 的取值范围．

【答案】（1）解：将 A（1，4）代入函数 y＝$\frac{k}{x}$ 得：k=4

反比例函数 y＝$\frac{k}{x}$ 的解析式是 $y=\frac{4}{x}$

（2）解：∵B（m，n）在反比例函数 y＝$\frac{k}{x}$ 上，

∴mn=4，

又二次函数 y＝（x—1）^{2} 的图象经过点 B（m，n），

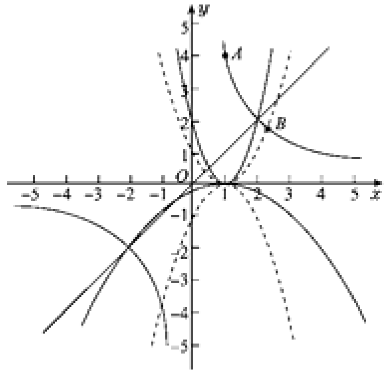
∴ $(m-1)^2=n$， 即 n-1=m^2-2m

∴ $\frac{m^2-2m-3}{4}-\frac{n+1}{mn}=\frac{mn(m^2-2m-3)-4(n+1)}{4mn}=-\frac{5}{4}$

（3）解：由反比例函数的解析式为 $y=\frac{4}{x}$，令 y=x，可得 x^2＝4，解得 x=±2.

∴反比例函数 $y=\frac{4}{x}$ 的图象与直线 y=x 交于点（2，2），（—2，—2）.

如图，



当二次函数 y＝a（x—1）^{2} 的图象经过点（2，2）时，可得 a＝2；

当二次函数 y＝a（x－1）^{2}的图象经过点（－2，－2）时，可得 a＝－$\frac{2}{9}$.

∵二次函数 y＝a（x－1）^{2}图象的顶点为（1，0），

∴由图象可知，符合题意的 a 的取值范围是 0＜a＜2 或 a＜－$\frac{2}{9}$.

【解析】【分析】（1）只需将点 A 的坐标代入反比例函数的解析式就可得出答案。

（2）根据 B（m，n）在反比例函数图像上得出 mn=4，将点 B 的坐标代入 y=（x-1）^{2}得到 n-1=m^2-2m，再将代数式变形为用含 mn 和 m^2-2m 的代数式表示，然后再整体代入即可解决问题。

（3）可先求出直线 y=x 与反比例函数 y=交点的坐标，然后分 a>0 和 a<0 两种情况讨论，先求出二次函数的图象经过两交点时对应的 a 的值，再结合图象，利用二次函数的性质（|a|越大，抛物线的开口越小）就可解决问题。

5. 【阅读理解】

我们知道，当 a＞0 且 b＞0 时，（$\sqrt{a}$－ $\sqrt{b}$）^{2}≥0，所以 a－ 2$\sqrt{ab}$+≥0，从而 a+b≥2$\sqrt{ab}$（当 a=b 时取等号），

【获得结论】设函数 y=x+$\frac{a}{x}$（a＞0，x＞0），由上述结论可知：当 x=$\frac{a}{x}$即 x=$\sqrt{a}$时，函数 y 有最小值为 2$\sqrt{a}$

（1）【直接应用】

若 y_1=x（x＞0）与 y_2=$\frac{1}{x}$（x＞0），则当 x=________时，y_1+y_2取得最小值为________.

（2）【变形应用】

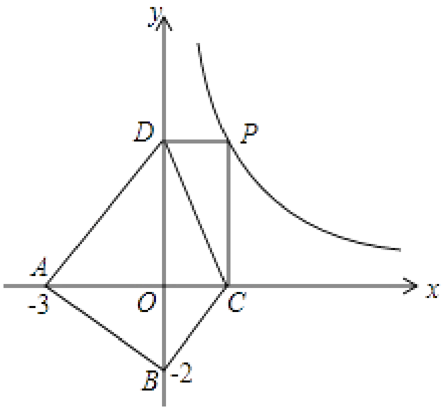
若 y_1=x+1（x＞－ 1）与 y_2=（x+1）^{2}+4（x＞－ 1），则$\frac{y_2}{y_1}$的最小值是________

（3）【探索应用】

在平面直角坐标系中，点 A（－ 3，0），点 B（0，－ 2），点 P 是函数 y=$\frac{6}{x}$在第一象限内图象上的一个动点，过 P 点作 PC⊥x 轴于点 C，PD⊥y 轴于点 D，设点 P 的横坐标为 x，四边形 ABCD 的面积为 S

①求 S 与 x 之间的函数关系式；

②求 S 的最小值，判断取得最小值时的四边形 ABCD 的形状，并说明理由．



【答案】（1）1；2

（2）4

（3）解：①设 P（x，$\frac{6}{x}$），则 C（x，0），D（0，$\frac{6}{x}$），

∴AC=x+3，BD=$\frac{6}{x}$+2，

∴S=$\frac{1}{2}$AC•BD=$\frac{1}{2}$（x+3）（$\frac{6}{x}$+2）=6+x+$\frac{9}{x}$；

②∵x＞0，

∴x+$\frac{9}{x}$≥2$\sqrt{x\cdot\frac{9}{x}}$=6，

∴当 x=$\frac{9}{x}$时，即 x=3 时，x+$\frac{9}{x}$有最小值 6，

∴此时 S=6+x+$\frac{9}{x}$有最小值 12，

∵x=3，

∴P（3，2），C（3，0），D（0，2），

∴A、C 关于 x 轴对称，D、B 关于 y 轴对称，即四边形 ABCD 的对角线互相垂直平分，

∴四边形 ABCD 为菱形．

【解析】【解答】解：（1）∵x＞0，∴y_1+y_2=x+$\frac{1}{x}$≥2$\sqrt{x\cdot\frac{1}{x}}$=2，∴当 x=$\frac{1}{x}$时，即 x=1 时，y_1+y_2有最小值 2，故答案为：1；2；（2）∵x＞﹣1，∴x+1＞0，∴$\frac{y_2}{y_1}$=$\frac{(x+1)^2+4}{x+1}$=（x+1）+$\frac{4}{x+1}$≥2$\sqrt{(x+1)\cdot\frac{4}{x+1}}$=4，∴当 x+1=$\frac{4}{x+1}$时，即 x=1 时，$\frac{y_2}{y_1}$有最小值 4，故答案为：4；

【分析】（1）直接由结论可求得其取得最小值，及其对应的 x 的值；（2）可把 x+1 看成一个整体，再利用结论可求得答案；（3）①可设 P（x，$\frac{6}{x}$），则可表示出 C、D 的坐标，从而可表示出 AC 和 BD，再利用面积公式可

表示出四边形 ABCD 的面积，从而可得到 S 与 x 的函数关系式；②再利用结论可求得其最得最小值时对应的 x 的值，则可得到 P、C、D 的坐标，可判断 A、C 关于 x 轴对称，B、D 关于 y 轴对称，可判断四边形 ABCD 为菱形．

6．在平面直角坐标系中，我们定义点 P（a，b）的“变换点”为 Q．且规定：当 a≥b 时，Q 为（b，﹣a）；当 a＜b 时，Q 为（a，﹣b）．

（1）点（2，1）的变换点坐标为________；

（2）若点 A（a，﹣2）的变换点在函数 $y=\frac{1}{x}$ 的图象上，求 a 的值；

（3）已知直线 l 与坐标轴交于（6，0），（0，3）两点．将直线 l 上所有点的变换点组成一个新的图形记作 M． 判断抛物线 $y=x^2+c$ 与图形 M 的交点个数，以及相应的 c 的取值范围，请直接写出结论．

【答案】（1）（1，﹣2）

（2）解：当 a≥﹣2 时，则 A（a，﹣2）的变换点坐标为（﹣2，﹣a），

代入 $y=\frac{1}{x}$ 可得 $-a=\frac{1}{-2}$，解得 $a=\frac{1}{2}$；
当 a＜﹣2 时，则 A（a，﹣2）的变换点坐标为（a，2），
代入 $y=\frac{1}{x}$ 可得 $2=\frac{1}{a}$，解得 $a=\frac{1}{2}$，不符合题意；
综上可知 a 的值为 $\frac{1}{2}$；

（3）解：设直线 l 的解析式为 y=kx+b （k≠0 ），将点（6，0）、（0，3）代入 y=kx+b

得：$\begin{cases}6a+b=0\\ b=3\end{cases}$，解得 $\begin{cases}a=-\frac{1}{2}\\ b=3\end{cases}$，

∴直线 l 的解析式为 $y=-\frac{1}{2}x+3$．

当 x=y 时，$x=-\frac{1}{2}x+3$，解得 x=2．

点 C 的坐标为（2，－ 2），点 C 的变换点的坐标为 C′（ 2，－ 2 ），

点（6，0）的变换点的坐标为（0，－ 6），点（0，3）的变换点的坐标为（0，－ 3），

当 x≥2 时，所有变换点组成的图形是以 C′（ 2，－ 2）为端点，过（0，－ 6 ）的一条射线；

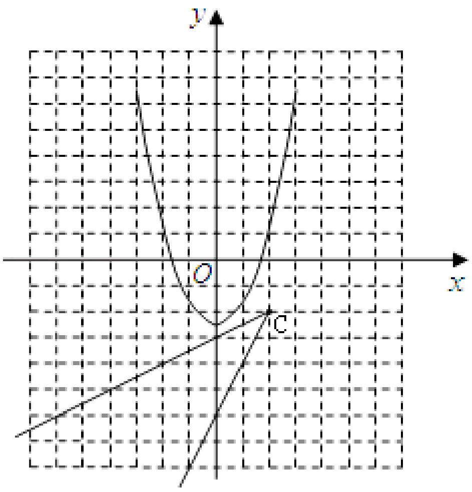
即：y=2x－ 6，其中 x≥2，

当 x＜2 时，所有变换点组成的图形是以 C′（2，－ 2）为端点，过（0，－ 3）的一条射线，

即 $y=\frac{1}{2}x-3$，其中，x＜2.

所以新的图形 M 是以 C′（2，－ 2）为端点的两条射线组成的图形.

如图所示：



由 $\begin{cases} y=\frac{1}{2}x-3 \\ y=x^2+c \end{cases}$ 和 $\begin{cases} y=2c-6 \\ y=x^2+c \end{cases}$ 得：$x^2-\frac{1}{2}x+c+3=0$①和 $x^2-2x+c+6=0$②

讨论一元二次方程根的判别式及抛物线与点 C′的位置关系可得：

①当方程①无实数根时，即：当 $c>-\frac{47}{16}$ 时，抛物线 $y=x^2+c$ 与图形 M 没有交点；

②当方程①有两个相等实数根时，即：当 $c=-\frac{47}{16}$ 时，抛物线 $y=x^2+c$ 与图形 M 有一个交点；

③当方程②无实数根，且方程①有两个不相等的实数根时，即：当 $-5<c<-\frac{47}{16}$ 时，抛物线 $y=x^2+c$ 与图形 M 有两个交点；

④当方程②有两个相等实数根或 $y=x^2+c$ 恰好经过经过点 C′时，即：当 c=－ 5 或 c=－ 6 时，抛物线 $y=x^2+c$ 与图形 M 有三个交点；

⑤当方程②方程①均有两个不相等的实数根时，且两根均小于 2，即：当 $-6<c<-5$ 时，抛物线 $y=x^2+c$ 与图形 M 有四个交点；

⑥当 $c<-6$ 时，抛物线 $y=x^2+c$ 与图形 M 有两个交点.

【解析】【解答】解：（1）∵2≥－ 1，