

# 2024-2025 学年北京市朝阳区高二上学期 11 月期中数学

## 检测试题

### 一、单选题

1. 已知集合  $A = \{x | -1 < x < 3\}$ ,  $A \cap B = \{1\}$ , 则集合  $B$  可以是 ( )
- A.  $\{1, 2\}$       B.  $\{1, 3\}$       C.  $\{0, 1, 2\}$       D.  $\{1, 2, 3\}$
2. 在复平面内, 复数  $z = i(1-i)$  对应的点位于 ( )
- A. 第一象限      B. 第二象限      C. 第三象限      D. 第四象限
3. 设命题  $p: \forall x \in (0, +\infty), e^x \geq x+1$ , 则  $\neg p$  为 ( )
- A.  $\forall x \in (0, +\infty), e^x < x+1$       B.  $\exists x_0 \in (0, +\infty), e^{x_0} \geq x_0+1$
- C.  $\forall x \notin (0, +\infty), e^x < x+1$       D.  $\exists x_0 \in (0, +\infty), e^{x_0} < x_0+1$
4. 已知  $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ , 则  $\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right) =$  ( )
- A.  $-\frac{3}{5}$       B.  $\frac{4}{5}$       C.  $\frac{7}{25}$       D.  $\frac{14}{25}$
5. 已知函数  $f(x) = |x-m|$  与函数  $g(x)$  的图象关于  $y$  轴对称. 若  $g(x)$  在区间  $(-2, -1)$  内单调递减, 则实数  $m$  的取值范围为 ( )
- A.  $[1, +\infty)$       B.  $(-\infty, 1]$
- C.  $[2, +\infty)$       D.  $(-\infty, 2]$
6. 已知  $\alpha$  和  $\beta$  是两个不同平面,  $\alpha \cap \beta = l$ ,  $l_1, l_2$  是不同的两条直线, 且  $l_1 \subset \alpha, l_2 \subset \beta, l_1 \parallel l_2$ , 那么下列命题正确的是 ( )
- A.  $l$  与  $l_1, l_2$  都不相交      B.  $l$  与  $l_1, l_2$  都相交
- C.  $l$  恰与  $l_1, l_2$  中的一条相交      D.  $l$  至少与  $l_1, l_2$  中的一条相交
7. 设  $a$  为实数, 则“ $a > \frac{1}{a^2}$ ”是“ $a^2 > \frac{1}{a}$ ”的 ( )
- A. 充分不必要条件      B. 必要不充分条件
- C. 充要条件      D. 既不充分也不必要条件

8. 已知集合  $M = \{(x, y) | y = f(x)\}$  , 若对于  $\forall (x_1, y_1) \in M$  ,  $\exists (x_2, y_2) \in M$  , 使得

$x_1x_2 + y_1y_2 = 0$  成立, 则称集合  $M$  是“互垂点集”. 给出下列四个集合:

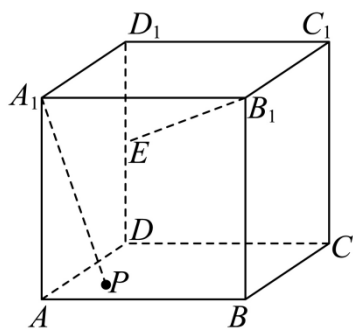
$$M_1 = \{(x, y) | y = x^2 + 1\}; \quad M_2 = \{(x, y) | y = \ln x\};$$

$$M_3 = \{(x, y) | y = e^x - e\}; \quad M_4 = \{(x, y) | y = \sin x + 1\}.$$

其中是“互垂点集”的集合为

- A.  $M_1, M_2$       B.  $M_2, M_3$       C.  $M_1, M_4$       D.  $M_3, M_4$

9. 如图, 正方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  的棱长为1,  $E$  为棱  $DD_1$  的中点,  $P$  为底面正方形  $ABCD$  内 (含边界) 的动点, 则 ( )



A. 三棱锥  $B_1 - A_1D_1P$  的体积大小不确定

B. 当  $A_1P \perp AC_1$  时,  $A_1P \perp AC$

C. 直线  $B_1E \parallel$  平面  $A_1BD$

D. 直线  $B_1E$  与平面  $CDD_1C_1$  所成角的正弦值为  $\frac{2}{3}$

10. 给定两个不共线的空间向量  $\vec{a}$  与  $\vec{b}$  , 定义叉乘运算  $\vec{a} \times \vec{b}$  , 规定: ①  $\vec{a} \times \vec{b}$  为同时与  $\vec{a}$  ,  $\vec{b}$  垂直的向量; ②  $\vec{a}$  ,  $\vec{b}$  ,  $\vec{a} \times \vec{b}$  三个向量构成右手系 (如图 1); ③  $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$ .

如图 2, 在长方体中  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  中,  $AB = AD = 2$  ,  $AA_1 = 4$  , 则下列说法中错误的是

( )

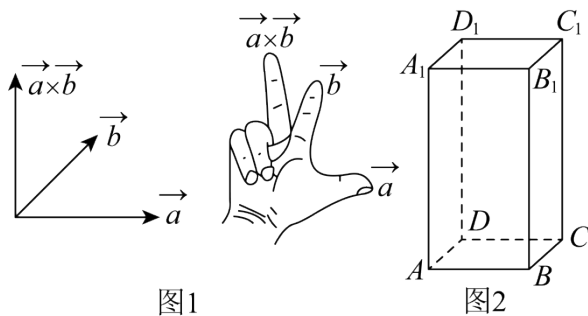


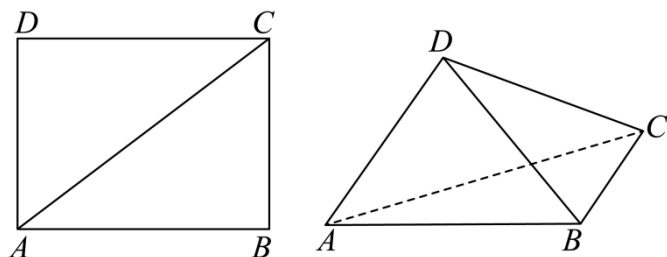
图1

图2

- A.  $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AA_1}$  B.  $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD} \times \overrightarrow{AB}$
- C.  $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) \times \overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AD} \times \overrightarrow{AA_1}$  D.  $V_{ABCD-A_1B_1C_1D_1} = (\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}) \cdot \overrightarrow{CC_1}$

## 二、填空题

11. 在等差数列  $\{a_n\}$  中,  $a_1 = 2$ ,  $a_2 + a_5 = 14$ , 则数列  $\{a_n\}$  的前 4 项的和为\_\_\_\_\_.
12. 已知非零向量  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  满足  $|\vec{a}| = |\vec{a} - \vec{b}|$ , 则  $(\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}) \cdot \vec{b} =$ \_\_\_\_\_.
13. 在  $\triangle ABC$  中,  $AB = 2\sqrt{3}$ ,  $\angle B = \frac{\pi}{4}$ , 点  $D$  在边  $BC$  上,  $\angle ADC = \frac{2\pi}{3}$ ,  $CD = 1$ , 则 (1)  $AD =$ \_\_\_\_\_; (2)  $\triangle ACD$  的面积为\_\_\_\_\_.
14. 将函数  $y = \sin 2x - \sqrt{3} \cos 2x$  图象向右平移  $\frac{\pi}{6}$  个单位长度, 得到函数  $y = g(x)$  图象, 则  $g\left(\frac{7}{6}\pi\right) =$ \_\_\_\_\_.
15. 已知矩形  $ABCD$ ,  $AB = \sqrt{5}$ ,  $BC = 2$ , 将  $\triangle ADC$  沿对角线  $AC$  进行翻折, 得到三棱锥  $D-ABC$ , 在翻折的过程中, 下列结论:



- ①三棱锥  $D-ABC$  的体积最大值为  $\frac{10}{9}$ ;
- ②三棱锥  $D-ABC$  的外接球体积不变;
- ③异面直线  $AB$  与  $CD$  所成角的最大值为  $90^\circ$ ;

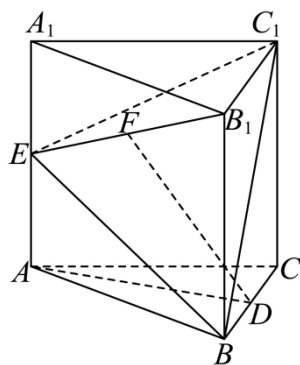
- ④  $AD$  与平面  $ABC$  所成角的余弦值最小值为  $\frac{2}{3}$ .  
所有正确的命题的序号是\_\_\_\_\_.

### 三、解答题

16. 已知  $\triangle ABC$  的三个内角  $A, B, C$  所对的边分别为  $a, b, c$ , 且  $4\sin^2 \frac{B+C}{2} - \cos 2A = \frac{7}{2}$ .  
(1) 求角  $A$  的大小;

- (2) 若  $a = \sqrt{3}$ ,  $\cos B = \frac{3}{5}$ , 求边  $c$  及  $\triangle ABC$  的面积.

17. 如图, 三棱柱  $ABC-A_1B_1C_1$  中,  $D, E$  分别为  $BC, AA_1$  的中点.



- (1) 求证:  $AD \parallel$  平面  $BC_1E$ ;  
(2) 若点  $F$  在线段  $B_1E$  上, 且  $DF \parallel$  平面  $ACC_1A_1$ , 求证: 点  $F$  为  $B_1E$  中点.

18. 图像识别是人工智能领域的一个重要研究方向. 某中学人工智能兴趣小组研发了一套根据人脸照片识别性别的程序. 在对该程序的一轮测试中, 小组同学输入了 500 张不同的人脸照片作为测试样本, 获得数据如下表 (单位: 张):

| 识别结果真实性别 | 可以识别 |     | 无法识别 |
|----------|------|-----|------|
|          | 男    | 女   |      |
| 男        | 180  | 15  | 5    |
| 女        | 20   | 275 | 5    |

该程序对每张照片的识别都是独立的.

- (1) 现从这 500 张人脸照片中随机抽取,  
① 若抽取一张, 求识别结果正确的概率;

②若抽取一张男性照片和一张女性照片，求至少有一张照片无法被成功识别（含无法识别或识别错误）的概率；

(2)为处理无法识别的照片，该小组同学提出上述程序修改的三个方案：

方案一：将无法识别的照片全部判定为女性；

方案二：将无法识别的照片全部判定为男性；

方案三：将无法识别的照片随机判定为男性或女性（即判定为男性或女性概率均为 50%）.

现从若干张不同人脸照片（其中男性、女性照片数量之比为 1:1）中随机抽取一张，分别用方案一、方案二、方案三进行识别，其识别正确的概率估计值分别记为  $p_1$ ,  $p_2$ ,  $p_3$ ，试比较  $p_1$ ,  $p_2$ ,  $p_3$  的大小.（假设用频率估计概率，结论不要求证明）

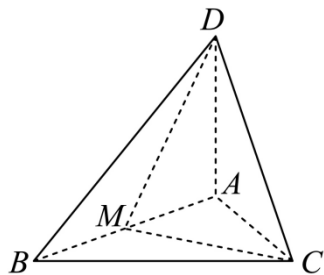
19. 已知函数  $f(x) = \frac{e^{ax}}{x}$ ，其中  $a > 0$ ， $e$  为自然对数的底数.

(1)当  $a=1$  时，求曲线  $y=f(x)$  在点  $(1, f(1))$  处的切线方程；

(2)求  $f(x)$  的单调区间；

(3)设  $x_1 < x_2$  且  $x_1 x_2 > 0$ ，请判断  $f(x_2) - f(x_1)$  与  $\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1}$  的大小，并证明.

20. 如图，在四面体  $ABCD$  中， $AD \perp$  平面  $ABC$ ，点  $M$  为  $AB$  中点，且  $AB = AC = 2$ ， $BC = 2\sqrt{2}$ ， $AD = 2$ .



(1)证明： $AC \perp BD$ ；

(2)求平面  $BCD$  与平面  $CDM$  夹角的余弦值；

(3)在直线  $BD$  上是否存在点  $P$ ，使得直线  $PC$  与平面  $CDM$  所成角的正弦值为  $\frac{1}{6}$ ？若存在；求  $\frac{BP}{BD}$  的值；若不存在，请说明理由.

21. 设  $A$  为一个  $n \times n$ （即  $n$  行  $n$  列）的数表.对任意  $1 \leq i, j \leq n$ ，记第  $i$  行第  $j$  列元素为  $a_{i,j}$  且

$a_{i,j} \in \{-1,1\}$ .若存在  $1 \leq i_1 < i_2 \leq n$ ,  $1 \leq j_1 < j_2 \leq n$ , 使得  $a_{i_1,j_1} = a_{i_2,j_1} = a_{i_1,j_2} = a_{i_2,j_2}$ , 则称有序数组

$(i_1, i_2, j_1, j_2)$  为一个同角矩形数组.

(1)直接分别写出下列两个数表中, 同角矩形数组的个数;

①  $A_1$ :

|   |    |   |
|---|----|---|
| 1 | 1  | 1 |
| 1 | -1 | 1 |
| 1 | 1  | 1 |

②  $A_2$ :

|    |    |    |    |
|----|----|----|----|
| 1  | -1 | 1  | -1 |
| -1 | 1  | -1 | 1  |
| 1  | -1 | 1  | -1 |
| -1 | 1  | -1 | 1  |

(2)若数表 A 中没有同角矩形数组, 求  $n$  的最大值;

(3)若  $n=6$ , 求出 A 中同角矩形数组个数的最小值, 并证明同角矩形数组的个数达到最小值时, A 的每行每列都恰有 3 个 1 和 3 个 -1.

答案:

1. B

【详解】对于 A,  $A \cap B = \{1, 2\}$ , 不符合, 舍去,

对于 B,  $A \cap B = \{1\}$ , 符合要求,

对于 C,  $A \cap B = \{0, 1, 2\}$ , 不符合, 舍去,

对于 D,  $A \cap B = \{1, 2\}$ , 不符合, 舍去,

故选: B

2. A

【详解】 $\because z = 1 + i$ ,

$\therefore z$  对应的点为  $(1, 1)$ ,

$\therefore$  点位于第一象限,

故选: A.

3. D

【详解】因为命题  $p: \forall x \in (0, +\infty), e^x \geq x + 1$ ,

则其否定是  $\exists x_0 \in (0, +\infty), e^{x_0} < x_0 + 1$ .

故选: D

4. C

【详解】  $\sin\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)=\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha=1-2\times\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{7}{25}$ .

故选：C

5. B

【详解】根据题意，函数  $f(x)=|x-m|$  与函数  $g(x)$  的图象关于  $y$  轴对称. 若  $g(x)$  在区间

$(-2,-1)$  内单调递减，

则  $f(x)$  在区间  $(1,2)$  上递增，

而  $f(x)=|x-m|=\begin{cases} x-m, & x\geq m \\ -x+m, & x< m \end{cases}$ ，在区间  $[m,+\infty)$  上为增函数，

则有  $m\leq 1$ ，即  $m$  的取值范围为  $(-\infty,1]$

故选：B.

6. A

【详解】  $l_1\parallel l_2, l_1\subseteq\alpha$ ，则  $l_2\parallel\alpha$ ，因为  $\alpha\cap\beta=l, l_2\subseteq\beta$ ，则  $l_2\parallel l$ ，同理  $l_1\parallel l$

故选：A

7. A

【详解】  $a>\frac{1}{a^2}\Leftrightarrow a-\frac{1}{a^2}>0\Leftrightarrow\frac{a^3-1}{a^2}>0\Leftrightarrow a>1$ ，

$a>1$  时一定有  $a^2>1>\frac{1}{a}$ ，充分性满足，

但  $a<0$  时有  $a^2>\frac{1}{a}$ ，但  $a<\frac{1}{a^2}$ ，必要性不满足，

因此是充分不必要条件.

故选：A

8. D

【详解】设  $A(x_1, y_1)$ ，A 为  $f(x)$  上任意一点

$M_1$ ：当  $A(0,1)$  时，需存在  $B(x_2, y_2)$  使得：  $0\times x_2+1\times y_2=0$ ，即  $y_2=0$ ，此时  $B$  无解，可知

$M_1$  不是“互垂点集”，可排除 A 和 C 选项；

$M_2$ ：当  $A(1,0)$  时，需存在  $B(x_2, y_2)$  使得：  $1\times x_2+0\times y_2=0$ ，即  $x_2=0$ ，无意义，可知  $M_2$  不

是“互垂点集”，可排除 B 选项；

本题正确选项：D

9. D

【详解】解：对于 A 项：因为  $P$  为底面正方形  $ABCD$  内（含边界）的动点，所以点  $P$  到平面

$A_1B_1D_1$  的距离为 1，所以  $V_{\text{三棱锥}B_1\text{棱锥}D_1P} = V_{P-A_1D_1B_1} = \frac{1}{3} \times 1 \times S_{\triangle A_1D_1B_1} = \frac{1}{6}$ ，故 A 错误；

对于 B 项：在矩形  $ACC_1A_1$  内，当  $A_1P \perp AC_1$  时，显然  $A_1P$  与  $AC$  不垂直，故 B 错误；

对于 C 项：在平面  $BDD_1B_1$  内， $B_1E$  与  $BD$  相交，所以  $B_1E$  与平面  $A_1BD$  交，故 C 错误；

对于 D 项：连接  $C_1E$ ，因为  $B_1C_1 \perp$  平面  $CDD_1C_1$ ，

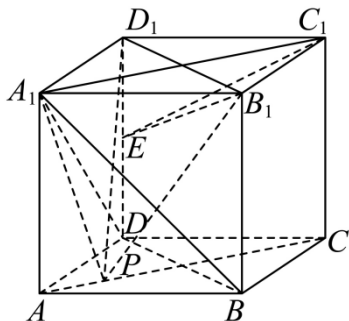
所以  $C_1E$  是  $B_1E$  在平面  $CDD_1C_1$  内的射影，

所以  $\angle B_1EC_1$  为直线  $B_1E$  与平面  $CDD_1C_1$  所成角，

所以在直角三角形  $B_1EC_1$  中，

$$\sin \angle B_1EC_1 = \frac{B_1C_1}{B_1E} = \frac{1}{\sqrt{2 + \frac{1}{4}}} = \frac{2}{3}, \text{ 故 D 正确；}$$

故选：D



10. B

【详解】对于 A， $\overrightarrow{AA_1}$  同时与  $\overrightarrow{AB}$ ， $\overrightarrow{AD}$  垂直，

$$|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AD}| \sin \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD} \rangle = 2 \times 2 \times \sin 90^\circ = 4 = |\overrightarrow{AA_1}|,$$

且  $\overrightarrow{AB}$ ， $\overrightarrow{AD}$ ， $\overrightarrow{AA_1}$  构成右手系，即  $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AA_1}$  成立，A 正确；

对于 B， $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AA_1}$ ， $\overrightarrow{AD} \times \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{AA_1}$ ，则  $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} \neq \overrightarrow{AD} \times \overrightarrow{AB}$ ，B 错误；

对于 C， $|(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) \times \overrightarrow{AA_1}| = |\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AA_1}| = 2\sqrt{2} \times 4 \times \sin 90^\circ = 8\sqrt{2}$ ， $\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AA_1}$  与  $\overrightarrow{DB}$  共线，且方向相同，

$|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AA_1}| = 2 \times 4 \times \sin 90^\circ = 8$ ,  $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AA_1}$  与  $\overrightarrow{DA}$  共线, 且方向相同,

$|\overrightarrow{AD} \times \overrightarrow{AA_1}| = 2 \times 4 \times \sin 90^\circ = 8$ ,  $\overrightarrow{AD} \times \overrightarrow{AA_1}$  与  $\overrightarrow{AB}$  共线, 且方向相同,

则  $|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AD} \times \overrightarrow{AA_1}| = 8\sqrt{2}$ ,  $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AD} \times \overrightarrow{AA_1}$  与  $\overrightarrow{DB}$  共线, 且方向相同,

因此  $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) \times \overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AD} \times \overrightarrow{AA_1}$ , C 正确;

对于 D,  $V_{ABCD-A_1B_1C_1D_1} = 2 \times 2 \times 4 = 16$ ,  $(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}) \cdot \overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{CC_1} = 4^2 = 16$ ,

因此  $V_{ABCD-A_1B_1C_1D_1} = (\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}) \cdot \overrightarrow{CC_1}$ , D 正确.

故选: B

11. 20

【分析】由条件可得等差数列的公差, 再由其前  $n$  项和公式代入计算, 即可得到结果.

【详解】设等差数列的公差为  $d$ , 因为  $a_1 = 2$ ,  $a_2 + a_5 = 14$ ,

所以  $a_1 + d + a_1 + 4d = 14$ , 即  $4 + 5d = 14$ , 解得  $d = 2$ ,

所以  $S_4 = 4a_1 + \frac{4 \times 3}{2}d = 8 + 12 = 20$ .

故 20

12. 0

【详解】解: 因为非零向量  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  满足  $|\vec{a}| = |\vec{a} - \vec{b}|$ ,

则  $\vec{a}^2 = (\vec{a} - \vec{b})^2 = \vec{a}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2$ , 所以  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}\vec{b}^2$ ,

则  $(\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b} - \frac{1}{2}\vec{b}^2 = 0$ .

故 0.

13.  $2\sqrt{2}$   $\frac{\sqrt{6}}{2}$

【详解】解: (1) 因为在  $\triangle ABC$  中,  $AB = 2\sqrt{3}$ ,  $\angle B = \frac{\pi}{4}$ ,  $\angle ADC = \frac{2\pi}{3}$ ,

所以  $\angle ADB = \frac{\pi}{3}$ ,

于是在  $\triangle ABD$  中, 由正弦定理可知,  $\frac{AB}{\sin \angle ADB} = \frac{AD}{\sin \angle B}$ ,

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/618005005113007013>