

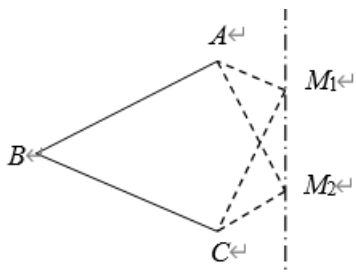
## 第 20 讲二次函数中梯形的存在性问题（核心考点讲与练）

### 【基础知识】

#### 类型一：一般梯形

##### 1. 知识内容：

梯形的限制较少，所以可能出现的情况就会有很多，在处理时需要想清所有可能情况，再进行讨论处理。有一种比较常见的情况是：若已知三点  $ABC$ ，另一点  $M$  在某固定直线上，形成的四边形  $ABCM$  为梯形，则会有两种情况：①  $AM \parallel BC$ ；②  $CM \parallel AB$ ，如图所示。



##### 2. 解题思路：

- (1) 根据题目条件，求出已知 3 个点的坐标；
- (2) 分情况进行讨论；
- (3) 对可能的各种情况，求出已知边所在直线的方程；
- (4) 根据直线方程，求得与其平行的直线的方程，再解出待求点的坐标；
- (5) 根据题目实际情况，验证所有可能点是否满足要求并作答。

注：若两条直线平行，则这两条直线的斜率相等。

#### 类型二：特殊梯形

##### 1. 知识内容：

特殊梯形主要分成等腰梯形和直角梯形两种。对于这两种情况，只需在之前平行的基础上，增加考虑直角或腰相等的条件。

##### 2. 解题思路：

直角梯形：

- (1) 根据题目条件，求出已知 3 个点的坐标；
- (2) 寻找已有的直角，进而判断可能的平行直线；
- (3) 对可能的各种情况，求出已知边所在直线的方程；
- (4) 根据直线方程，求得与其平行的直线的方程，再解出待求点的坐标；
- (5) 根据题目实际情况，验证所有可能点是否满足要求并作答。

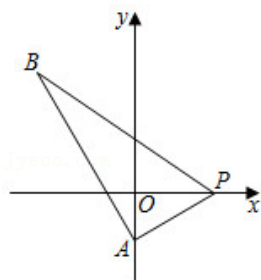
等腰梯形：

- (1) 根据题目条件，求出已知 3 个点的坐标；
- (2) 分情况讨论；
- (3) 对可能的各种情况，求出已知边所在直线的方程；
- (4) 根据直线方程，求得与其平行的直线的方程，再解出待求点的坐标；
- (5) 验证所有形成的梯形是否等腰，并作答．

## 【考点剖析】

1. （2021•浦东新区模拟）已知抛物线  $y = ax^2 + bx - 2$  与  $y$  轴相交于点  $A$ ，顶点  $B$  在第二象限内， $AP \perp AB$ ，交  $x$  轴于点  $P$ ， $\tan \angle APB = 2$ ，点  $P$  的横坐标为  $m$ ．

- (1) 求点  $B$  的坐标（用含  $m$  的代数式表示）；
- (2) 当  $m=2$  时，求抛物线的表达式；
- (3) 如果抛物线的对称轴与  $x$  轴相交于点  $C$ ，且四边形  $ACBP$  是梯形，求  $m$  的值．

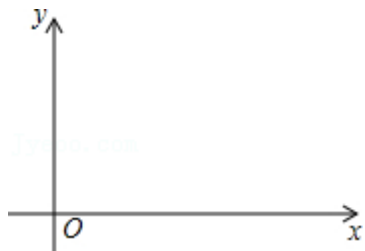


2. (2022 春•松江区校级期中) 已知抛物线  $y=ax^2+3x$  过点  $C(4, 0)$ , 顶点为  $D$ , 点  $B$  在第一象限,  $BC$  垂直于  $x$  轴, 且  $BC=2$ , 直线  $BD$  交  $y$  轴于点  $A$ .

(1) 求抛物线的解析式;

(2) 求点  $A$  的坐标;

(3) 在抛物线的对称轴上是否存在点  $M$ , 使四边形  $AOMD$  和四边形  $BCMD$  中, 一个是平行四边形, 另一个是等腰梯形? 若存在, 请求出点  $M$  的坐标; 若不存在, 请说明理由.



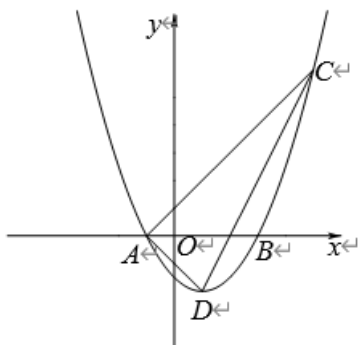
3. 如图, 在平面直角坐标系中, 开口向上的抛物线与  $x$  轴交于点  $A(-1, 0)$  和点  $B(3, 0)$ ,  $D$

为抛物线的顶点，直线  $AC$  与抛物线交于点  $C(5, 6)$ 。

(1) 求抛物线的解析式；

(2) 点  $E$  在  $x$  轴上，且  $\triangle AEC$  和  $\triangle AED$  相似，求点  $E$  的坐标；

(3) 若直角坐标系平面中的点  $F$  和点  $A$ 、 $C$ 、 $D$  构成直角梯形，且面积为 16，试求点  $F$  的坐标。



### 【过关检测】

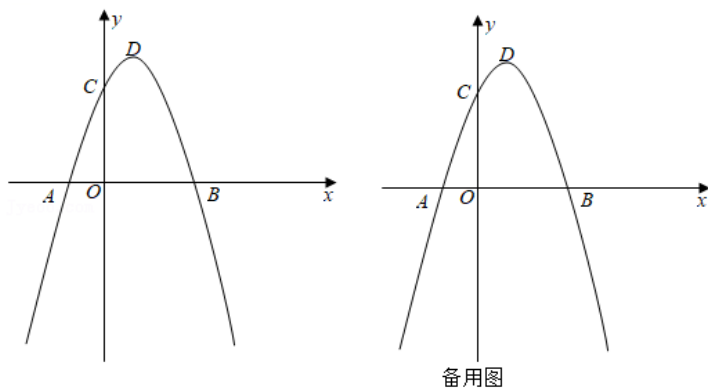
1. (2021•青浦区二模) 已知：如图，在平面直角坐标系  $xOy$  中，抛物线  $y = ax^2 + bx + 3$  的图象与  $x$  轴交于点

$A(-1, 0)$  和点  $B$ ，与  $y$  轴交于点  $C$ ，对称轴是直线  $x=1$ ，顶点是点  $D$ 。

(1) 求该抛物线的解析式和顶点  $D$  的坐标；

(2) 点  $P$  为该抛物线第三象限上的一点，当四边形  $PBDC$  为梯形时，求点  $P$  的坐标；

(3) 在 (2) 的条件下，点  $E$  为  $x$  轴正半轴上的一点，当  $\tan(\angle PBO + \angle PEO) = \frac{5}{2}$  时，求  $OE$  的长。



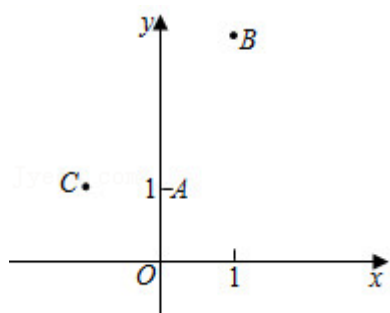
2. (2019 秋•闵行区期末) 如图，已知一个抛物线经过  $A(0, 1)$ ， $B(1, 3)$ ， $C(-1, 1)$  三点。

(1) 求这个抛物线的表达式及其顶点  $D$  的坐标；

(2) 联结  $AB$ 、 $BC$ 、 $CA$ ，求  $\tan \angle ABC$  的值；

(3) 如果点  $E$  在该抛物线的对称轴上，且以点  $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $E$  为顶点的四边形是梯形，直接写出点  $E$

的坐标.

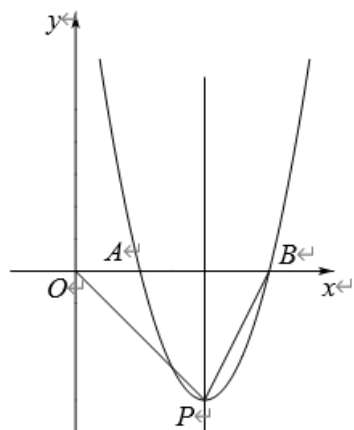


3. 在平面直角坐标系中，已知抛物线  $y = \frac{2}{3}x^2 + bx + c$  与  $x$  轴交于点  $A(-1, 0)$  和点  $B$ ，与  $y$  轴交于点  $C(0, -2)$ 。
- (1) 求该抛物线的表达式，并写出其对称轴；
  - (2) 点  $E$  为该抛物线的对称轴与  $x$  轴的交点，点  $F$  在对称轴上，四边形  $ACEF$  为梯形，求点  $F$  的坐标；
  - (3) 点  $D$  为该抛物线的顶点，设点  $P(t, 0)$ ，且  $t > 3$ ，如果  $\triangle BDP$  和  $\triangle CDP$  的面积相等，求  $t$  的值。

4. 已知二次函数的图象经过  $A(2, 0)$ 、 $C(0, 12)$  两点，且对称轴为直线  $x = 4$ ，设顶点为点  $P$ ，与  $x$  轴的另一交点为点  $B$ 。

(1) 求二次函数的解析式及顶点  $P$  的坐标；

(2) 如图 1，在直线  $y = 2x$  上是否存在点  $D$ ，使四边形  $OPBD$  为等腰梯形？若存在，求出点  $D$  的坐标；若不存在，请说明理由。

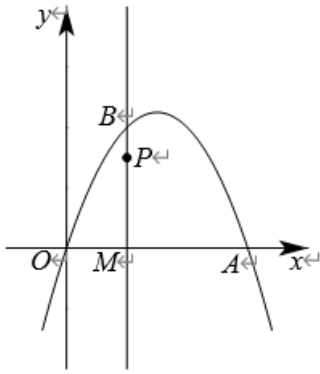


5. 如图，已知二次函数  $y = -x^2 + 2mx$  的图像经过点  $B(1, 2)$ ，与  $x$  轴的另一个交点为  $A$ ，点  $B$  关于抛物线对称轴的对称点为  $C$ ，过点  $B$  作直线  $BM \perp x$  轴垂足为点  $M$ 。

(1) 求二次函数的解析式；

(2) 在直线  $BM$  上有点  $P(1, \frac{3}{2})$ ，联结  $CP$  和  $CA$ ，判断直线  $CP$  与直线  $CA$  的位置关系，并说明理由；

(3) 在 (2) 的条件下，在坐标轴上是否存在点  $E$ ，使得以  $A$ 、 $C$ 、 $P$ 、 $E$  为顶点的四边形为直角梯形，若存在，求出所有满足条件的点  $E$  的坐标；若不存在，请说明理由。



6. 在平面直角坐标系中，抛物线  $y = ax^2 + bx + c$  过  $A(-1, 0)$ 、 $B(3, 0)$ 、 $C(2, 3)$  三点，与  $y$  轴交于点  $D$ 。

- (1) 求该抛物线的解析式，并写出该抛物线的对称轴；
- (2) 分别联结  $AD$ 、 $DC$ 、 $CB$ ，直线  $y = 4x + m$  与线段  $DC$  交于点  $E$ ，当此直线将四边形  $ABCD$  的面积平时，求  $m$  的值；
- (3) 设点  $F$  为该抛物线对称轴上一点，当以  $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $F$  为顶点的四边形是梯形时，请直接写出所有满足条件的点  $F$  的坐标。

7. 在平面直角坐标系  $xOy$  中，二次函数  $y = \frac{1}{3}x^2 + bx + c$  的图像与  $y$  轴交于点  $A$ ，与双曲线  $y = \frac{8}{x}$  有一个公共点  $B$ ，它的横坐标为 4。过点  $B$  作直线  $l \parallel x$  轴，与该二次函数图像交于另一点  $C$ ，直线  $AC$  的截距是  $-6$ 。

- (1) 求二次函数的解析式；
- (2) 求直线  $AC$  的表达式；
- (3) 平面内是否存在点  $D$ ，使  $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $D$  为顶点的四边形是等腰梯形，如果存在，求出点  $D$  的坐标，如果不存在，说明理由。





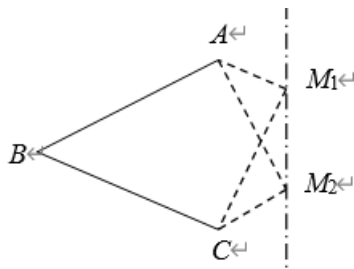
## 第 20 讲二次函数中梯形的存在性问题（核心考点讲与练）

### 【基础知识】

#### 类型一：一般梯形

##### 1. 知识内容：

梯形的限制较少，所以可能出现的情况就会有很多，在处理时需要想清所有可能情况，再进行讨论处理。有一种比较常见的情况是：若已知三点  $ABC$ ，另一点  $M$  在某固定直线上，形成的四边形  $ABCM$  为梯形，则会有两种情况：①  $AM \parallel BC$ ；②  $CM \parallel AB$ ，如图所示。



##### 2. 解题思路：

- (1) 根据题目条件，求出已知 3 个点的坐标；
- (2) 分情况进行讨论；
- (3) 对可能的各种情况，求出已知边所在直线的方程；
- (4) 根据直线方程，求得与其平行的直线的方程，再解出待求点的坐标；
- (5) 根据题目实际情况，验证所有可能点是否满足要求并作答。

注：若两条直线平行，则这两条直线的斜率相等。

#### 类型二：特殊梯形

##### 1. 知识内容：

特殊梯形主要分成等腰梯形和直角梯形两种。对于这两种情况，只需在之前平行的基础上，增加考虑直角或腰相等的条件。

##### 2. 解题思路：

直角梯形：

- (6) 根据题目条件，求出已知 3 个点的坐标；
- (7) 寻找已有的直角，进而判断可能的平行直线；
- (8) 对可能的各种情况，求出已知边所在直线的方程；
- (9) 根据直线方程，求得与其平行的直线的方程，再解出待求点的坐标；
- (10) 根据题目实际情况，验证所有可能点是否满足要求并作答。

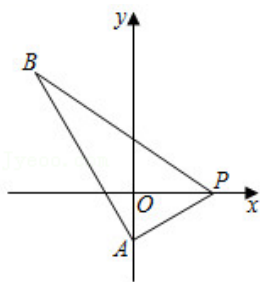
等腰梯形：

- (6) 根据题目条件，求出已知 3 个点的坐标；
- (7) 分情况讨论；
- (8) 对可能的各种情况，求出已知边所在直线的方程；
- (9) 根据直线方程，求得与其平行的直线的方程，再解出待求点的坐标；
- (10) 验证所有形成的梯形是否等腰，并作答。

## 【考点剖析】

1. (2021•浦东新区模拟) 已知抛物线  $y=ax^2+bx-2$  与  $y$  轴相交于点  $A$ ，顶点  $B$  在第二象限内， $AP \perp AB$ ，交  $x$  轴于点  $P$ ， $\tan \angle APB=2$ ，点  $P$  的横坐标为  $m$ 。

- (1) 求点  $B$  的坐标 (用含  $m$  的代数式表示)；
- (2) 当  $m=2$  时，求抛物线的表达式；
- (3) 如果抛物线的对称轴与  $x$  轴相交于点  $C$ ，且四边形  $ACBP$  是梯形，求  $m$  的值。

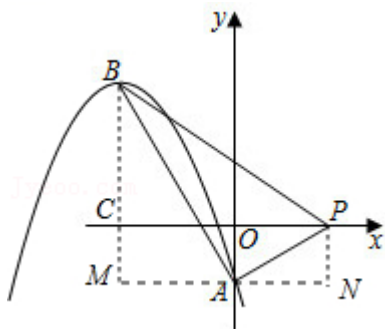


【分析】(1) 证明  $\text{Rt} \triangle BMA \sim \text{Rt} \triangle ANP$ ，则两个三角形相似比为 2，进而求解；

(2) 用待定系数法即可求解；

(3) 四边形  $ACBP$  是梯形，故直线  $AC \parallel BP$ ，故设直线  $BP$  的表达式为  $y = -\frac{1}{2}x + p$ ，再用待定系数法即可求解。

【解答】解：(1) 如图，过点  $A$  作  $x$  轴的平行线交过点  $B$  与  $y$  轴的平行线于点  $M$ ，交过点  $P$  与  $y$  轴的平行线于点  $N$ ，



$$\because \angle BAM + \angle PAN = 90^\circ, \quad \angle PAN + \angle APN = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BAM = \angle APN,$$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。  
如要下载或阅读全文，请访问：

<https://d.book118.com/618040057061006075>