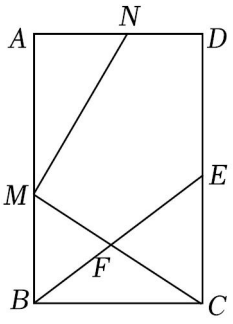
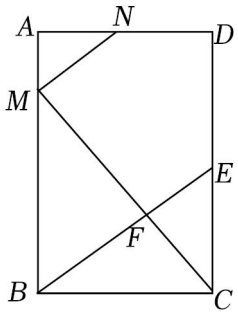
专题 27 以相似为载体的几何综合问题

典例剖析

21.（2022·四川内江·中考真题）如图，在矩形 $ABCD$ 中，$AB=6$，$BC=4$，点 M、N 分别在 AB、AD 上，且 $MN\perp MC$，点 E 为 CD 的中点，连接 BE 交 MC 于点 F.





(1)当 F 为 BE 的中点时，求证：$AM=CE$；

(2)若$\frac{EF}{BF}=2$，求$\frac{AN}{ND}$的值；

(3)若 $MN\parallel BE$，求$\frac{AN}{ND}$的值.

【答案】(1)见解析

(2)$\frac{27}{37}$

(3)$\frac{2}{7}$

【分析】(1)根据矩形的性质，证明$\triangle BMF\cong\triangle ECF$，得 $BM=CE$，再利用点 E 为 CD 的 中点，即可证明结论；

(2)利用$\triangle BMF\backsim\triangle ECF$，得$\frac{BF}{EF}=\frac{BM}{CE}=\frac{1}{2}$，从而求出 BM 的长，再利用$\triangle ANM\backsim\triangle BMC$ ，得$\frac{AN}{BM}=\frac{AM}{BC}$ ，求出 AN 的长，可得答案；

(3)首先利用同角的余角相等得 $\angle CBF=\angle CMB$，则 $\tan\angle CBF=\tan\angle CMB$，得$\frac{CE}{BC}=\frac{BC}{BM}$ ，可得 BM 的长，由（2）同理可得答案.

（1）

证明：∵F 为 BE 的中点，

∴$BF=EF$，

∵四边形 $ABCD$ 是矩形，

∴$AB\parallel CD$，$AB=CD$

∴$\angle BMF=\angle ECF$，

∵$\angle BFM=\angle EFC$，

∴△BMF≌△ECF（AAS），

∴BM=CE，

∵点 E 为 CD 的中点，

∴$CE=\frac{1}{2}CD$，

∵AB=CD，

∴$BM=CE=\frac{1}{2}AB$，

∴$AM=BM$，

∴AM=CE；

（2）

∵∠BMF=∠ECF，∠BFM=∠EFC，

∴△BMF∽△ECF，

∴$\frac{BF}{EF}=\frac{BM}{CE}=\frac{1}{2}$，

∵CE=3，

∴$BM=\frac{3}{2}$，

∴$AM=\frac{9}{2}$，

∵$CM\perp MN$，

∴∠CMN=90°，

∴∠AMN+∠BMC=90°，

∵∠AMN+∠ANM=90°，

∴∠ANM=∠BMC，

∵∠A=∠MBC，

∴△ANM∽△BMC，

∴$\frac{AN}{BM}=\frac{AM}{BC}$，

∴$\frac{AN}{\frac{3}{2}}=\frac{\frac{9}{2}}{4}$，

∴$AN=\frac{27}{16}$，

∴DN=AD﹣AN=4﹣$\frac{27}{16}$=$\frac{37}{16}$，

∴$\frac{AN}{DN}=\frac{\frac{27}{16}}{\frac{37}{16}}=\frac{27}{37}$；

（3）

∵MN∥BE，

∴∠BFC=∠CMN，

∴∠FBC+∠BCM=90°，

∵∠BCM+∠BMC=90°，

∴∠CBF=∠CMB，

∴tan∠CBF=tan∠CMB，

$\therefore \frac{CE}{BC}=\frac{BC}{BM}$，

$\therefore \frac{3}{4}=\frac{4}{BM}$，

$\therefore BM=\frac{16}{3}$，

$\therefore AM=AB-BM=6-\frac{16}{3}=\frac{2}{3}$，

由（2）同理得，$\frac{AN}{BM}=\frac{AM}{BC}$，

$\therefore \frac{AN}{\frac{16}{3}}=\frac{\frac{2}{3}}{4}$，

解得：$AN=\frac{8}{9}$，

$\therefore DN=AD-AN=4-\frac{8}{9}=\frac{28}{9}$，

$\therefore \frac{AN}{ND}=\frac{\frac{8}{9}}{\frac{28}{9}}=\frac{2}{7}$.

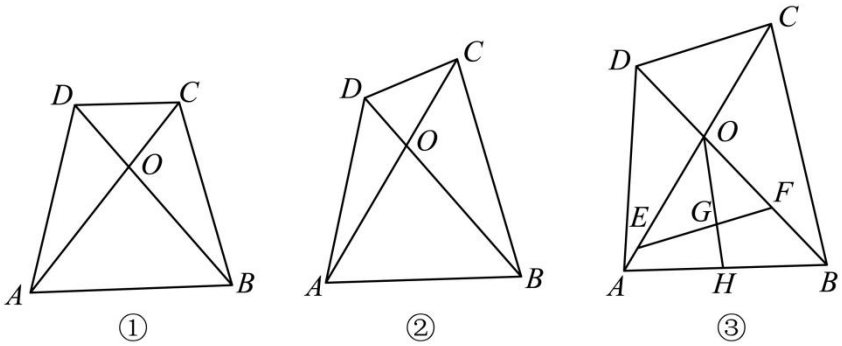
【点睛】本题是相似形综合题，主要考查了矩形的性质，全等三角形的判定与性质，相似三角形的判定与性质，三角函数等知识，求出 BM 的长是解决（2）和（3）的关键.

22.（2022·贵州铜仁·中考真题）如图，在四边形$ABCD$中，对角线AC与BD相交于点 O，记$\triangle COD$的面积为S_1，$\triangle AOB$的面积为S_2.

（1）问题解决：如图①，若 $AB//CD$，求证：$\frac{S_1}{S_2}=\frac{OC\cdot OD}{OA\cdot OB}$

（2）探索推广：如图②，若AB与CD不平行，（1）中的结论是否成立？若成立，请证明；若不成立，请说明理由.

（3）拓展应用：如图③，在OA上取一点 E，使$OE=OC$，过点 E 作$EF\parallel CD$交OD于点 F，点 H 为AB的中点，OH交EF于点 G，且$OG=2GH$，若$\frac{OE}{OA}=\frac{5}{6}$，求$\frac{S_1}{S_2}$值.



【答案】（1）见解析；（2）（1）中的结论成立，理由见解析；（3）$\frac{25}{54}$

【分析】（1）如图所示，过点 D 作 $AE\perp AC$ 于 E，过点 B 作 $BF\perp AC$ 于 F，求出$DE=OD\cdot \sin\angle DOE$，$BF=OB\cdot \sin\angle BOF$，然后根据三角形面积公式求解即可；

（2）同（1）求解即可；

（3）如图所示，过点A作$AM \parallel EF$交OB于M，取BM中点N，连接HN，先证明$\triangle OEF \cong \triangle OCD$，得到$OD=OF$，证明$\triangle OEF \backsim \triangle OAM$，得到$\frac{OF}{OM}=\frac{OE}{OA}=\frac{5}{6}$，设$OE=OC=5m$，$OF=OD=5n$，则$OA=6m$，$OM=6n$，证明$\triangle OGF \backsim \triangle OHN$，推出$ON=\frac{3}{2}OF=\frac{15n}{2}$，$BN=MN=ON-OM=\frac{3n}{2}$，则$OB=ON+BN=9n$，由（2）结论求解即可．

【详解】解：（1）如图所示，过点D作$AE \perp AC$于E，过点B作$BF \perp AC$于F，

$\therefore DE=OD \cdot \sin\angle DOE$，$BF=OB \cdot \sin\angle BOF$，

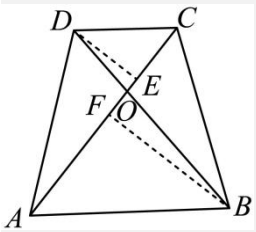
$\therefore S_{\triangle OCD}=S_1=\frac{1}{2}OC \cdot DE=\frac{1}{2}OC \cdot OD \cdot \sin\angle DOE$，

$S_{\triangle AOB}=S_2=\frac{1}{2}OA \cdot BF=\frac{1}{2}OA \cdot OB \cdot \sin\angle BOF$，

$\because \angle DOE=\angle BOF$，

$\therefore \sin\angle DOE=\sin\angle BOF$；

$\therefore \frac{S_1}{S_2}=\frac{\frac{1}{2}OC \cdot OD \cdot \sin\angle DOE}{\frac{1}{2}OA \cdot OB \cdot \sin\angle BOF}=\frac{OC \cdot OD}{OA \cdot OB}$；



（2）（1）中的结论成立，理由如下：

如图所示，过点D作$AE \perp AC$于E，过点B作$BF \perp AC$于F，

$\therefore DE=OD \cdot \sin\angle DOE$，$BF=OB \cdot \sin\angle BOF$，

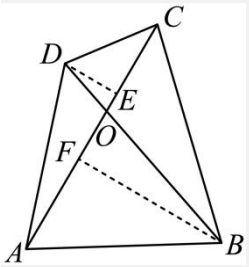
$\therefore S_{\triangle OCD}=S_1=\frac{1}{2}OC \cdot DE=\frac{1}{2}OC \cdot OD \cdot \sin\angle DOE$，

$S_{\triangle AOB}=S_2=\frac{1}{2}OA \cdot BF=\frac{1}{2}OA \cdot OB \cdot \sin\angle BOF$，

$\because \angle DOE=\angle BOF$，

$\therefore \sin\angle DOE=\sin\angle BOF$；

$\therefore \frac{S_1}{S_2}=\frac{\frac{1}{2}OC \cdot OD \cdot \sin\angle DOE}{\frac{1}{2}OA \cdot OB \cdot \sin\angle BOF}=\frac{OC \cdot OD}{OA \cdot OB}$；



（3）如图所示，过点A作$AM \parallel EF$交OB于M，取BM中点N，连接HN，

∵$EF \parallel CD$，

∴∠ODC=∠OFE，∠OCD=∠OEF，

又∵OE=OC，

∴△OEF≌△OCD（AAS），

∴OD=OF，

∵$EF \parallel AM$，

∴△OEF∽△OAM，

∴$\frac{OF}{OM}=\frac{OE}{OA}=\frac{5}{6}$，

设$OE=OC=5m$，$OF=OD=5n$，则$OA=6m$，$OM=6n$，

∵H是AB的中点，N是BM的中点，

∴HN是△ABM的中位线，

∴$HN \parallel AM \parallel EF$，

∴△OGF∽△OHN，

∴$\frac{OG}{OH}=\frac{OF}{ON}$，

∵OG=2GH，

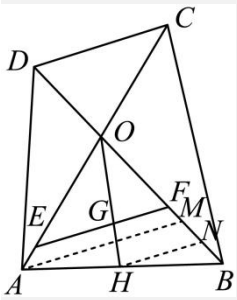
∴$OG=\frac{2}{3}OH$，

∴$\frac{OG}{OH}=\frac{OF}{ON}=\frac{2}{3}$，

∴$ON=\frac{3}{2}OF=\frac{15n}{2}$，$BN=MN=ON-OM=\frac{3n}{2}$，

∴$OB=ON+BN=9n$，

由（2）可知$\frac{S_1}{S_2}=\frac{OC\cdot OD}{OA\cdot OB}=\frac{5m\cdot 5n}{6m\cdot 9n}=\frac{25}{54}$.



【点睛】本题主要考查了解直角三角形，相似三角形的性质与判定，全等三角形的性质与判定，三角形中位线定理，正确作出辅助线是解题的关键.

23.（2022·内蒙古包头·中考真题）如图，在平行四边形$ABCD$中，AC是一条对角线，且$AB=AC=5$，$BC=6$，E，F是AD边上两点，点F在点E的右侧，$AE=DF$，连接CE，CE的延长线与BA的延长线相交于点G.

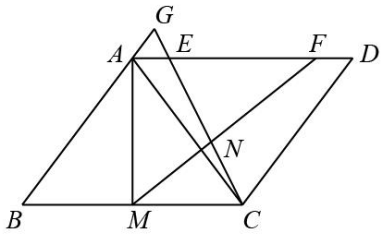


图1

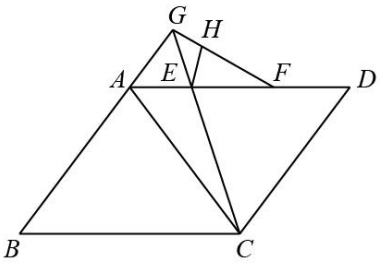


图2

(1)如图 1，M是BC边上一点，连接AM，MF，MF与CE相交于点N.

①若$AE=\frac{3}{2}$，求AG的长；

②在满足①的条件下，若$EN=NC$，求证：$AM\perp BC$；

(2)如图 2，连接GF，H是GF上一点，连接EH．若$\angle EHG=\angle EFG+\angle CEF$，且$HF=2GH$，求$EF$的长.

【答案】(1)①$\frac{5}{3}$；②证明见解析

(2)2

【分析】（1）①解：根据平行四边形$ABCD$的性质可证$\triangle AGE\backsim\triangle DCE$，得到$\frac{AG}{DC}=\frac{AE}{DE}$，再根据$AB=AC=5$，$BC=6$，$AE=\frac{3}{2}$，结合平行四边形的性质求出$DE$的长，代入比例式即可求出$AG$的长；

②先根据ASA证明$\triangle ENF\cong\triangle CNM$可得$EF=CM$，再根据$AE=\frac{3}{2}$，$AE=DF$求出$EF=3$，进一步证明$BM=MC$，最后利用等腰三角形的三线合一可证明结论.

（2）如图，连接CF，先根据SAS证明$\triangle AEC\cong\triangle DFC$，再结合$\angle EHG=\angle EFG+\angle CEF$，说明$EH\parallel CF$，利用平行线分线段成比例定理可得$\frac{GE}{EC}=\frac{1}{2}$，接着证明$\triangle AGE\backsim\triangle DCE$，可得到$\frac{AE}{DE}=\frac{1}{2}$，设$AE=x$，则$DE=2x$，根据$AD=AE+DE=6$构建方程求出$x$，最后利用$EF=AD-AE-DF$可得结论.

（1）

①解：如图，

$\because$四边形$ABCD$是平行四边形，$AB=AC=5$，$BC=6$，

$\therefore AB\parallel CD$，$AD\parallel BC$，$DC=AB=5$，$AD=BC=6$，

$\therefore\angle GAE=\angle CDE$，$\angle AGE=\angle DCE$，

$\therefore\triangle AGE\backsim\triangle DCE$，

$\therefore\frac{AG}{DC}=\frac{AE}{DE}$，

$\therefore AG\cdot DE=DC\cdot AE$，

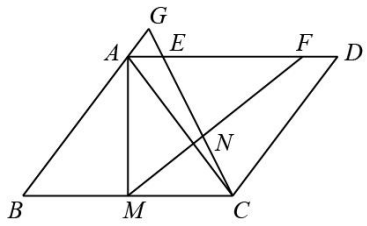
$\because AE=\frac{3}{2}$，

$\therefore DE = AD - AE = 6 - \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$,

$\therefore \frac{9}{2}AG = 5 \times \frac{3}{2}$,

$\therefore AG = \frac{5}{3}$,

$\therefore AG$的长为$\frac{5}{3}$.



②证明：$\because AD \parallel BC$,

$\therefore \angle EFN = \angle CMN$,

$\because EN = NC$,

在$\triangle ENF$和$\triangle CNM$中,

$$\begin{cases} \angle EFN = \angle CMN \\ EN = CN \\ \angle ENF = \angle CNM \end{cases}$$

$\therefore \triangle ENF \cong \triangle CNM(ASA)$,

$\therefore EF = CM$,

$\because AE = \frac{3}{2}$, $AE = DF$,

$\therefore DF = \frac{3}{2}$,

$\therefore EF = AD - AE - DF = 3$,

$\therefore CM = 3$,

$\because BC = 6$,

$\therefore BM = BC - CM = 3$,

$\therefore BM = MC$,

$\because AB = AC$,

$\therefore AM \perp BC$.

（2）

如图，连接CF,

$\because AB = AC$, $AB = DC$,

$\therefore AC = DC$,

$\therefore \angle CAD = \angle CDA$,

$\because AE = DF$,

在$\triangle AEC$和$\triangle DFC$中,

$$\begin{cases} AC = DC \\ \angle CAD = \angle CDA \\ AE = DF \end{cases}$$

$\therefore \triangle AEC \cong \triangle DFC(SAS)$，

$\therefore CE = CF$，

$\therefore \angle CFE = \angle CEF$

$\because \angle EHG = \angle EFG + \angle CEF$，

$\therefore \angle EHG = \angle EFG + \angle CEF = \angle EFG + \angle CFE = \angle CFG$，

$\therefore EH \parallel CF$，

$\therefore \frac{GH}{HF} = \frac{GE}{EC}$，

$\because HF = 2GH$，

$\therefore \frac{GE}{EC} = \frac{1}{2}$，

$\because AB \parallel CD$，

$\therefore \angle GAE = \angle CDE$，$\angle AGE = \angle DCE$，

$\therefore \triangle AGE \backsim \triangle DCE$，

$\therefore \frac{AE}{DE} = \frac{GE}{CE}$，

$\therefore \frac{AE}{DE} = \frac{1}{2}$，

$\therefore DE = 2AE$，

设$AE = x$，则$DE = 2x$，

$\because AD = 6$，

$\therefore AD = AE + DE = x + 2x = 6$，

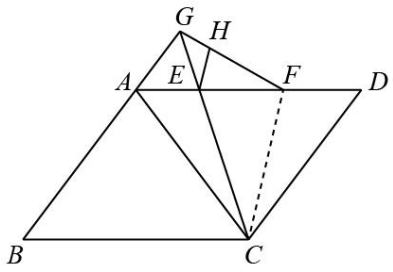
$\therefore x = 2$，

即$AE = 2$，

$\therefore DF = 2$，

$\therefore EF = AD - AE - DF = 2.$

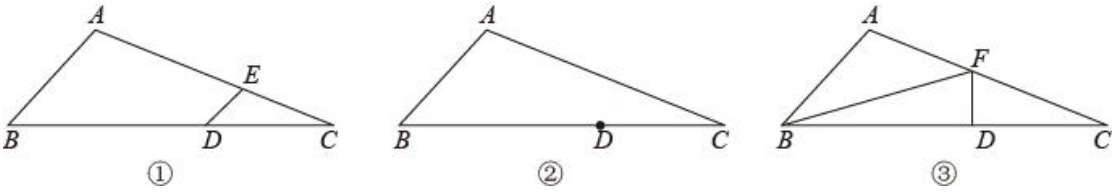
$\therefore EF$的长为 2.



【点睛】本题考查了平行四边形的性质，相似三角形的判定及性质，全等三角形的判定及性质，等腰三角形的三线合一，平行线的判定及性质，平行线分线段成比例定理等知识．灵活

运用相似三角形和全等三角形的判定及性质是解答本题的关键.

24.（2022·江苏泰州·中考真题）已知：△*ABC* 中，*D* 为 *BC* 边上的一点.



(1)如图①，过点 *D* 作 *DE*∥*AB* 交 *AC* 边于点 *E*，若 *AB*=5，*BD*=9，*DC*=6，求 *DE* 的长；

(2)在图②，用无刻度的直尺和圆规在 *AC* 边上做点 *F*，使∠*DFA*=∠*A*；（保留作图痕迹，不要求写作法）

(3)如图③，点 *F* 在 *AC* 边上，连接 *BF*、*DF*，若∠*DFA*=∠*A*，△*FBC* 的面积等于$\frac{1}{2}CD \cdot AB$，以 *FD* 为半径作⊙*F*，试判断直线 *BC* 与⊙*F* 的位置关系，并说明理由.

【答案】(1)2

(2)图见详解

(3)直线 *BC* 与⊙*F* 相切，理由见详解

【分析】（1）由题意易得$\frac{CD}{BD}=\frac{2}{3}$，则有$\frac{CD}{CB}=\frac{2}{5}$，然后根据相似三角形的性质与判定可进行求解；

（2）作 *DT*∥*AC* 交 *AB* 于点 *T*，作∠*TDF*=∠*ATD*，射线 *DF* 交 *AC* 于点 *F*，则点 *F* 即为所求；

（3）作 *BR*∥*CF* 交 *FD* 的延长线于点 *R*，连接 *CR*，证明四边形 *ABRF* 是等腰梯形，推出 *AB*=*FR*，由 *CF*∥*BR*，推出$S_{\triangle CFB}=S_{\triangle CFR}=\frac{1}{2}AB \cdot CD=\frac{1}{2}FR \cdot CD$，推出 *CD*⊥*DF*，然后问题可求解.

（1）

解：∵*DE*∥*AB*，

∴△*CDE*∽△*CBA*，

∴$\frac{DE}{AB}=\frac{CD}{CB}$，

∵*AB*=5，*BD*=9，*DC*=6，

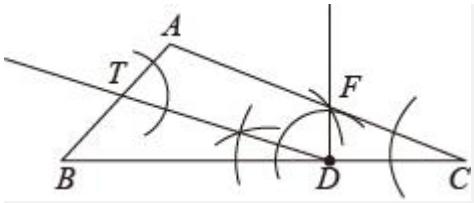
∴$\frac{DE}{5}=\frac{6}{6+9}$，

∴$DE=2$；

（2）

解：作 *DT*∥*AC* 交 *AB* 于点 *T*，作∠*TDF*=∠*ATD*，射线 *DF* 交 *AC* 于点 *F*，则点 *F* 即为所求；

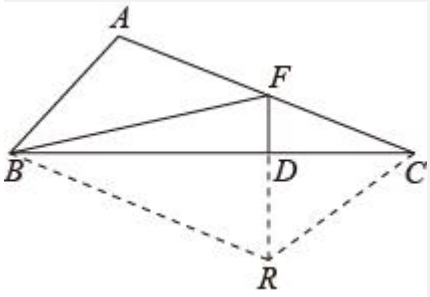
如图所示：点 *F* 即为所求，



（3）

解：直线 BC 与⊙F 相切，理由如下：

作 BR // CF 交 FD 的延长线于点 R，连接 CR，如图，



∵ $\angle DFA=\angle A$，

∴四边形 $ABRF$ 是等腰梯形，

∴$AB = FR$，

∵△FBC 的面积等于$\frac{1}{2}CD \bullet AB$，

∴$S_{\triangle CFB} = S_{\triangle CFR} = \frac{1}{2}AB \cdot CD = \frac{1}{2}FR \cdot CD$，

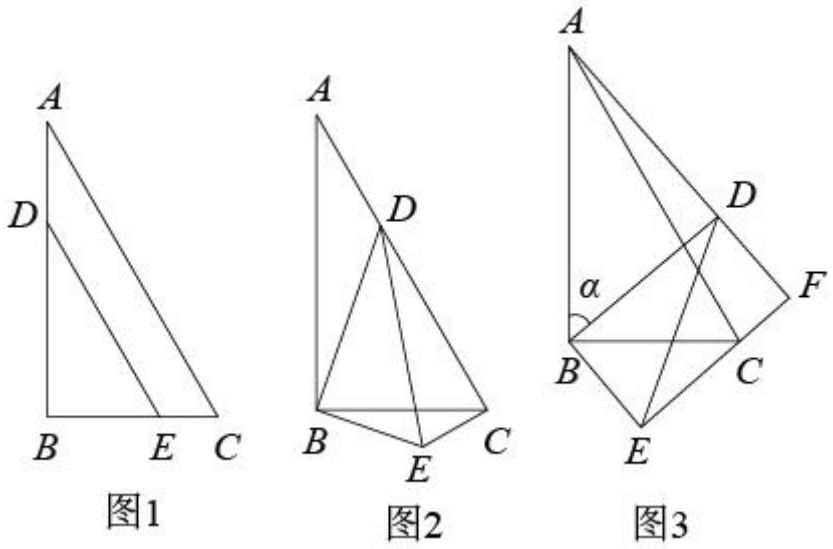
∴$CD \perp DF$，

∵FD 是⊙F 的半径，

∴直线 BC 与⊙F 相切．

【点睛】本题主要考查相似三角形的性质与判定、平行线的性质与判定及切线的判定，熟练掌握相似三角形的性质与判定、平行线的性质与判定及切线的判定是解题的关键．

25．（2022·湖南岳阳·中考真题）如图，△ ABC和△ DBE的顶点B重合，$\angle ABC = \angle DBE = 90°$，$\angle BAC = \angle BDE = 30°$，$BC = 3$，$BE = 2$．



(1)特例发现：如图 1，当点D，E分别在AB，BC上时，可以得出结论：$\frac{AD}{CE}=$_____，直线AD与直线CE的位置关系是_____；

(2)探究证明：如图 2，将图 1 中的$\triangle DBE$绕点B顺时针旋转，使点D恰好落在线段AC上，连接EC，（1）中的结论是否仍然成立？若成立，请证明；若不成立，请说明理由；

(3)拓展运用：如图 3，将图 1 中的$\triangle DBE$绕点B顺时针旋转$\alpha(19°<\alpha<60°)$，连接AD、EC，它们的延长线交于点F，当$DF=BE$时，求$\tan(60°-\alpha)$的值．

【答案】(1)$\sqrt{3}$，垂直

(2)成立，理由见解析

(3)$\frac{8\sqrt{5}-9\sqrt{3}}{11}$

【分析】（1）解直角三角形求出EC，AD，可得结论；

（2）结论不变，证明$\triangle ABD\backsim\triangle CBE$，推出$\frac{AD}{EC}=\frac{AB}{BC}=\sqrt{3}$，$\angle ADB=\angle BEC$，可得结论；

（3）如图 3 中，过点B作$BJ\perp AC$于点J，设BD交AK于点K，过点K作$KT\perp AC$于点K.求出BJ，JK，可得结论．

(1)

解：在$Rt\triangle ABC$中，$\angle B=90°$，$BC=3$，$\angle A=30°$，

$\therefore AB=\sqrt{3}BC=3\sqrt{3}$，

在$Rt\triangle BDE$中，$\angle BDE=30°$，$BE=2$，

$\therefore BD=\sqrt{3}BE=2\sqrt{3}$，

$\therefore EC=1$，$AD=\sqrt{3}$，

$\therefore\frac{AD}{EC}=\sqrt{3}$，此时$AD\perp EC$，

故答案为：$\sqrt{3}$，垂直；

(2)

结论成立.

理由：$\because \angle ABC = \angle DBE = 90°$，

$\therefore \angle ABD = \angle CBE$，

$\because AB = \sqrt{3}BC$，$BD = \sqrt{3}BE$，

$\therefore \frac{AC}{BC} = \frac{DB}{EB}$，

$\therefore \triangle ABD \backsim \triangle CBE$，

$\therefore \frac{AD}{EC} = \frac{AB}{BC} = \sqrt{3}$，$\angle ADB = \angle BEC$，

$\because \angle ADB + \angle CDB = 180°$，

$\therefore \angle CDB + \angle BEC = 180°$，

$\therefore \angle DBE + \angle DCE = 180°$，

$\because \angle DBE = 90°$，

$\therefore \angle DCE = 90°$，

$\therefore AD \perp EC$；

(3)

如图 3 中，过点B作$BJ \perp AC$于点J，设BD交AK于点K，过点K作$KT \perp AC$于点K.

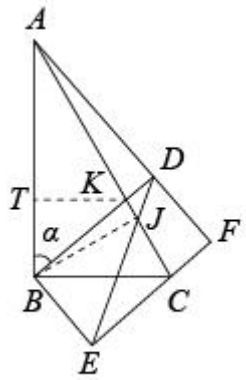


图3

$\because \angle AJB = 90°$，$\angle BAC = 30°$，

$\therefore \angle ABJ = 60°$，

$\therefore \angle KBJ = 60° - \alpha$.

$\because AB = 3\sqrt{3}$，

$\therefore BJ = \frac{1}{2}AB = \frac{3\sqrt{3}}{2}$，$AJ = \sqrt{3}BJ = \frac{9}{2}$，

当$DF = BE$时，四边形$BEFD$是矩形，

$\therefore \angle ADB = 90°$，$AD = \sqrt{AB^2 - BD^2} = \sqrt{(3\sqrt{3})^2 - (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{15}$，

设$KT = m$，则$AT = \sqrt{3}m$，$AK = 2m$，

$\because \angle KTB = \angle ADB = 90°$，

$\therefore \tan\alpha = \frac{KT}{BT} = \frac{AD}{BD}$,

$\therefore \frac{m}{BT} = \frac{\sqrt{15}}{2\sqrt{3}}$,

$\therefore BT = \frac{2\sqrt{5}}{5}m$,

$\therefore \sqrt{3}m + \frac{2\sqrt{5}}{5}m = 3\sqrt{3}$,

$\therefore m = \frac{45-6\sqrt{15}}{11}$,

$\therefore AK = 2m = \frac{90-12\sqrt{15}}{11}$,

$\therefore KJ = AJ - AK = \frac{9}{2} - \frac{90-12\sqrt{15}}{11} = \frac{24\sqrt{15}-81}{22}$,

$\therefore \tan(60° - \alpha) = \frac{KJ}{BJ} = \frac{8\sqrt{5}-9\sqrt{3}}{11}$.

【点睛】本题属于三角形综合题，考查了解直角三角形，相似三角形的判定和性质等知识，解题的关键是学会添加常用辅助线，构造直角三角形解决问题，属于中考压轴题.

满分训练

一、解答题

1.（2022·江苏镇江·中考真题）已知，点E、F、G、H分别在正方形$ABCD$的边AB、BC、CD、AD上.

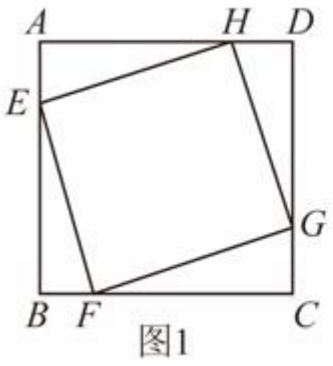


图1

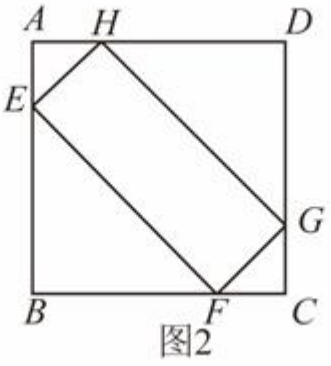


图2

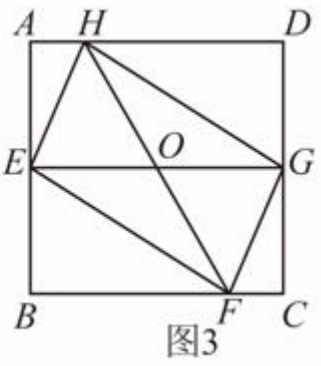


图3

(1)如图 1，当四边形$EFGH$是正方形时，求证：$AE + AH = AB$；

(2)如图 2，已知$AE = AH$，$CF = CG$，当AE、CF的大小有_____关系时，四边形$EFGH$是矩形；

(3)如图 3，$AE = DG$，EG、FH相交于点O，$OE:OF = 4:5$，已知正方形$ABCD$的边长为 16，FH长为 20，当$\triangle OEH$的面积取最大值时，判断四边形$EFGH$是怎样的四边形？证明你的结论.

【答案】(1)见解析

(2)$AE = CF$

(3)平行四边形，证明见解析

【分析】（1）利用平行四边形的性质证得$\angle BEF=\angle AHE$，根据角角边证明$\triangle AEH\cong\triangle BFE$.

（2）当$AE=CF$，证得$\triangle AEH\cong\triangle FCG$，$\triangle EBF$是等腰直角三角形，$\angle HEF=\angle EFG=90°$，即可证得四边形$EFGH$是矩形.

（3）利用正方形的性质证得$AEGD$为平行四边形，过点H作$HM\perp BC$，垂足为点M，交EG于点N，由平行线分线段成比例，设$OE=4x$，$OF=5x$，$HN=h$，则可表示出HN，从而把$\triangle OEH$的面积用x的代数式表示出来，根据二次函数求出最大值，则可得$OE=OG$，$OF=OH$，即可证得平行四边形.

（1）

$\because$四边形$ABCD$为正方形，

$\therefore\angle A=\angle B=90°$，

$\therefore\angle AEH+\angle AHE=90°$.

$\because$四边形$EFGH$为正方形，

$\therefore EH=EF$，$\angle HEF=90°$，

$\therefore\angle AEH+\angle BEF=90°$，

$\therefore\angle BEF=\angle AHE$.

在$\triangle AEH$和$\triangle BFE$中，

$\because\angle A=\angle B=90°$，$\angle AHE=\angle BEF$，$EH=FE$，

$\therefore\triangle AEH\cong\triangle BFE$.

$\therefore AH=BE$.

$\therefore AE+AH=AE+BE=AB$；

（2）

$AE=CF$；证明如下：

$\because$四边形$ABCD$为正方形，

$\therefore\angle A=\angle B=90°$，$AB=BC=AD=CD$，

$\because AE=AH$，$CF=CG$，$AE=CF$，

$\therefore AH=CG$，

$\therefore\triangle AEH\cong\triangle FCG$，

$\therefore EH=FG$.

$\because AE=CF$，

$\therefore AB-AE=BC-CF$，即$BE=BF$，

$\therefore\triangle EBF$是等腰直角三角形，

$\therefore\angle BEF=\angle BFE=45°$，

∵$AE=AH$，$CF=CG$，

∴$\angle AEH=\angle CFG=45°$，

∴$\angle HEF=\angle EFG=90°$，

∴$EH/\!/FG$，

∴四边形$EFGH$是矩形.

（3）

∵四边形$ABCD$为正方形，

∴$AB\parallel CD$.

∵$AE=DG$，$AE\parallel DG$，

∴四边形$AEGD$为平行四边形.

∴$AD\parallel EG$.

∴$EG\parallel BC$.

过点H作$HM\perp BC$，垂足为点M，交EG于点N，

∴$\frac{HN}{HM}=\frac{HO}{HF}$.

∵$OE:OF=4:5$，

设$OE=4x$，$OF=5x$，$HN=h$，则$\frac{h}{16}=\frac{20-5x}{20}$，

∴$h=4(4-x)$.

∴$S=\frac{1}{2}\cdot OE\cdot HN=\frac{1}{2}\cdot 4x\cdot 4(4-x)=-8(x-2)^2+32$.

∴当$x=2$时，$\triangle OEH$的面积最大，

∴$OE=4x=8=\frac{1}{2}EG=OG$，$OF=5x=10=\frac{1}{2}HF=OH$，

∴四边形$EFGH$是平行四边形.

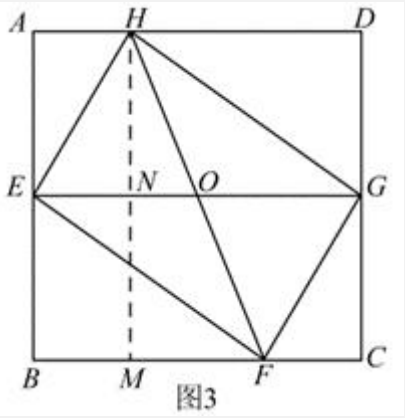


图3

【点睛】此题考查了正方形的性质，矩形的判定和平行四边形的性质与判定，平行线分线段成比例定理，全等三角形的判定与性质，等腰三角形的性质，二次函数的最值，有一定的综合性，解题的关键是熟悉这些知识并灵活运用.

2.（2022·山东东营·中考真题）$\triangle ABC$和$\triangle ADF$均为等边三角形，点E、D分别从点A，B

同时出发，以相同的速度沿AB、BC运动，运动到点 B、C 停止.

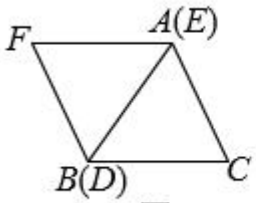


图1

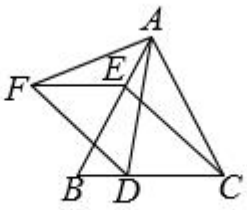
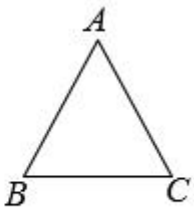


图2



备用图

(1)如图 1，当点 E、D 分别与点 A、B 重合时，请判断：线段CD、EF的数量关系是_____，位置关系是_____；

(2)如图 2，当点 E、D 不与点 A，B 重合时，（1）中的结论是否依然成立？若成立，请给予证明；若不成立，请说明理由；

(3)当点 D 运动到什么位置时，四边形$CEFD$的面积是△ ABC面积的一半，请直接写出答案；此时，四边形$BDEF$是哪种特殊四边形？请在备用图中画出图形并给予证明.

【答案】(1)$CD=EF$，$CD\parallel EF$

(2)$CD=EF$，$CD\parallel EF$，成立，理由见解析

(3)点 D 运动到 BC 的中点时，$\square BDEF$是菱形，证明见解析

【分析】(1)根据△ ABC和△ ADF均为等边三角形，得到 $AF=AD$，$AB=BC$，$\angle FAD=\angle ABC=60°$，根据 E、D 分别与点 A、B 重合，得到 $AB=AD$，$EF=AF$，$CD=BC$，$\angle FAD=\angle FAB$，推出 $CD=EF$，$CD\parallel EF$；

（2）连接 BF，根据 $\angle FAD=\angle BAC=60°$，推出 $\angle FAB=\angle DAC$，根据 $AF=AD$，$AB=AC$，推出 $\triangle AFB\cong\triangle ADC$，得到 $\angle ABF=\angle ACD=60°$，$BF=CD$，根据 $AE=BD$，推出 $BE=CD$，得到 $BF=BE$，推出$\triangle BFE$ 是等边三角形，得到 $BF=EF$，$\angle FEB=60°$，推出 $CD=EF$，$CD\parallel EF$；

（3）过点 E 作 $EG\perp BC$ 于点 G，设$\triangle ABC$ 的边长为 a，$AD=h$，根据 $AB=BC$，$BD=CD=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}a$，$BD=AE$，推出 $AE=BE=\frac{1}{2}AB$，根据 $AB=AC$，推出 $AD\perp BC$，得到 $EG\parallel AD$，推出 $\triangle EBG\backsim\triangle ABD$，推出$\frac{EG}{AD}=\frac{BE}{AB}=\frac{1}{2}$，得到$EG=\frac{1}{2}AD=\frac{1}{2}h$，根据 $CD=EF$，$CD\parallel EF$，推出四边形 $CEFD$ 是平行四边形，推出$S_{CEFD}=CD\cdot EG=\frac{1}{2}a\cdot\frac{1}{2}h=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}ah=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}$，根据 $EF=BD$，$EF\parallel BD$，推出四边形 $BDEF$ 是平行四边形，根据 $BF=EF$，推出$\square BDEF$是菱形.

（1）

∵△ ABC和△ ADF均为等边三角形，

∴$AF=AD$，$AB=BC$，$\angle FAD=\angle ABC=60°$，

当点 E、D 分别与点 A、B 重合时，$AB=AD$，$EF=AF$，$CD=BC$，$\angle FAD=\angle FAB$，

∴$CD=EF$，$CD\parallel EF$；

故答案为：$CD=EF$，$CD\parallel EF$；

（2）

$CD=EF$，$CD/\!/EF$，成立．

证明：

连接 BF，

∵$\angle FAD=\angle BAC=60°$，

∴$\angle FAD-\angle BAD=\angle BAC-\angle BAD$，

即$\angle FAB=\angle DAC$，

∵$AF=AD$，$AB=AC$，

∴$\triangle AFB\cong\triangle ADC$(SAS)，

∴$\angle ABF=\angle ACD=60°$，$BF=CD$，

∵$AE=BD$，

∴$BE=CD$，

∴$BF=BE$，

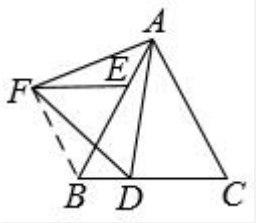
∴$\triangle BFE$ 是等边三角形，

∴$BF=EF$，$\angle FEB=60°$，

∴$CD=EF$，$BC/\!/EF$，

即 $CD/\!/EF$，

∴$CD=EF$，　$CD/\!/EF$；



（3）

如图，当点 D 运动到 BC 的中点时，四边形$CEFD$的面积是△ ABC面积的一半，此时，四边形$BDEF$是菱形．

证明：

过点 E 作 $EG\perp BC$ 于点 G，设△ABC 的边长为 a，$AD=h$，

∵$AB=BC$，$BD=CD=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}a$，　$BD=AE$，

∴$AE=BE=\frac{1}{2}AB$，

∵$AB=AC$，

∴$AD\perp BC$，

∴$EG/\!/AD$，

∴$\triangle EBG\backsim\triangle ABD$，

$\therefore \frac{EG}{AD}=\frac{BE}{AB}=\frac{1}{2}$,

$\therefore EG=\frac{1}{2}AD=\frac{1}{2}h$,

由（2）知，$CD=EF$，$CD\parallel EF$，

∴四边形 $CEFD$ 是平行四边形，

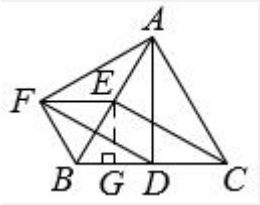
$\therefore S_{四边形CEFD}=CD\cdot EG=\frac{1}{2}a\cdot\frac{1}{2}h=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}ah=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}$，

此时，$EF=BD$，$EF\parallel BD$，

∴四边形 $BDEF$ 是平行四边形，

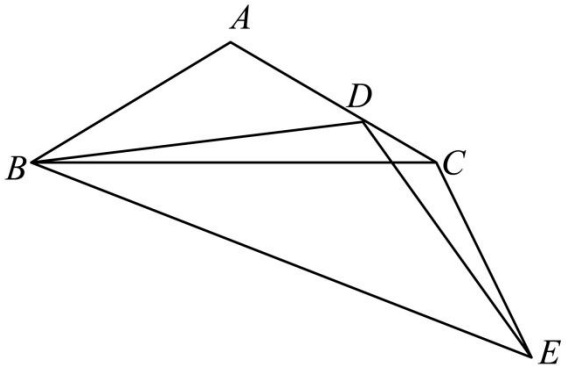
$\because BF=EF$，

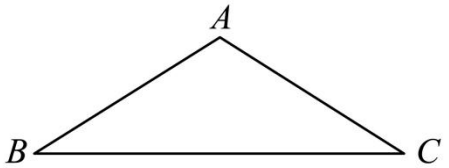
$\therefore$▱$BDEF$是菱形.



【点睛】本题主要考查了等边三角形判定与性质，全等三角形的判定与性质，平行四边形的判定与性质，相似三角形的判定与性质，菱形的判定，解决问题的关键是熟练掌握等边三角形的判定和性质，全等三角形的判定和性质，平行四边形判定和性质，相似三角形的判定和性质，菱形的判定.

3.（2022·辽宁鞍山·中考真题）如图，在△ABC中，$AB=AC$，$\angle BAC=120°$，点D在直线AC上，连接BD，将DE绕点D逆时针旋转$120°$，得到线段DE，连接BE，CE.





备用图

(1)求证：$BC=\sqrt{3}AB$；

(2)当点D在线段AC上（点D不与点A，C重合）时，求$\frac{CE}{AD}$的值；

(3)过点A作$AN\parallel DE$交BD于点N，若$AD=2CD$，请直接写出$\frac{AN}{CE}$的值.

【答案】(1)证明见解析；

(2)$\sqrt{3}$

(3)$\frac{\sqrt{57}}{19}$或$\frac{\sqrt{21}}{21}$

【分析】（1）作 $AH\perp BC$ 于 H，可得 $BH=\frac{\sqrt{3}}{2}AB$，$BC=2BH$，进而得出结论；

（2）证明$\triangle ABD\backsim\triangle CBE$，进而得出结果；

（3）当点 D 在线段 AC 上时，作 $BF\perp AC$，交 CA 的延长线于 F，作 $AG\perp BD$ 于 G，设 $AB=AC=3a$，则 $AD=2a$，解直角三角形 BDF，求得 BD 的长，根据$\triangle DAG\backsim\triangle DBF$ 求得 AQ，进而求得 AN，进一步得出结果；当点 D 在 AC 的延长线上时，设 $AB=AC=2a$，则 $AD=4a$，同样方法求得结果．

（1）

证明：如图 1，

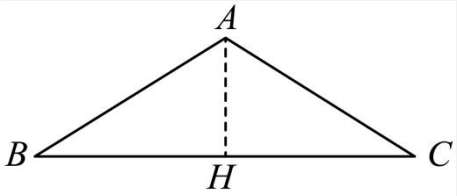


图1

作 $AH\perp BC$ 于 H，

$\because AB=AB$，

$\therefore\angle BAH=\angle CAH=\frac{1}{2}\angle BAC=\frac{1}{2}\times120°=60°$，$BC=2BH$，

$\therefore\sin60°=\frac{BH}{AB}$，

$\therefore BH=\frac{\sqrt{3}}{2}AB$，

$\therefore BC=2BH=\sqrt{3}AB$；

（2）

解：$\because AB=AC$，

$\therefore\angle ABC=\angle ACB=\frac{180°-\angle BAC}{2}=\frac{180°-120°}{2}=30°$，

由（1）得，$\frac{BC}{AB}=\sqrt{3}$，

同理可得，

$\angle DBE=30°$，$\frac{BE}{BD}=\sqrt{3}$，

$\therefore\angle ABC=\angle DBE$，$\frac{BC}{AB}=\frac{BE}{BD}$，

$\therefore\angle ABC-\angle DBC=\angle DBE-\angle DBC$，

$\therefore\angle ABD=\angle CBE$，

$\therefore\triangle ABD\backsim\triangle CBE$，

$\therefore\frac{CE}{AD}=\frac{BE}{BD}=\sqrt{3}$；

（3）

：如图 2，

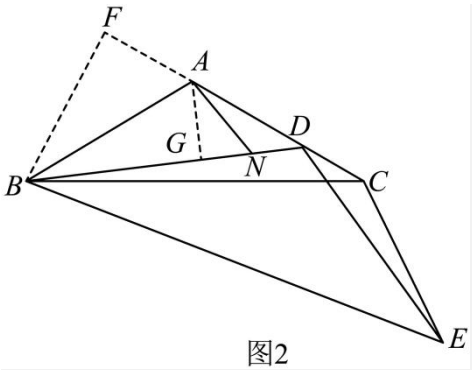


图2

当点 D 在线段 AC 上时，

作 $BF\perp AC$，交 CA 的延长线于 F，作 $AG\perp BD$ 于 G，

设 $AB=AC=3a$，则 $AD=2a$，

由（1）得，$CE=\sqrt{3}AD=2\sqrt{3}a$，

在 $Rt\triangle ABF$ 中，$\angle BAF=180°-\angle BAC=60°$，$AB=3a$，

$\therefore AF=3a\cdot\cos60°=\frac{3}{2}a$，$BF=3a\cdot\sin60°=\frac{3\sqrt{3}}{2}a$，

在 $Rt\triangle BDF$ 中，$DF=AD+AF=2a+\frac{3}{2}a=\frac{7}{2}a$，

$BD=\sqrt{BF^2+DF^2}=\sqrt{\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}a\right)^2+\left(\frac{7}{2}a\right)^2}=\sqrt{19}a$，

$\because\angle AGD=\angle F=90°$，$\angle ADG=\angle BDF$，

$\therefore\triangle DAG\backsim\triangle DBF$，

$\therefore\frac{AG}{BF}=\frac{AD}{BD}$，

$\therefore\frac{AG}{\frac{3\sqrt{3}}{2}a}=\frac{2a}{\sqrt{19}a}$，

$\therefore AG=\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{19}}a$，

$\because AN\parallel DE$，

$\therefore\angle AND=\angle BDE=120°$，

$\therefore\angle ANG=60°$，

$\therefore AN=\frac{AG}{\sin60°}=\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{19}}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}a=\frac{6\sqrt{19}}{19}a$，

$\therefore\frac{AN}{CE}=\frac{\frac{6\sqrt{19}}{19}a}{2\sqrt{3}a}=\frac{\sqrt{57}}{19}$，

如图 3，

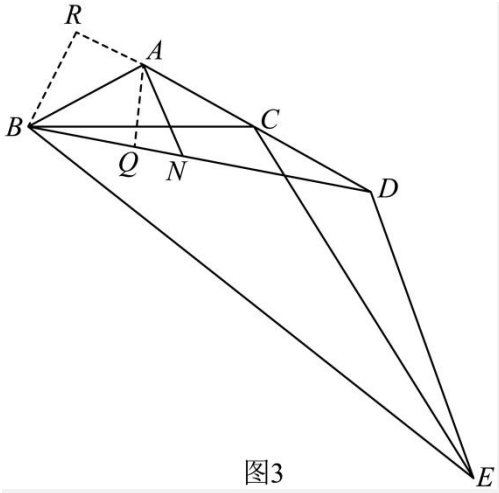


图3

当点 D 在 AC 的延长线上时，

设 $AB=AC=2a$，则 $AD=4a$，

由（1）得，

$CE=\sqrt{3}AD=4\sqrt{3}a$，

作 $BR\perp CA$，交 CA 的延长线于 R，作 $AQ\perp BD$ 于 Q，

同理可得，

$AR=a$，$BR=\sqrt{3}a$，

$\therefore BD=\sqrt{(\sqrt{3}a)^2+(5a)^2}=2\sqrt{7}a$，

$\therefore \frac{AQ}{\sqrt{3}a}=\frac{4a}{2\sqrt{7}a}$，

$\therefore AQ=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{7}}a$，

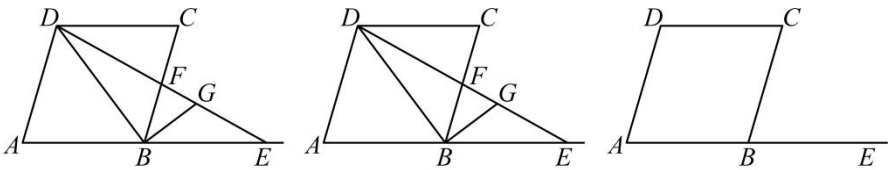
$\therefore AN=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{7}}a\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{4}{\sqrt{7}}a$，

$\therefore \frac{AN}{CE}=\frac{\frac{4}{\sqrt{7}}a}{4\sqrt{3}a}=\frac{\sqrt{21}}{21}$，

综上所述：$\frac{AN}{CE}$的值为$\frac{\sqrt{57}}{19}$或$\frac{\sqrt{21}}{21}$.

【点睛】本题考查了等腰三角形的性质，相似三角形的判定和性质，解直角三角形等知识，解决问题的关键是正确分类和较强的计算能力.

4.（2022·浙江衢州·中考真题）如图，在菱形 $ABCD$ 中，AB=5，BD 为对角线.点 E 是边 AB 延长线上的任意一点，连结DE交BC于点F，BG平分$\angle CBE$交DE于点 G.



备用图1　　备用图2

(1)求证：$\angle DBG=90°$.

(2)若$BD=6$，$DG=2GE$.

①求菱形$ABCD$的面积.

②求 tan$\angle BDE$的值.

(3)若$BE=AB$，当$\angle DAB$的大小发生变化时（$0°<\angle DAB<180°$），在AE上找一点T，使GT为定值，说明理由并求出ET的值.

【答案】(1)见解析

(2)①24，②$\frac{4}{9}$

(3)$ET=\frac{10}{3}$，理由见解析

【分析】（1）由菱形的性质可证得$\angle CBD=\angle ABD=\frac{1}{2}\angle ABC$，由$BG$平分$\angle CBE$交$DE$于点 G，得到$\angle CBG=\angle EBG=\frac{1}{2}\angle CBE$，进一步即可得到答案；

（2）①连接 AC 交 BD 于点 O,$Rt\triangle DOC$ 中，$OC=\sqrt{CD^2-OD^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$，求得 $AC=8$，由菱形的面积公式可得答案；②由 $BG\parallel AC$，得到$\frac{DH}{DG}=\frac{DO}{BD}=\frac{1}{2}$，$DH=HG$，$DG=2DH$，又由 $DG=2GE$，得到 $EG=DH=HG$，则$\frac{DH}{EH}=\frac{1}{2}$，再证明$\triangle CDH\backsim\triangle AEH$，$CH=\frac{1}{3}AC=\frac{8}{3}$，$OH=OC-CH=4-\frac{8}{3}=\frac{4}{3}$，利用正切的定义得到答案；

（3）过点 G 作 $GT\parallel BC$，交 AE 于点 T，$\triangle BGE\backsim\triangle AHE$，得 $AB=BE=5$，则 $EG=GH$，再证$\triangle DOH\backsim\triangle DBG$，得 $DH=GH=EG$，由$\triangle EGT\backsim\triangle EDA$ 得$\frac{GT}{AD}=\frac{ET}{EA}=\frac{1}{3}$，$GT=\frac{5}{3}$，为定值，即可得到 ET 的值.

（1）

证明：∵四边形 $ABCD$ 是菱形，

∴$BC=DC$，$AB\parallel CD$，

∴$\angle BDC=\angle CBD$，$\angle BDC=\angle ABD$，

∴$\angle CBD=\angle ABD=\frac{1}{2}\angle ABC$，

∵BG平分$\angle CBE$交DE于点 G，

∴$\angle CBG=\angle EBG=\frac{1}{2}\angle CBE$，

∴$\angle CBD+\angle CBG=\frac{1}{2}$（$\angle ABC+\angle CBE$）$=\frac{1}{2}\times180°=90°$，

∴$\angle DBG=90°$；

（2）

解：①如图 1，连接 AC 交 BD 于点 O，

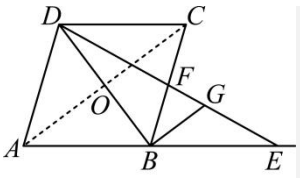


图1

∵四边形 $ABCD$ 是菱形，$BD=6$，

∴$OD=\frac{1}{2}BD=3$，$AC\perp BD$，

∴$\angle DOC=90°$，

在 $Rt\triangle DOC$ 中，$OC=\sqrt{CD^2-OD^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$，

∴$AC=2OC=8$，

∴$S_{菱形ABCD}=\frac{1}{2}AC\times BD=\frac{1}{2}\times 8\times 6=24$，

即菱形$ABCD$的面积是 24.

②如图 2，连接 AC，分别交 BD、DE 于点 O、H，

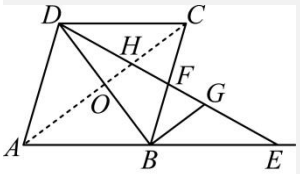


图2

∵四边形 $ABCD$ 是菱形，

∴$AC\perp BD$，

∵$\angle DBG=90°$

∴$BG\perp BD$，

∴$BG\parallel AC$，

∴$\frac{DH}{DG}=\frac{DO}{BD}=\frac{1}{2}$，

∴$DH=HG$，$DG=2DH$，

∵$DG=2GE$，

∴$EG=DH=HG$，

∴$\frac{DH}{EH}=\frac{1}{2}$，

∵$AB\parallel CD$，

∴$\angle DCH=EAH$，$\angle CDH=\angle AEH$，

∴$\triangle CDH\backsim\triangle AEH$，

∴$\frac{CH}{AH}=\frac{DH}{EH}=\frac{1}{2}$，

∴$CH=\frac{1}{3}AC=\frac{8}{3}$，

∴$OH=OC-CH=4-\frac{8}{3}=\frac{4}{3}$，

∴$\tan\angle BDE=\frac{OH}{OD}=\frac{4}{9}$;

（3）

如图 3，过点 G 作 $GT\parallel BC$ 交 AE 于点 T，此时 $ET=\frac{10}{3}$.

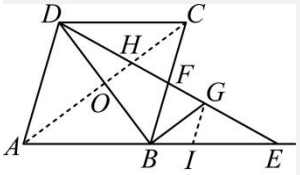


图3

理由如下：由题（1）可知，当$\angle DAB$ 的大小发生变化时，始终有 $BG\parallel AC$，

∴$\triangle BGE\backsim\triangle AHE$，

∴$\frac{EG}{GH}=\frac{BE}{AB}$，

∵$AB=BE=5$，

∴$EG=GH$，

同理可得，$\triangle DOH\backsim\triangle DBG$，

∴$\frac{DH}{GH}=\frac{DO}{BO}$，

∵$BO=DO$，

∴$DH=GH=EG$，

∵$GT\parallel BC$，

∴$GT\parallel AD$，

∴$\triangle EGT\backsim\triangle EDA$，

∴$\frac{GT}{AD}=\frac{EG}{ED}=\frac{ET}{EA}=\frac{1}{3}$，

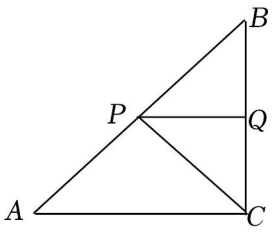
∵$AD=AB=5$，

∴$GT=\frac{5}{3}$，为定值，

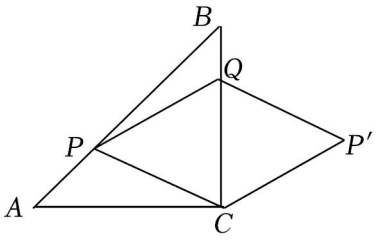
此时 $ET=\frac{1}{3}AE=\frac{1}{3}（AB+BE）=\frac{10}{3}$.

【点睛】此题主要考查了相似三角形的判定和性质、菱形的性质、勾股定理、锐角三角函数等知识，熟练掌握相似三角形的判定和性质是解题的关键.

5.（2022·山东枣庄·中考真题）已知$\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90°$，$AC=BC=4$cm，点 P 从点 A 出发，沿 AB 方向以每秒$\sqrt{2}$cm 的速度向终点 B 运动，同时动点 Q 从点 B 出发沿 BC 方向以每秒 1cm 的速度向终点 C 运动，设运动的时间为 t 秒.



图①



图②

(1)如图①，若 $PQ\perp BC$，求 t 的值；

(2)如图②，将△PQC 沿 BC 翻折至△$P'QC$，当 t 为何值时，四边形 $QPCP'$为菱形？

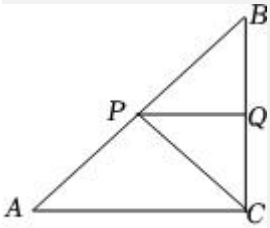
【答案】(1)当 $t=2$ 时，$PQ\perp BC$

(2)当 t 的值为$\frac{4}{3}$时，四边形 $QPCP'$为菱形

【分析】（1）根据勾股定理求出AB，根据相似三角形的性质列出比例式，计算即可.

（2）作$PD\perp BC$于D，$PE\perp AC$于E，证明出ΔABC为直角三角形，进一步得出ΔAPE和ΔPBD为等腰直角三角形，再证明四边形$PECD$为矩形，利用勾股定理在$Rt\triangle PCE$、$Rt\triangle PDQ$中，结合四边形$QPCP$为菱形，建立等式进行求解.

【详解】（1）解：（1）如图①，



图①

∵$\angle ACB=90°$，$AC=BC=4$cm，

∴$AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=\sqrt{4^2+4^2}=4\sqrt{2}$（cm），

由题意得，$AP=\sqrt{2}t$cm，$BQ=t$cm，

则 $BP=（4\sqrt{2}-\sqrt{2}t）$cm，

∵$PQ\perp BC$，

∴$\angle PQB=90°$，

∴$\angle PQB=\angle ACB$，

∴$PQ\parallel AC$，

∴$\begin{cases}\angle BPQ=\angle BAC\\ \angle BQP=\angle BCA\end{cases}$，

∴$\triangle BPQ\backsim\triangle BAC$，

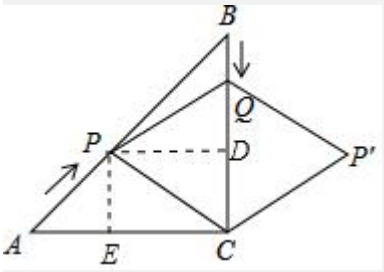
∴$\frac{BP}{BA}=\frac{BQ}{BC}$，

∴$\frac{4\sqrt{2}-\sqrt{2}t}{4\sqrt{2}}=\frac{t}{4}$，

解得：$t=2$，

∴当 $t=2$ 时，$PQ \perp BC$.

（2）解：作$PD \perp BC$于D，$PE \perp AC$于E，如图，



$AP=\sqrt{2}t$，$BQ=tcm$，$(0 \leqslant t<4)$

$\because \angle C=90°$，$AC=BC=4\text{cm}$，

$\therefore \Delta ABC$为直角三角形，

$\therefore \angle A=\angle B=45°$，

$\therefore \Delta APE$和ΔPBD为等腰直角三角形，

$\therefore PE=AE=\frac{\sqrt{2}}{2}AP=t\text{cm}$，$BD=PD$，

$\therefore CE=AC-AE=(4-t)\text{cm}$，

∵四边形$PECD$为矩形，

$\therefore PD=EC=(4-t)\text{cm}$，

$\therefore BD=(4-t)\text{cm}$，

$\therefore QD=BD-BQ=(4-2t)\text{cm}$，

在$Rt\triangle PCE$中，$PC^2=PE^2+CE^2=t^2+(4-t)^2$，

在$Rt\triangle PDQ$中，$PQ^2=PD^2+DQ^2=(4-t)^2+(4-2t)^2$，

∵四边形$QPCP$为菱形，

$\therefore PQ=PC$，

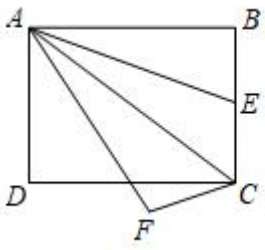
$\therefore t^2+(4-t)^2=(4-t)^2+(4-2t)^2$，

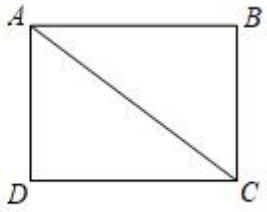
$\therefore t_1=\frac{4}{3}$，$t_2=4$（舍去）.

$\therefore t$的值为$\frac{4}{3}$.

【点睛】此题是相似形综合题，主要考查的是菱形的性质、等腰直角三角形的性质，线段垂直平分线的性质，用方程的思想解决问题是解本题的关键.

6.（2022·江苏南通·中考真题）如图，矩形$ABCD$中，$AB=4, AD=3$，点 E 在折线BCD上运动，将AE绕点 A 顺时针旋转得到AF，旋转角等于$\angle BAC$，连接CF.





(备用图)

(1)当点 E 在BC上时，作$FM \perp AC$，垂足为 M，求证$AM = AB$；

(2)当$AE = 3\sqrt{2}$时，求CF的长；

(3)连接DF，点 E 从点 B 运动到点 D 的过程中，试探究DF的最小值.

【答案】(1)见详解

(2)$\sqrt{3}$或$\sqrt{13}$

(3)$\frac{3}{5}$

【分析】（1）证明△ ABE ≅△ AMF即可得证.

（2）分情况讨论，当点 E 在 BC 上时，借助△ ABE ≅△ AMF，在Rt △ CMF中求解；当点 E 在 CD 上时，过点 E 作 $EG \perp AB$ 于点 G，$FH \perp AC$ 于点 H，借助△ AGE ≅△ AHF并利用勾股定理求解即可.

（3）分别讨论当点 E 在 BC 和 CD 上时，点 F 所在位置不同，DF 的最小值也不同，综合比较取最小即可.

（1）

如图所示，

由题意可知，$\angle AMF = \angle B = 90°$，$\angle BAC = \angle EAF$，

$\therefore \angle BAE = \angle MAF$，

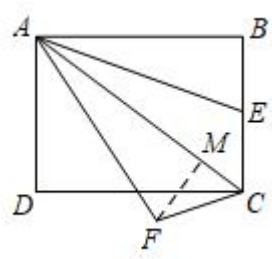
由旋转性质知：$AE=AF$，

在△ ABE和△ AMF中，

$$\begin{cases} \angle B = \angle AMF \\ \angle BAE = \angle MAF, \\ AE = AF \end{cases}$$

$\therefore$△ ABE ≅△ AMF，

$\therefore AM = AB$.



（2）

当点 E 在 BC 上时，

在$Rt\triangle ABE$中，$AB=4$，$AE=3\sqrt{2}$，

则$BE=\sqrt{AE^2-AB^2}=\sqrt{2}$，

在$Rt\triangle ABC$中，$AB=4$，$BC=3$，

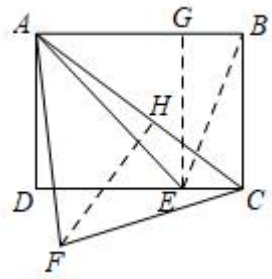
则$AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=5$，

由（1）可得，$MF=BE=\sqrt{2}$，

在$Rt\triangle CMF$中，$MF=\sqrt{2}$，$CM=AC-AM=5-4=1$，

则$CF=\sqrt{MF^2+CM^2}=\sqrt{3}$，

当点 E 在 CD 上时，如图，



过点 E 作 $EG\perp AB$ 于点 G，$FH\perp AC$ 于点 H，

同（1）可得$\triangle AGE\cong\triangle AHF$，

$\therefore FH=EG=BC=3, AH=AG=3, HC=2$，

由勾股定理得$CF=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$；

故 CF 的长为$\sqrt{3}$或$\sqrt{13}$.

（3）

如图 1 所示，当点 E 在 BC 边上时，过点 D 作$DH\perp FM$于点 H，

由（1）知，$\angle AMF=90°$，

故点 F 在射线 MF 上运动，且点 F 与点 H 重合时，DH 的值最小.

在$\triangle CMJ$与$\triangle CDA$中，

$$\begin{cases}\angle CMJ=\angle ADC\\ \angle MCJ=\angle ACD'\end{cases}$$

$\therefore Rt\triangle CMJ\sim Rt\triangle CDA$,

$\therefore \frac{CM}{CD}=\frac{MJ}{AD}=\frac{CJ}{AC}$,

即$\therefore \frac{1}{4}=\frac{MJ}{3}=\frac{CJ}{5}$,

$\therefore MJ=\frac{3}{4},\ CJ=\frac{5}{4}$,

$DJ=CD-CJ=4-\frac{5}{4}=\frac{11}{4}$,

在$\triangle CMJ$与$\triangle DHJ$中,

$\begin{cases}\angle CMJ=\angle DHJ\\ \angle CJM=\angle DJH'\end{cases}$

$\therefore Rt\triangle CMJ\sim Rt\triangle DHJ$,

$\therefore \frac{CM}{DH}=\frac{CJ}{DJ}$,

即$\frac{1}{DH}=\frac{\frac{5}{4}}{\frac{11}{4}}$,

$DH=\frac{11}{5}$,

故DF的最小值$\frac{11}{5}$;

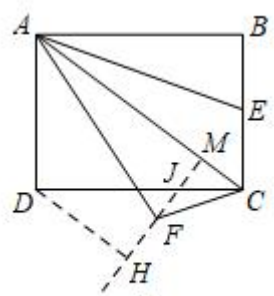


图1

如图 2 所示，当点 E 在线段 CD 上时，将线段 AD 绕点 A 顺时针旋转$\angle BAC$的度数，得到线段 AR，连接 FR，过点 D 作$DQ\perp AR$，$DK\perp FR$，

由题意可知，$\angle DAE=\angle RAF$，

在$\triangle ARF$与$\triangle ADE$中，

$\begin{cases}AD=AR\\ \angle DAE=\angle RAF,\\ AE=AF\end{cases}$

$\therefore\triangle ADE\cong\triangle ARF$,

$\therefore \angle ARF=\angle ADE=90°$,

故点 F 在 RF 上运动，当点 F 与点 K 重合时，DF 的值最小；

由于$DQ\perp AR$，$DK\perp FR$，$\angle ARF=90°$，

故四边形 $DQRK$ 是矩形；

$\therefore DK=QR$,

$\therefore AQ = AD \cdot \cos\angle BAC = 3 \times \frac{4}{5} = \frac{12}{5}$,

$\because AR = AD = 3$,

$\therefore DK = QR = AR - AQ = 3 - \frac{12}{5} = \frac{3}{5}$,

故此时 DF 的最小值为$\frac{3}{5}$;

由于$\frac{3}{5} < \frac{11}{5}$，故 DF 的最小值为$\frac{3}{5}$.

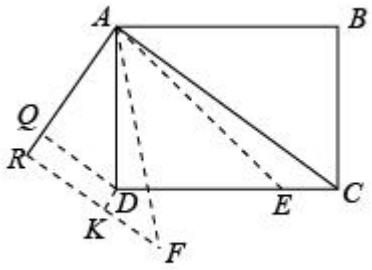


图2

【点睛】本题考查矩形的性质、全等三角形的判定和性质、相似三角形的性质和判定、勾股定理、解直角三角形，解决本题的关键是各性质定理的综合应用.

7.（2022·山东菏泽·中考真题）如图 1，在△ ABC中，$\angle ABC = 45°, AD \perp BC$于点 D，在 DA 上取点 E，使$DE = DC$，连接 BE、CE.

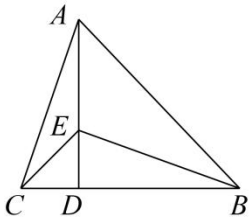


图 1

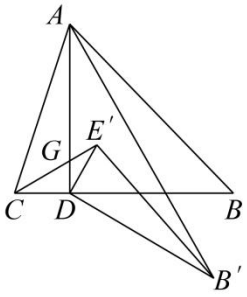


图 2

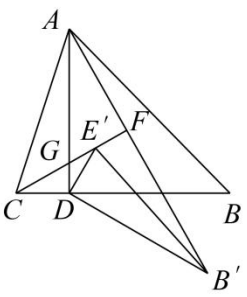


图 3

(1)直接写出 CE 与 AB 的位置关系；

(2)如图 2，将△ BED绕点 D 旋转，得到△ $B'E'D$（点B'，E'分别与点 B，E 对应），连接CE'、AB'，在△ BED旋转的过程中CE'与AB'的位置关系与（1）中的 CE 与 AB 的位置关系是否一致?请说明理由；

(3)如图 3，当△ BED绕点 D 顺时针旋转 30°时，射线CE'与 AD、AB'分别交于点 G、F，若$CG = FG, DC = \sqrt{3}$，求AB'的长.

【答案】(1)$CE \perp AB$，理由见解析

(2)一致，理由见解析

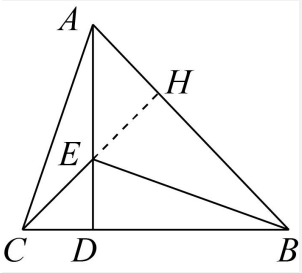
(3)$5\sqrt{3}$

【分析】(1)由等腰直角三角形的性质可得∠ABC=∠DAB=45°，∠DCE=∠DEC=∠AEH=45°，可得结论；

（2）通过证明△ ADB'≌△ CDE'，可得$\angle DAB' = \angle DCE'$，由余角的性质可得结论；

（3）由等腰直角的性质和直角三角形的性质可得$AB' = \sqrt{3}AD$，即可求解.

【详解】（1）如图，延长 CE 交 AB 于 H，



∵∠ABC=45°，$AD \perp BC$，

∴∠ADC=∠ADB=90°，∠ABC=∠DAB=45°，

∵$DE=CD$，

∴∠DCE=∠DEC=∠AEH=45°，

∴∠BHC=∠BAD+∠AEH=90°，

∴$CE \perp AB$；

（2）在△ BED旋转的过程中CE'与AB'的位置关系与（1）中的 CE 与 AB 的位置关系是一致的，理由如下：

如图 2，延长CE'交AB'于 H，

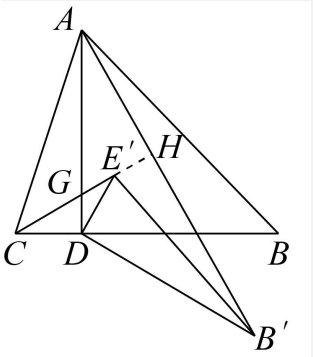


图 2

由旋转可得：$CD=DE'$，$B'D=AD$，

∵∠ADC=∠ADB=90°，

∴$\angle CDE' = \angle ADB'$，

∵$\frac{CD}{DE'} = \frac{AD}{DB'} = 1$，

∴△ ADB' ~△ CDE'，

$\therefore \angle DAB' = \angle DCE'$，

$\because \angle DCE'+\angle DGC=90°$，$\angle DGC=\angle AGH$，

$\therefore \angle DAB'+\angle AGH=90°$，

$\therefore \angle AHC=90°$，

$\therefore CE' \perp AB'$；

（3）如图 3，过点 D 作 $DH \perp AB'$ 于点 H，

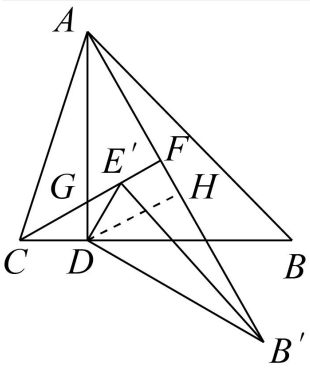


图 3

$\because$ △BED 绕点 D 顺时针旋转 30°，

$\therefore \angle BDB' = 30°, BD' = BD = AD$，

$\therefore \angle ADB' = 120°, \angle DAB' = \angle AB'D = 30°$，

$\because DH \perp AB', AD = B'D$，

$\therefore AD=2DH$，$AH=\sqrt{3}DH=B'H$，

$\therefore AB' = \sqrt{3}AD$，

由（2）可知：$\triangle ADB' \sim \triangle CDE'$，

$\therefore \angle DAB' = \angle DCE' = 30°$，

$\because AD \perp BC$，$CD=\sqrt{3}$，

$\therefore DG=1$，$CG=2DG=2$，

$\therefore CG=FG=2$，

$\because \angle DAB' = 30°, DH \perp AB'$，

$\therefore AG=2GF=4$，

$\therefore AD=AG+DG=4+1=5$，

$\therefore AB' = \sqrt{3}AD = 5\sqrt{3}$.

【点睛】本题是三角形综合题，考查了等腰三角形的性质，直角三角形的性质，旋转的性质，相似三角形的判定和性质等知识，证明三角形相似是解题的关键.

8.（2022·辽宁丹东·中考真题）已知矩形 $ABCD$，点 E 为直线 BD 上的一个动点（点 E 不与

点 B 重合），连接 AE，以 AE 为一边构造矩形 $AEFG$（A，E，F，G 按逆时针方向排列），连接 DG.

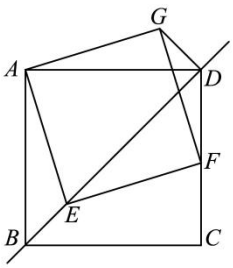


图1

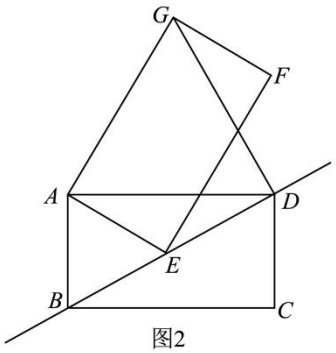


图2

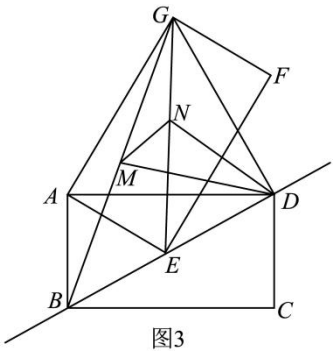


图3

(1)如图 1，当$\frac{AD}{AB}=\frac{AG}{AE}=1$ 时，请直接写出线段 BE 与线段 DG 的数量关系与位置关系；

(2)如图 2，当$\frac{AD}{AB}=\frac{AG}{AE}=2$ 时，请猜想线段 BE 与线段 DG 的数量关系与位置关系，并说明理由；

(3)如图 3，在（2）的条件下，连接 BG，EG，分别取线段 BG，EG 的中点 M，N，连接 MN，MD，ND，若 $AB=\sqrt{5}$，$\angle AEB=45°$，请直接写出△MND 的面积.

【答案】(1)$BE=DG$，$BE\perp DG$

(2)$BE=\frac{1}{2}DG$，$BE\perp DG$，理由见解析

(3)$S_{\triangle MNG}=\frac{9}{4}$

【分析】（1）证明△$BAE\cong$△DAG，进一步得出结论；

（2）证明 $BAE\backsim$△DAG，进一步得出结论；

（3）解斜三角形 ABE，求得 $BE=3$，根据（2）$\frac{DG}{BE}=2$ 可得 $DG=6$，从而得出三角形 BEG 的面积，可证得△$MND\cong$△MNG，△MNG 与△BEG 的面积比等于 1：4，进而求得结果.

（1）

解：由题意得：四边形 $ABCD$ 和四边形 $AEFG$ 是正方形，

$\therefore AB=AD$，$AE=AG$，$\angle BAD=\angle EAG=90°$，

$\therefore \angle BAD-\angle DAE=\angle EAG-\angle DAE$，

$\therefore \angle BAE=\angle DAG$，

$\therefore$△$BAE\cong$△DAG（SAS），

$\therefore BE=DG$，$\angle ABE=\angle ADG$，

$\therefore \angle ADG+\angle ADB=\angle ABE+\angle ADB=90°$，

$\therefore \angle BDG=90°$，

$\therefore BE\perp DG$；

（2）

$BE=\frac{1}{2}DG$，$BE\perp DG$，理由如下：

由（1）得：$\angle BAE=\angle DAG$，

$\because \frac{AD}{AB}=\frac{AG}{AE}=2$，

$\therefore \triangle BAE\backsim\triangle DAG$，

$\therefore \frac{DG}{BE}=\frac{AD}{AB}=2$，$\angle ABE=\angle ADG$，

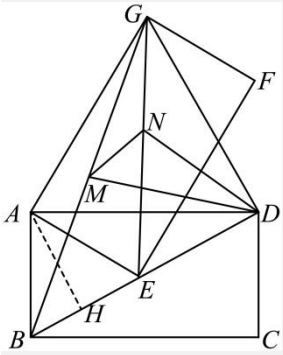
$\therefore \angle ADG+\angle ADB=\angle ABE+\angle ADB=90°$，

$\therefore \angle BDG=90°$，

$\therefore BE\perp DG$；

（3）

如图，



作 $AH\perp BD$ 于 H，

$\because \tan\angle ABD=\frac{AH}{BH}=\frac{AD}{AB}=2$，

$\therefore$ 设 $AH=2x$，$BH=x$，

在 $Rt\triangle ABH$ 中，

$x^2+(2x)^2=(\sqrt{5})^2$，

$\therefore BH=1$，$AH=2$，

在 $Rt\triangle AEH$ 中，

$\because \tan\angle ABE=\frac{AH}{EH}$，

$\therefore \frac{AH}{EH}=\tan45^\circ=1$，

$\therefore EH=AH=2$，

$\therefore BE=BH+EH=3$，

$\because BD=\sqrt{AB^2+AD^2}=\sqrt{(\sqrt{5})^2+(2\sqrt{5})^2}=5$，

$\therefore DE=BD-BE=5-3=2$，

由（2）得：$\frac{DG}{BE}=2$，$DG\perp BE$，

$\therefore DG=2BE=6$，

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：https://d.book118.com/618036054136007011