

新疆阿克苏市实验中学 2024 届高三下学期 4 月份月考数学试题

注意事项

1. 考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回。
2. 答题前，请务必将自己的姓名、准考证号用 0.5 毫米黑色墨水的签字笔填写在试卷及答题卡的规定位置。
3. 请认真核对监考员在答题卡上所粘贴的条形码上的姓名、准考证号与本人是否相符。
4. 作答选择题，必须用 2B 铅笔将答题卡上对应选项的方框涂满、涂黑；如需改动，请用橡皮擦干净后，再选涂其他答案。作答非选择题，必须用 0.5 毫米黑色墨水的签字笔在答题卡上的指定位置作答，在其他位置作答一律无效。
5. 如需作图，须用 2B 铅笔绘、写清楚，线条、符号等须加黑、加粗。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

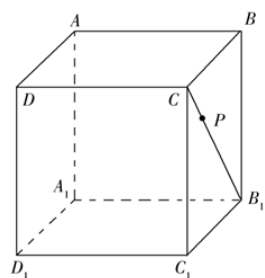
1. 已知集合 $M = \{x | -1 < x < 2\}$, $N = \{x | x(x+3) \leq 0\}$, 则 $M \cap N =$ ()

- A. $[-3, 2)$ B. $(-3, 2)$ C. $(-1, 0]$ D. $(-1, 0)$

2. 已知向量 $\vec{a} = (2, -4)$, $\vec{b} = (k, 3)$, 且 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 135° , 则 $k =$ ()

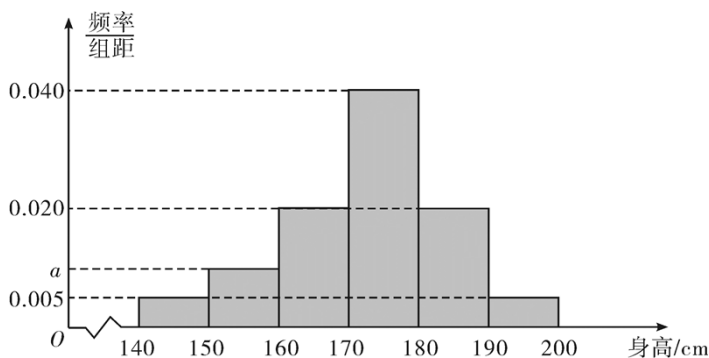
- A. -9 B. 1 C. -9 或 1 D. -1 或 9

3. 已知正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2, 点 P 在线段 CB_1 上, 且 $B_1P = 2PC$, 平面 α 经过点 A, P, C_1 , 则正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 被平面 α 截得的截面面积为 ()



- A. $3\sqrt{6}$ B. $2\sqrt{6}$ C. 5 D. $\frac{5\sqrt{3}}{4}$

4. 从某市的中学生中随机调查了部分男生，获得了他们的身高数据，整理得到如下频率分布直方图：



根据频率分布直方图，可知这部分男生的身高的中位数的估计值为

- A. 171.25cm B. 172.75cm
C. 173.75cm D. 175cm

5. 中国古代用算筹来进行记数，算筹的摆放形式有纵横两种形式（如图所示），表示一个多位数时，像阿拉伯记数一样，把各个数位的数码从左到右排列，但各位数码的筹式需要纵横相间，其中个位、百位、方位.....用纵式表示，十位、千位、十万位.....用横式表示，则 56846 可用算筹表示为（ ）



中国古代的算筹数码

- A. B. C. D.

6. 已知复数 z 满足 $z \cdot i = z + i$, 则 $\bar{z}$ 在复平面上对应的点在()

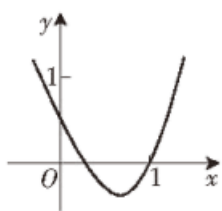
- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

7. 若 $2^a + 3a = 3^b + 2b$, 则下列关系式正确的个数是()

- ① $b < a < 0$ ② $a = b$ ③ $0 < a < b < 1$ ④ $1 < b < a$

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

8. 如图是二次函数 $f(x) = x^2 - bx + a$ 的部分图象，则函数 $g(x) = a \ln x + f'(x)$ 的零点所在的区间是()



- A. $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$ B. $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ C. (1, 2) D. (2, 3)

9. 在 $\triangle ABC$ 中, $|\vec{AB} + \vec{AC}| = |\vec{AB} - \vec{AC}|$, $AB = 4$, $AC = 3$, 则 $\vec{BC}$ 在 $\vec{CA}$ 方向上的投影是()

- A. 4 B. 3 C. -4 D. -3

10. 已知 $a > 0$, 若对任意 $m \in (0, +\infty)$, 关于 x 的不等式 $(x-1)e^x - \frac{ax}{e} < m - \ln(m+1) - 1$ (e 为自然对数的底数)

至少有 2 个正整数解, 则实数 a 的取值范围是()

A. $\left[e, \frac{e^3+e}{2}\right]$ B. $\left[\frac{e^3+e}{2}, +\infty\right)$ C. $\left(0, \frac{e^3+e}{2}\right]$ D. $\left(\frac{e^3+e}{2}, +\infty\right)$

11. 已知 $i(1-ai)=2+bi$ (i 为虚数单位, $a, b \in \mathbf{R}$), 则 ab 等于 ()

A. 2 B. -2 C. $\frac{1}{2}$ D. $-\frac{1}{2}$

12. 若实数 x, y 满足不等式组 $\begin{cases} x+y \geq -1 \\ x-2y \leq -1 \\ 2x-y-1 \leq 0 \end{cases}$, 则 $2x-3y+4$ 的最大值为 ()

A. -1 B. -2 C. 3 D. 2

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 在 $\left(2x^2 - \frac{1}{x}\right)^5$ 的二项展开式中, x 的系数为_____. (用数值作答)

14. $\left(2x - \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^8$ 展开式的第 5 项的系数为_____.

15. 对任意正整数 n , 函数 $f(n) = 2n^3 - 7n^2 \cos n\pi - \lambda n - 1$, 若 $f(2) \geq 0$, 则 λ 的取值范围是_____; 若不等式 $f(n) \geq 0$ 恒成立, 则 λ 的最大值为_____.

16. 若函数 $f(x) = \sin \omega x + \sqrt{3} \cos \omega x$ ($x \in \mathbf{R}$, $\omega > 0$) 满足 $f(\alpha) = 0$, $f(\beta) = 2$, 且 $|\alpha - \beta|$ 的最小值等于 $\frac{\pi}{2}$, 则 ω 的值为_____.

三、解答题: 共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 已知 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知向量 $\vec{m} = (\cos B, 2\cos^2 \frac{C}{2} - 1)$, $\vec{n} = (c, b - 2a)$ 且 $\vec{m} \cdot \vec{n} = 0$.

(1) 求角 C 的大小;

(2) 若 $\triangle ABC$ 的面积为 $2\sqrt{3}$, $a+b=6$, 求 c .

18. (12 分) 某工厂为提高生产效率, 需引进一条新的生产线投入生产, 现有两条生产线可供选择, 生产线①: 有 A, B 两道独立运行的生产工序, 且两道工序出现故障的概率依次是 0.02, 0.03. 若两道工序都没有出现故障, 则生产成本为 15 万元; 若 A 工序出现故障, 则生产成本增加 2 万元; 若 B 工序出现故障, 则生产成本增加 3 万元; 若 A, B 两道工序都出现故障, 则生产成本增加 5 万元. 生产线②: 有 a, b 两道独立运行的生产工序, 且两道工序出现故障的概率依次是 0.04, 0.01. 若两道工序都没有出现故障, 则生产成本为 14 万元; 若 a 工序出现故障, 则生产成本增加 8 万元; 若 b 工序出现故障, 则生产成本增加 5 万元; 若 a, b 两道工序都出现故障, 则生产成本增加 13 万元.

(1) 若选择生产线①, 求生产成本恰好为 18 万元的概率;

(2) 为最大限度节约生产成本, 你会给工厂建议选择哪条生产线? 请说明理由.

19. (12分) 等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 已知 $a_3 + a_6 = 20$, $S_5 = 35$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

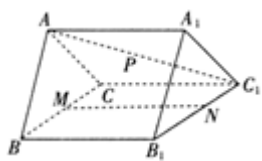
(2) 设数列 $\{\frac{1}{S_n + n + 2}\}$ 的前 n 项和为 T_n , 求使 $T_n > \frac{9}{20}$ 成立的 n 的最小值.

20. (12分) 定义: 若数列 $\{a_n\}$ 满足所有的项均由 $-1, 1$ 构成且其中 -1 有 m 个, 1 有 p 个($m + p \geq 3$), 则称 $\{a_n\}$ 为“ (m, p) -数列”.

(1) a_i, a_j, a_k ($i < j < k$) 为“ $(3, 4)$ -数列” $\{a_n\}$ 中的任意三项, 则使得 $a_i a_j a_k = 1$ 的取法有多少种?

(2) a_i, a_j, a_k ($i < j < k$) 为“ (m, p) -数列” $\{a_n\}$ 中的任意三项, 则存在多少正整数 (m, p) 对使得 $1 \leq m \leq p \leq 100$, 且 $a_i a_j a_k = 1$ 的概率为 $\frac{1}{2}$.

21. (12分) 如图, 在三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, $\triangle ABC$ 是边长为2的等边三角形, $BC \perp BB_1$, $CC_1 = \sqrt{2}$, $AC_1 = \sqrt{6}$.



(1) 证明: 平面 $ABC \perp$ 平面 BB_1C_1C ;

(2) M , N 分别是 BC , B_1C_1 的中点, P 是线段 AC_1 上的动点, 若二面角 $P - MN - C$ 的平面角的大小为 30° , 试确定点 P 的位置.

22. (10分) 已知 $f(x) = 2|x + 1|$, $g(x) = |x - 3|$.

(1) 解 $f(x) \geq g(x)$;

(2) 若 $|2a - b| \leq 1$, 证明: $f(a) + g(b) \geq 4$.

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、C

【解析】

先化简 $N = \{x | x(x+3) \leq 0\} = \{x | -3 \leq x \leq 0\}$ ，再根据 $M = \{x | -1 < x < 2\}$ ，求两集合的交集。

【详解】

因为 $N = \{x | x(x+3) \leq 0\} = \{x | -3 \leq x \leq 0\}$ ，

又因为 $M = \{x | -1 < x < 2\}$ ，

所以 $M \cap N = \{x | -1 < x \leq 0\}$ 。

故选：C

【点睛】

本题主要考查集合的基本运算，还考查了运算求解的能力，属于基础题。

2、C

【解析】

由题意利用两个向量的数量积的定义和公式，求 k 的值。

【详解】

解：由题意可得 $\cos 135^\circ = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{2k-12}{\sqrt{4+16} \cdot \sqrt{k^2+9}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ，

求得 $k = -9$ ，或 $k = 1$ ，

故选：C。

【点睛】

本题主要考查两个向量的数量积的定义和公式，属于基础题。

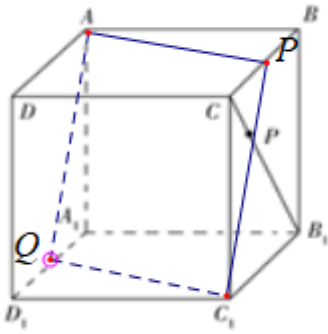
3、B

【解析】

先根据平面的基本性质确定平面，然后利用面面平行的性质定理，得到截面的形状再求解。

【详解】

如图所示：



A, P, C_1 确定一个平面 α ,

因为平面 $AA_1DD_1 \parallel$ 平面 BB_1CC_1 ,

所以 $AQ \parallel PC_1$, 同理 $AP \parallel QC_1$,

所以四边形 APC_1Q 是平行四边形.

即正方体被平面截的截面.

因为 $B_1P = 2PC$,

所以 $C_1B_1 = 2PC$,

即 $PC = PB = 1$

所以 $AP = PC_1 = \sqrt{5}, AC_1 = 2\sqrt{3}$

由余弦定理得: $\cos \angle APC_1 = \frac{AP^2 + PC_1^2 - AC_1^2}{2AP \times PC_1} = \frac{1}{5}$

所以 $\sin \angle APC_1 = \frac{2\sqrt{6}}{5}$

所以 $S_{\text{四边形}APQC_1} = 2 \times \frac{1}{2} AP \times PC_1 \times \sin \angle APC_1 = 2\sqrt{6}$

故选: B

【点睛】

本题主要考查平面的基本性质, 面面平行的性质定理及截面面积的求法, 还考查了空间想象和运算求解的能力, 属于中档题.

4、C

【解析】

由题可得 $(0.005 \times 2 + a + 0.020 \times 2 + 0.040) \times 10 = 1$, 解得 $a = 0.010$,

则 $(0.005 + 0.010 + 0.020) \times 10 = 0.35$, $0.35 + 0.040 \times 10 = 0.75 > 0.5$,

所以这部分男生的身高的中位数的估计值为 $170 + \frac{0.5 - 0.35}{10 \times 0.040} \times 10 = 173.75(\text{cm})$, 故选 C.

5、B

【解析】

根据题意表示出各位上的数字所对应的算筹即可得答案.

【详解】

解: 根据题意可得, 各个数码的筹式需要纵横相间, 个位, 百位, 万位用纵式表示; 十位, 千位, 十万位用横式表示,

$\therefore 56846$ 用算筹表示应为: 纵 5 横 6 纵 8 横 4 纵 6, 从题目中所给出的信息找出对应算筹表示为 B 中的.

故选: B .

【点睛】

本题主要考查学生的合情推理与演绎推理, 属于基础题.

6、A

【解析】

设 $z = a + bi (a, b \in R)$, 由 $z \cdot i = z + i$ 得: $(a + bi)i = a + (b + 1)i$, 由复数相等可得 a, b 的值, 进而求出 $\bar{z}$, 即可得解.

【详解】

设 $z = a + bi (a, b \in R)$, 由 $z \cdot i = z + i$ 得: $(a + bi)i = a + (b + 1)i$, 即 $ai - b = a + (b + 1)i$,

由复数相等可得: $\begin{cases} -b = a \\ a = b + 1 \end{cases}$, 解之得: $\begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -\frac{1}{2} \end{cases}$, 则 $z = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$, 所以 $\bar{z} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$, 在复平面对应的点的坐标为

$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, 在第一象限.

故选: A.

【点睛】

本题考查共轭复数的求法, 考查对复数相等的理解, 考查复数在复平面对应的点, 考查运算能力, 属于常考题.

7、D

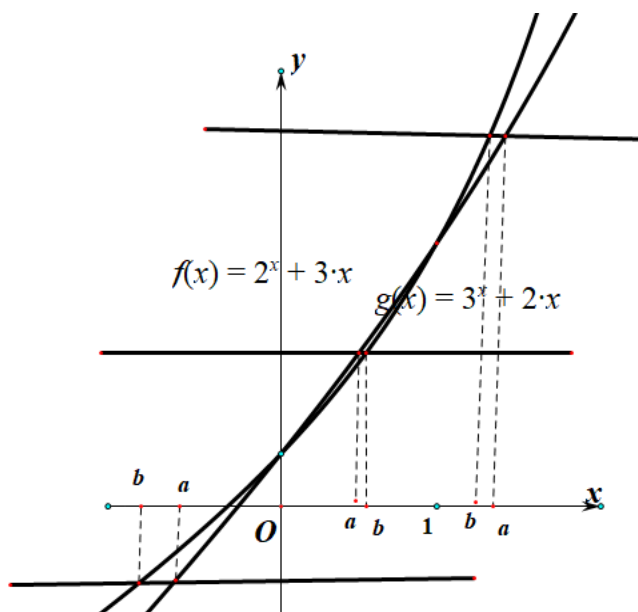
【解析】

a, b 可看成是 $y = t$ 与 $f(x) = 2^x + 3x$ 和 $g(x) = 3^x + 2x$ 交点的横坐标, 画出图象, 数形结合处理.

【详解】

令 $f(x) = 2^x + 3x$, $g(x) = 3^x + 2x$,

作出图象如图,



由 $f(x) = 2^x + 3x$, $g(x) = 3^x + 2x$ 的图象可知,

$f(0) = g(0) = 1$, $f(1) = g(1) = 5$, ②正确;

$x \in (-\infty, 0)$, $f(x) < g(x)$, 有 $b < a < 0$, ①正确;

$x \in (0, 1)$, $f(x) > g(x)$, 有 $0 < a < b < 1$, ③正确;

$x \in (1, +\infty)$, $f(x) < g(x)$, 有 $1 < b < a$, ④正确.

故选: D.

【点睛】

本题考查利用函数图象比较大小, 考查学生数形结合的思想, 是一道中档题.

8、B

【解析】

根据二次函数图象的对称轴得出 b 范围, y 轴截距, 求出 a 的范围, 判断 $g(x)$ 在区间端点函数值正负, 即可求出结论.

【详解】

$\because f(x) = x^2 - bx + a$, 结合函数的图象可知,

二次函数的对称轴为 $x = \frac{b}{2}$, $0 < f(0) = a < 1$,

$\frac{1}{2} < x = \frac{b}{2} < 1$, $\therefore f'(x) = 2x - b$,

所以 $g(x) = a \ln x + f'(x) = a \ln x + 2x - b$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增.

又因为 $g\left(\frac{1}{2}\right) = a \ln \frac{1}{2} + 1 - b < 0$, $g(1) = a \ln 1 + 2 - b > 0$,

所以函数 $g(x)$ 的零点所在的区间是 $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

故选: B.

【点睛】

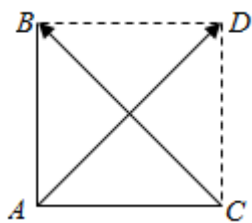
本题考查二次函数的图象及函数的零点, 属于基础题.

9、D

【解析】

分析: 根据平面向量的数量积可得 $\vec{AB} \perp \vec{AC}$, 再结合图形求出 $\vec{BC}$ 与 $\vec{CA}$ 方向上的投影即可.

详解: 如图所示:



$$\because |\vec{AB} + \vec{AC}| = |\vec{AB} - \vec{AC}|,$$

$$\therefore \vec{AB} \cdot \vec{AC} = 0,$$

$$\therefore \vec{AB} \perp \vec{AC},$$

$$\text{又 } AB = 4, AC = 3,$$

$$\therefore \vec{BC} \text{ 在 } \vec{CA} \text{ 方向上的投影是: } |\vec{BC}| \cos \angle BCA = |\vec{BC}| \cos(\pi - \angle ACB) = -|\vec{BC}| \cos \angle ACB = -3,$$

故选 D.

点睛: 本题考查了平面向量的数量积以及投影的应用问题, 也考查了数形结合思想的应用问题.

10、B

【解析】

构造函数 $f(m) = m - \ln(m+1) - 1$ ($m > 0$), 求导可得 $f(m)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 则 $f(m) > f(0) = -1$, 问题

转化为 $(x-1)e^x - \frac{ax}{e} < -1$, 即 $(x-1)e^x \leq \frac{ax}{e} - 1$ 至少有 2 个正整数解, 构造函数 $g(x) = (x-1)e^x$, $h(x) = \frac{ax}{e} - 1$, 通过

导数研究单调性, 由 $g(0) = h(0)$ 可知, 要使得 $g(x) \leq h(x)$ 至少有 2 个正整数解, 只需 $g(2) \leq h(2)$ 即可, 代入可求得结果.

【详解】

构造函数 $f(m) = m - \ln(m+1) - 1$ ($m > 0$), 则 $f'(m) = 1 - \frac{1}{m+1} = \frac{m}{m+1}$ ($m > 0$), 所以 $f(m)$ 在 $(0, +\infty)$

上单调递增, 所以 $f(m) > f(0) = -1$, 故问题转化为至少存在两个正整数 x , 使得 $(x-1)e^x \leq \frac{ax}{e} - 1$ 成立, 设 $g(x) = (x-1)e^x$, $h(x) = \frac{ax}{e} - 1$, 则 $g'(x) = xe^x$, 当 $x > 0$ 时 $g'(x) > 0$, $g(x)$ 单调递增; 当 $x > 0$ 时, $h(x)$ 单调递增. $g(2) \leq h(2)$, 整理得 $a \geq \frac{e^3 + e}{2}$.

故选:B.

【点睛】

本题考查导数在判断函数单调性中的应用,考查不等式成立问题中求解参数问题,考查学生分析问题的能力和逻辑推理能力,难度较难.

11、A

【解析】

利用复数代数形式的乘除运算化简,再由复数相等的条件列式求解.

【详解】

$$Q i(1 - ai) = 2 + bi,$$

$$\therefore a + i = 2 + bi, \text{ 得 } a = 2, b = 1.$$

$$\therefore ab = 2.$$

故选: A.

【点睛】

本题考查复数代数形式的乘除运算,考查复数相等的条件,意在考查学生对这些知识的理解掌握水平,是基础题.

12、C

【解析】

作出可行域,直线目标函数对应的直线 l , 平移该直线可得最优解.

【详解】

作出可行域,如图由射线 AB , 线段 AC , 射线 CD 围成的阴影部分(含边界),作直线 $l: 2x - 3y + 4 = 0$, 平移直线 l , 当 l 过点 $C(1,1)$ 时, $z = 2x - 3y + 4$ 取得最大值 1.

故选: C.

以上内容仅为本文档的试下载部分,为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文,请访问: <https://d.book118.com/618006002134007003>

