专题 15 排列组合

易错点一：相邻与不相邻问题处理方法不当致误（相邻问题）

解题模板

<u>**相邻问题**</u>

技巧总结

相邻问题

1、思路：对于相邻问题，一般采用"捆绑法"解决，即将相邻的元素看做是一个整体，在于其他元素放在一起考虑.如果设计到顺序，则还应考虑相邻元素的顺序问题，再与其他元素放在一起进行计算.

2、解题步骤：

第一步：把相邻元素看作一个整体（捆绑法），求出排列种数

第二步：求出其余元素的排列种数

第三步：求出总的排列种数

易错提醒：排列组合实际问题主要有相邻问题和不相邻问题。(1）相邻问题捆绑法（把相邻的若干个特殊元素"捆绑"为一个大元素，然后再与其余"普通元素"全排列，最后再"松绑"，将特殊元素在这些位置上全排列)；

（2）不相邻（相间）问题插空法（某些元素不能相邻或某些元素要在某特殊位置时可采用插空法，即先安排好没有限制条件的元素，然后再把有限制条件的元素按要求插入排好的元素之间)；

举一反三

例、现有 8 个人排成一排照相，其中甲、乙、丙 3 人不能相邻的排法有（　　）

A．$A_6^3 \cdot A_5^5$种　　B．$\left(A_8^8 - A_6^6 \cdot A_3^3\right)$种

C．$A_5^3 \cdot A_3^3$种　　D．$\left(A_8^8 - A_6^4\right)$种

变式 1：加工某种产品需要 5 道工序，分别为 A，B，C，D，E，其中工序 A，B 必须相邻，工序 C，D 不能相邻，那么有（　　）种加工方法.

A．24　　B．32　　C．48　　D．64

变式 2：中国航天工业迅速发展，取得了辉煌的成就，使我国跻身世界航天大国的行列. 中国的目标是到 2030 年成为主要的太空大国.它通过访问月球，发射火星探测器以及建造自己的空间站，扩大了太空计划.在航天员进行的一项太空实验中，要先后实施 6 个程序，其中程序 A 只能出现在第一步或最后一步，程序 B 和 C 实施时必须相邻，请问实验顺序的编排方法共有（　　）

A．24 种　　B．48 种　　C．96 种　　D．144 种

变式 3：为推动党史学习教育各项工作扎实开展，营造"学党史、悟思想、办实事、开新局"的浓厚氛围，某校党委计划将中心组学习、专题报告会、党员活动日、主题班会、主题团日这五种活动分 5 个阶段安排，以推动党史学习教育工作的进行，若主题班会、主题团日这两个阶段相邻，且中心组学习必须安排在前两阶段并与党员活动日不相邻，则不同的安排方案共有（　　）

A．10 种　　B．12 种　　C．16 种　　D．24 种

易错题通关

1．2023 年杭州亚运会期间，甲、乙、丙 3 名运动员与 5 名志愿者站成一排拍照留念，若甲与乙相邻、丙不排在两端，则不同的排法种数有（　）

A．1120　　B．7200　　C．8640　　D．14400

2．六名同学暑期相约去都江堰采风观景，结束后六名同学排成一排照相留念，若甲与乙相邻，丙与丁不相邻，则不同的排法共有（　）

A．48 种　　B．72 种　　C．120 种　　D．144 种

3．把二项式$\left(\sqrt{x}+\frac{1}{x}\right)^8$的所有展开项重新排列，记有理项都相邻的概率为$p$，有理项两两不相邻的概率为$q$，则$\frac{p}{q}=$（　）

A．5　　B．$\frac{1}{5}$　　C．4　　D．$\frac{1}{4}$

4．A，B，C，D，E，F 六人站成一排，满足 A，B 相邻，C，D 不相邻的不同站法的种数为（　）

A．48　　B．96　　C．144　　D．288

5．2023 年 5 月 21 日，中国羽毛球队在 2023 年苏迪曼杯世界羽毛球混合团体锦标赛决赛中以总比分 $3:0$ 战胜韩国队，实现苏迪曼杯三连冠．甲、乙、丙、丁、戊五名球迷赛后在现场合影留念，其中甲、乙均不能站左端，且甲、丙必须相邻，则不同的站法共有（　）

A．18 种　　B．24 种　　C．30 种　　D．36 种

6．为配合垃圾分类在学校的全面展开，某学校举办了一次垃圾分类知识比赛活动.高一、高二、高三年级分别有 1 名、2 名、3 名同学获一等奖.若将上述获一等奖的 6 名同学排成一排合影，要求同年级同学排在一起，则不同的排法共有（　）

A．18 种　　B．36 种　　C．72 种　　D．144 种

7．甲、乙两个家庭周末到附近景区游玩，其中甲家庭有 2 个大人和 2 个小孩，乙家庭有 2 个大人和 3 个小孩，他们 9 人在景区门口站成一排照相，要求每个家庭的成员要站在一起，且同一家庭的大人不能相邻，则所有不同站法的种数为（　）

A．144　　B．864　　C．1728　　D．2880

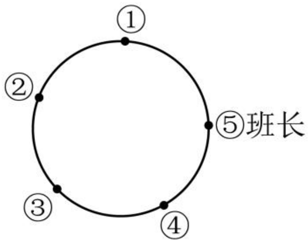
8．某驾校 6 名学员站成一排拍照留念，要求学员 A 和 B 不相邻，则不同的排法共有（　）

A．120 种　　B．240 种　　C．360 种　　D．480 种

9．某高铁动车检修基地库房内有 $A\sim E$ 共 5 条并行的停车轨道线，每条轨道线只能停一列车，现有动车 $01,02$ 、高铁 $01,02,03$ 共五列车入库检修，若已知两列动车安排在相邻轨道，则动车 01 停放在 A 道的概率为（　）

A．$\frac{1}{4}$　　B．$\frac{1}{5}$　　C．$\frac{1}{8}$　　D．$\frac{1}{10}$

10．班长邀请 A,B,C,D 四位同学参加圆桌会议．如图，班长坐在⑤号座位，四位同学随机坐在①②③④四个座位，则 A,B 两位同学座位相邻的概率是（　　）



A．$\frac{1}{2}$　　　　B．$\frac{1}{3}$

C．$\frac{1}{4}$　　　　D．$\frac{2}{3}$

11．将 3 名男生，2 名女生排成一排，要求男生甲必须站在中间，2 名女生必须相邻的排法种数有（　）

A．4 种　　B．8 种　　C．12 种　　D．48 种

12．5 名同学排成一排，其中甲、乙、丙三人必须排在一起的不同排法有（　）

A．70 种　　B．72 种　　C．36 种　　D．12 种

13．现有 2 名男生和 3 名女生，在下列不同条件下进行排列，则（　）

A．排成前后两排，前排 3 人后排 2 人的排法共有 120 种

B．全体排成一排，女生必须站在一起的排法共有 36 种

C．全体排成一排，男生互不相邻的排法共有 72 种

D．全体排成一排，甲不站排头，乙不站排尾的排法共有 72 种

14．甲、乙、丙、丁、戊五人并排站成一排，下列说法正确的是（　）

A．若甲、乙、丙按从左到右的顺序排列，则不同的排法有 12 种

B．若甲、乙不相邻，则不同的排法有 72 种

C．若甲不能在最左端，且乙不能在最右端，则不同的排法共有 72 种

D．如果甲、乙必须相邻且乙在甲的右边，则不同的排法有 24 种

15．甲乙丙等 5 人的身高互不相同，站成一排进行列队训练，则（　）

A．甲乙不相邻的不同排法有 48 种

B．甲乙中间恰排一个人的不同排法有 36 种

C．甲乙不排在两端的不同排法有 36 种

D．甲乙丙三人从左到右由高到矮的不同排法有 20 种

16．某学校举行校园歌手大赛，共有 4 名男生，3 名女生参加，组委会对他们的出场顺序进行安排，则下列说法正确的是（　）

A．若 3 个女生不相邻，则有 144 种不同的出场顺序

B．若女生甲在女生乙的前面，则有 2520 种不同的出场顺序

C．若 4 位男生相邻，则有 576 种不同的出场顺序

D．若学生的节目顺序已确定，再增加两个教师节目，共有 72 种不同的出场顺序

17．某校高二年级安排甲、乙、丙三名同学到 A，B，C，D，E 五个社区进行暑期社会实践活

动，每名同学只能选择一个社区进行实践活动，且多名同学可以选择同一个社区进行实践活动，则下列说法正确的有（　　）

A．如果社区 A 必须有同学选择，则不同的安排方法有 61 种

B．如果同学甲必须选择社区 A，则不同的安排方法有 50 种

C．如果三名同学选择的社区各不相同，则不同的安排方法共有 60 种

D．如果甲、乙两名同学必须在同一个社区，则不同的安排方法共有 20 种

18．在树人中学举行的演讲比赛中，有 3 名男生，2 名女生获得一等奖.现将获得一等奖的学生排成一排合影，则（　　）

A．3 名男生排在一起，有 6 种不同排法 B．2 名女生排在一起，有 48 种不同排法

C．3 名男生均不相邻，有 12 种不同排法D．女生不站在两端，有 108 种不同排法

19．甲，乙，丙，丁，戊五人并排站成一排，下列说法正确的是（　　）

A．如果甲，乙必须相邻且乙在甲的右边，那么不同的排法有 24 种

B．最左端只能排甲或乙，最右端不能排甲，则不同的排法共有 42 种

C．甲乙不相邻的排法种数为 72 种

D．甲乙丙按从左到右的顺序排列的排法有 40 种

20．(多选)把 5 件不同产品 A，B，C，D，E 摆成一排，则（　　）

A．A 与 B 相邻有 48 种摆法

B．A 与 C 相邻有 48 种摆法

C．A，B 相邻又 A，C 相邻，有 12 种摆法

D．A 与 B 相邻，且 A 与 C 不相邻有 24 种摆法

21．甲、乙、丙、丁四名同学和一名老师站成一排合影留念．要求老师必须站在正中间，且甲同学不与老师相邻，则不同的站法种数为（　　）

A．$A_5^5-A_4^4$　　B．$A_4^4-C_2^1A_3^3$　　C．$C_1^1C_2^1A_3^3$　　D．$\frac{1}{2}A_4^4$

易错点二：“捆绑法”中忽略了“内部排列”或“整体列”（不相邻问题）

解题模板

<u>不相邻问题</u>

技巧总结

1. 思路：对于不相邻问题一般采用“插空法”解决，即先将无要求的元素进行全排列，然后将要求不相邻的元素插入到已排列的元素之间，最后进行计算即可

2. 解题步骤：

①先考虑不受限制的元素的排列种数

②再将不相邻的元素插入到已排列元素的空当种（插空法），求出排列种数

③求出总的排列种数

易错提醒：处理相邻问题的基本方法是“捆绑法”，即把相邻的若干个特殊元素“捆绑”为一个元素，然后与其余元素全排列，最后“松绑”，将特殊元素在这些位置上全排列．处理不相邻问题的基本方法是“插空法”，即先安排好没有限制条件的元素，然后把有限制条件的元素按要求插入到排好的元素之间．但应该注意插入的元素之间如果也有顺序，应先进行排列．

举一反三

例、有 3 名男生，4 名女生，在下列不同条件下，求不同的排列方法的总数．

（1）全体排成一行，其中男、女生各站在一起；

（2）全体排成一行，其中男生必须排在一起．

变式 1：为推动党史学习教育各项工作扎实开展，营造“学党史、悟思想、办实事、开新局”的浓厚氛围，某校党委计划将中心组学习、专题报告会、党员活动日、主题班会、主题团日这五种活动分 5 个阶段安排，以推动党史学习教育工作的进行，若主题班会、主题团日这两个阶段相邻，且中心组学习必须安排在前两阶段并与党员活动日不相邻，则不同的安排方案共有（　　）

A．10 种　　　　B．12 种　　　　C．16 种　　　　D．24 种

变式 2：甲，乙、丙、丁、戊共 5 人随机地排成一行，则甲、乙相邻，丙、丁不相邻的概率为（　　）

A．$\frac{1}{5}$　　　　B．$\frac{1}{4}$　　　　C．$\frac{1}{3}$　　　　D．$\frac{5}{12}$

变式 3：某地元旦汇演有 2 男 3 女共 5 名主持人站成一排，则舞台站位时男女间隔的不同排法共有（　　）

A．12 种　　　　B．24 种　　　　C．72 种　　　　D．120 种

易错题通关

1．4 名男生和 3 名女生排队（排成一排）照相，下列说法正确的是（　）

A．若女生必须站在一起，那么一共有 $A_3^3A_5^5$ 种排法

B．若女生互不相邻，那么一共有 $A_3^3A_4^4$ 种排法

C．若甲不站最中间，那么一共有 $C_6^1A_6^6$ 种排法

D．若甲不站最左边，乙不站最右边，那么一共有 $A_7^7-2A_6^6$ 种排法

2．某校文艺汇演共 6 个节目，其中歌唱类节目 3 个，舞蹈类节目 2 个，语言类节目 1 个，则下列说法正确的是（　）

A．若以歌唱类节目开场，则有 360 种不同的出场顺序

B．若舞蹈类节目相邻，则有 120 种出场顺序

C．若舞蹈类节目不相邻，则有 240 种不同的出场顺序

D．从中挑选 2 个不同类型的节目参加市艺术节，则有 11 种不同的选法

3．现将 8 把椅子排成一排，4 位同学随机就座，则下列说法中正确的是（　）

A．4 个空位全都相邻的坐法有 120 种

B．4 个空位中只有 3 个相邻的坐法有 240 种

C．4 个空位均不相邻的坐法有 120 种

D．4 个空位中至多有 2 个相邻的坐法有 900 种

4．有甲、乙、丙、丁、戊五位同学，下列说法正确的是（　）.

A．若五位同学排队要求甲、乙必须相邻且丙、丁不能相邻，则不同的排法有 12 种

B．若五位同学排队最左端只能排甲或乙，最右端不能排甲，则不同的排法共有 42 种

C．若甲、乙、丙三位同学按从左到右的顺序排队，则不同的排法有 20 种

D．若甲、乙、丙、丁四位同学被分配到三个社区参加志愿活动，每个社区至少一位同学，则不同的分配方案有 36 种

5．现将 9 把椅子排成一排，5 位同学随机就座，则下列说法中正确的是（　）

A．4 个空位全都相邻的坐法有 720 种

B．4 个空位中只有 3 个相邻的坐法有 1800 种

C．4 个空位均不相邻的坐法有 1800 种

D．4 个空位中至多有 2 个相邻的坐法有 9000 种

6．现有 3 位歌手和 4 名粉丝站成一排，要求任意两位歌手都不相邻，则不同的排法种数可以表示为（　）

A．$A_7^7-A_3^3A_5^1A_4^4-A_5^2A_4^4$　　　　B．$A_4^4A_3^3$

C．$A_7^7-A_3^3A_5^1A_4^4-C_3^2A_2^2A_5^2A_4^4$　　　　D．$A_4^4A_5^3$

7．为弘扬我国古代的“六艺文化”，某夏令营主办单位计划利用暑期开设“礼”、“乐”、“射”、“御”、“书”、“数”六门体验课程，每周一门，连续开设六周，则下列说法正确的是（　）

A．某学生从中选 2 门课程学习，共有 15 种选法

B．课程“乐”“射”排在不相邻的两周，共有 240 种排法

C．课程“御”“书”“数”排在相邻的三周，共有 144 种排法

D．课程“礼”不排在第一周，也不排在最后一周，共有 480 种排法

8．有甲、乙、丙等 6 名同学，则说法正确的是（　）

A．6 人站成一排，甲、乙两人不相邻，则不同的排法种数为 480

B．6 人站成一排，甲、乙、丙按从左到右的顺序站位，则不同的站法种数为 240

C．6 名同学平均分成三组到 A、B、C 工厂参观（每个工厂都有人），则有 90 种不同的安排方法

D．6 名同学分成三组参加不同的活动，甲、乙、丙在一起，则不同的分组方法有 6 种

9．有甲、乙、丙、丁、戊五位同学，下列说法正确的是（　）

A．若五位同学排队要求甲、乙必须相邻且丙、丁不能相邻，则不同的排法有 12 种

B．若五位同学排队最左端只能排甲或乙，最右端不能排甲，则不同的排法共有 42 种

C．若甲乙丙三位同学按从左到右的顺序排队，则不同的排法有 20 种

D．若甲、乙、丙、丁四位同学被分配到三个社区参加志愿活动，每个社区至少一位同学，则不同的分配方案有 72 种

10．4 名男生和 3 名女生排成一排照相，要求男生和男生互不相邻，女生与女生也互不相邻，则不同的排法种数是（　）

A．36　　B．72　　C．81　　D．144

11．杭州第 19 届亚运会火炬 9 月 14 日在浙江台州传递，火炬传递路线以“和合台州活力城市”为主题，全长 8 公里．从和合公园出发，途经台州市图书馆、文化馆、体育中心等地标建筑．假设某段线路由甲、乙等 6 人传递，每人传递一棒，且甲不从乙手中接棒，乙不从甲手中接棒，则不同的传递方案共有（　）

A．288 种　　B．360 种　　C．480 种　　D．504 种

12．A，B，C，D，E 五名学生按任意次序站成一排，其中 A 和 B 不相邻，则不同的排法

种数为（　）

A．72　　B．36　　C．18　　D．64

13．某选拔性考试需要考查 4 个学科（语文、数学、物理、政治），则这 4 个学科不同的考试顺序中物理考试与数学考试不相邻的概率为（　）

A．$\frac{2}{3}$　　B．$\frac{1}{2}$　　C．$\frac{1}{3}$　　D．$\frac{1}{4}$

14．现有 4 男 3 女共 7 个人排成一排照相，其中三个女生不全相邻的排法种数为（　）

A．$A_5^3A_5^5$　　B．$A_7^7-A_5^5A_3^3$　　C．$A_4^4A_5^3$　　D．$A_7^7-A_5^3$

15．黄金分割最早见于古希腊和古埃及.黄金分割又称黄金率、中外比，即把一条线段分成长短不等的a，b两段，使得长线段a与原线段$a+b$的比等于短线段b与长线段a的比，即$a:(a+b)=b:a$，其比值约为 0.618339….小王酷爱数学，他选了其中的 6，1，8，3，3，9 这六个数字组成了手机开机密码，如果两个 3 不相邻，则小王可以设置的不同密码个数为(　)

A．180　　B．210　　C．240　　D．360

易错点三：忽视排列数、组合数公式的隐含条件（排列组合综合）

解题模板

1．两个重要公式

(1)排列数公式

$$A_n^m=\frac{n!}{(n-m)!}=n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-m+1)\left(n,m\in N^*,\text{且}m\le n\right).$$

(2)组合数公式

$$C_n^m=\frac{n!}{m!(n-m)!}=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-m+1)}{m!}\left(n,m\in N^*,\text{且}m\le n\right)$$

2、要点：$C_n^m=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-m+1)}{m!}$一般用于计算，而$C_n^m=\frac{n!}{m!(n-m)!}$和$C_n^m=\frac{A_n^m}{A_m^m}$一般用于证明、解方程（不等式）.

重点：三个重要性质和定理

组合数性质

（1）对称性： $C_n^m=\dfrac{A_n^m}{A_m^m}=C_n^{n-m}\left(n,m\in N^*,且m\le n\right)$；

组合意义：从n个不同的元素中任取m个元素，则C_n^m.

从n个不同的元素中任取m个元素后只剩下$n-m$个元素了，则从n个不同的元素中任取m个元素与从n个不同的元素中任取$n-m$个元素是等效的.则C_n^{n-m}，故$C_n^m=C_n^{n-m}$.

等式特点：等号两边组合数的下标相同，上标之和等于下标.

应用：①简化计算，当$m>\dfrac{n}{2}$时，通常将计算C_n^m转化为计算C_n^{n-m}，如

$C_8^5=C_8^3=\dfrac{8\times7\times6}{3\times2\times1}=56$

②列等式：由$C_n^x=C_n^y$，可得$x=y$或$x+y=n$，如$C_8^3=C_8^x$，则$3=x$或$3+x=8$故$x=3$或$x=5$.

（2） $C_{n+1}^m=C_n^m+C_n^{m-1}\left(n,m\in N^*,且m\le n\right)$；

组合意义：从$(n+1)$个不同的元素中任取m个元素，则C_{n+1}^m.

对于某一元素，只存在着取与不取两种可能，如果取这一元素，则需从剩下的n个元素中任取$(m-1)$个元素，所以共有C_n^{m-1}种，如果不取这一元素，则需从剩下的n个元素中任取m个元素，所以共有C_n^m，根据分类加法原理：$C_{n+1}^m=C_n^m+C_n^{m-1}$.

等式特点：下标相同而上标相差1的两个组合数之和，等于下标比原下标多1而上标与较大的相同的一个组合数.

应用：恒等变形

常见的组合恒等式： $C_n^m=\dfrac{n-m+1}{m}C_n^{m-1}$，$C_n^m=\dfrac{n}{n-m}C_{n-1}^m$，$C_n^m=\dfrac{n}{m}C_{n-1}^{m-1}$

$C_r^r+C_{r+1}^r+C_{r+2}^r+\cdots+C_n^r=C_{n+1}^{r+1}$，$C_m^rC_n^0+C_m^{r-1}C_n^1+C_m^{r-2}C_n^2+\cdots+C_m^0C_n^r=C_{m+n}^r$.

（3） $C_n^0=1$.

重点：三个重要性质和定理

组合数性质

（1）**对称性：**$C_n^m=\frac{A_n^m}{A_m^m}=C_n^{n-m}\left(n,m\in N^*,且m\le n\right)$；

组合意义：从n个不同的元素中任取m个元素，则C_n^m.

从n个不同的元素中任取m个元素后只剩下$n-m$个元素了，则从n个不同的元素中任取m个元素与从n个不同的元素中任取$n-m$个元素是等效的.则C_n^{n-m}，故$C_n^m=C_n^{n-m}$.

等式特点：等号两边组合数的下标相同，上标之和等于下标.

应用：①简化计算，当$m>\frac{n}{2}$时，通常将计算C_n^m转化为计算C_n^{n-m}，如

$C_8^5=C_8^3=\frac{8\times7\times6}{3\times2\times1}=56$

②列等式：由$C_n^x=C_n^y$，可得$x=y$或$x+y=n$，如$C_8^3=C_8^x$，则$3=x$或$3+x=8$故$x=3$或$x=5$.

（3）$C_{n+1}^m=C_n^m+C_n^{m-1}\left(n,m\in N^*,且m\le n\right)$；

组合意义：从$(n+1)$个不同的元素中任取m个元素，则C_{n+1}^m.

对于某一元素，只存在着取与不取两种可能，如果取这一元素，则需从剩下的n个元素中任取$(m-1)$个元素，所以共有C_n^{m-1}种，如果不取这一元素，则需从剩下的n个元素中任取m个元素，所以共有C_n^m，根据分类加法原理：$C_{n+1}^m=C_n^m+C_n^{m-1}$.

等式特点：下标相同而上标相差1的两个组合数之和，等于下标比原下标多1而上标与较大的相同的一个组合数.

应用：恒等变形

常见的组合恒等式：$C_n^m=\frac{n-m+1}{m}C_n^{m-1}$，$C_n^m=\frac{n}{n-m}C_{n-1}^m$，$C_n^m=\frac{n}{m}C_{n-1}^{m-1}$

$C_r^r+C_{r+1}^r+C_{r+2}^r+\cdots+C_n^r=C_{n+1}^{r+1}$，$C_m^rC_n^0+C_m^{r-1}C_n^1+C_m^{r-2}C_n^2+\cdots+C_m^0C_n^r=C_{m+n}^r$.

（3）$C_n^0=1$.

易错提醒：解排列、组合的综合问题要注意以下几点

（1）元素是否有序是区分排列与组合的基本方法，无序的问题是组合问题，有序的问题是

排列问题．

（2）对于有限多个限制条件的复杂问题，应认真分析每个限制条件，然后再考虑是分类还是分步，这是处理排列、组合的综合问题的一般方法．

举一反三

例、解不等式 $A_8^x<6A_8^{x-2}$．

变式1． 若 $C_n^3=C_n^7$，则 n 的值为（　　）

A．7　　B．8　　C．9　　D．10

变式2． 计算 $C_4^3+C_5^3+C_6^3+\cdots+C_{2015}^3$ 的值为（　　）

A．C_{2015}^4　　B．C_{2015}^3

C．C_{2016}^4-1　　D．C_{2015}^5-1

变式3． 若整数 x 满足 $C_{16}^{x^2+3x+2}=C_{16}^{5x+5}$，则 x 的值为（　　）

A．1　　B．-1　　C．1 或 -1　　D．1 或 3

易错题通关

1．$(x-2)(x-3)(x-4)\cdots(x-15)\left(x\in N_+,x>15\right)$ 可表示为（　　）

A．A_{x-2}^{13}　　B．A_{x-2}^{14}

C．A_{x-15}^{13}　　D．A_{x-15}^{14}

2．已知 $A_n^2=C_n^{n-3}$，则 $n=$（　）

A．6　　B．7　　C．8　　D．9

3．$1\cdot1!+2\cdot2!+3\cdot3!+\cdots+672\cdot672!$ 除以 2019 的余数为（　）

A．1　　B．2018　　C．2017　　D．前三个答案都不对

4．甲，乙，丙 3 位同学从即将开设的 4 门校本课程中任选一门参加，则他们参加的校本课程各不相同的概率为（　）

A．$\frac{3}{8}$　　B．$\frac{3}{4}$　　C．$\frac{8}{27}$　　D．$\frac{8}{9}$

5．若 $\mathrm{A}_{n}^{3}=12\mathrm{C}_{n}^{2}$，则 n 等（　）

A．8　　B．4　　C．3 或 4　　D．5 或 6

6．若 $3\mathrm{C}_{2n}^{3}=5\mathrm{A}_{n}^{3}$，则正整数 $n=$（　）

A．7　　B．8　　C．9　　D．10

7．一条铁路有 n 个车站，为适应客运需要，新增了 m 个车站，且知 $m>1$，客运车票增加了 62 种，则现在车站的个数为（　）

A．15　　B．16　　C．17　　D．18

8．不等式 $A_{8}^{x}<6\times A_{8}^{x-2}$ 的解集为（　）

A．{2，8}　　B．{2，6}

C．{7，12}　　D．{8}

9．若 $24\mathrm{C}_{n}^{m}=\mathrm{P}_{n}^{m}$，则 $m=$______.

10．已知 $\mathrm{A}_{n}^{n}+\mathrm{A}_{n-1}^{n-1}=x\mathrm{A}_{n+1}^{n+1}\left(n\in\mathrm{N}_{+},n\geq 2\right)$，求 x 的值.

11．解关于正整数 x 的不等式 $\mathrm{P}_{8}^{x}<6\mathrm{P}_{8}^{x-2}$.

12．解关于正整数 n 的方程：$\mathrm{A}_{2n+1}^{4}=140\mathrm{A}_{n}^{3}$.

13．已知 $\mathrm{A}_{n}^{5}=56\mathrm{C}_{n}^{7}$，且 $\left(1-2x\right)^{n}=a_{0}+a_{1}x+a_{2}x^{2}+\cdots+a_{n}x^{n}$.求 $a_{1}+2a_{2}+3a_{3}+\cdots+na_{n}$ 的值.

14．（1）解不等式 $\mathrm{A}_{6}^{x}<4\mathrm{A}_{6}^{x-2}$.

（2）若 $\mathrm{C}_{3}^{2}+\mathrm{C}_{4}^{2}+\mathrm{C}_{5}^{2}+\cdots+\mathrm{C}_{n}^{2}=55$，求正整数 n.

15．（1）若 $3\mathrm{A}_{x}^{3}=2\mathrm{A}_{x+1}^{2}+6\mathrm{A}_{x}^{2}$，则 x=______.

（2）不等式 $\mathrm{C}_{n}^{4}>\mathrm{C}_{n}^{6}$ 的解集为______.

易错点四：实际问题不清楚导致计算重复或者遗漏致误（加法与乘法原理）

解题模板

正难则反问题

技巧总结

正难则反排除处理：对于正面不好解决的排列、组合问题，考虑反面(取补集的思想)，一般在题目中有字眼“至多、至少”等体现。

正规方法：限制（定位）问题优先处理：某个（几个）元素要排在指定位置，可先排这个（几个）元素，再排其它元素，或某个（几个）位置要求排指定元素，可先排这个（几个）位置，再排其它位置。(即可从限制元素或限制位置两方面去考虑。)。

秒杀方法：对立事件处理+韦恩图解释

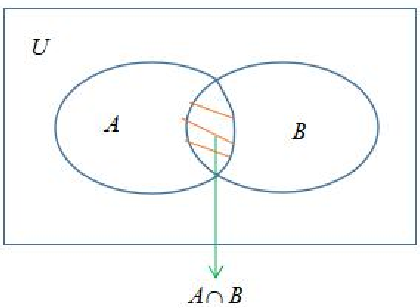
模型：7个同学站队，要求甲同学不站在排首，乙同学不站在排尾，求站队的总方案数.

破解：①全部方案： $A_7^7,\begin{cases}\text{包含合理的方案}\\\text{包含不合理的方案}\end{cases}$

②其中不合理的方案 $\begin{cases}1\text{、甲站在排首的情况：}A_6^6\left(\text{含乙站在排尾的情况}\right)\\2\text{、乙站在排尾的情况：}A_6^6\left(\text{含甲站在排首的情况}\right)\\3\text{、甲站在排首、乙站在排尾的情况：}A_5^5\end{cases}$

则 $A_7^7-A_6^6-A_6^6+A_5^5=3720$ **种方案.**

解释：



易错提醒：排列、组合问题由于其思想方法独特，计算量庞大，对结果的检验困难，所以我们在解决这类问题时就要遵循一定的解题原则，如特殊元素原则、位置优先原则、先取后排原则、先分组后分配原则、正难则反原则等，只有这样我们才能有明确的解题方向．同时，解答组合问题必须心思细腻，考虑周全，这样才能做到不重不漏，正确解题．

举一反三

例、有 20 个零件，其中 16 个一等品，4 个二等品，若从这 20 个零件中任意取 3 个，那么

至少有 1 个一等品的不同取法有多少种？

变式 1: 四面体的顶点和各棱中点共 10 个点，在其中取 4 个不共面点，不同取法有________种。

变式 2： 从 5 名男医生、4 名女医生中选 3 名医生组成一个医疗小分队，要求其中男、女医生都有，则不同的组队方案共有 （　　）

A. 70 种　　B. 80 种　　C. 100 种　　D. 140 种

变式 3： 定义“规范 01 数列” $\{a_n\}$ 如下：$\{a_n\}$ 共有 $2m$ 项，其中 m 项为 0，m 项为 1, 且对任意 $k\le 2m$，$a_1,a_2,\cdots,a_k$ 中 0 的个数不少于 1 的个数。若 $m=4$，则不同的“规范 01 数列”共有（　　）

A. 18 个　　B. 16　　C. 14 个　　D. 12 个

易错题通关

1．高考期间，为保证考生能够顺利进入考点，交管部门将 5 名交警分配到该考点周边三个不同路口疏导交通，每个路口至少 1 人，至多 2 人，则不同的分配方染共有（　）

A．60 种　　B．90 种　　C．125 种　　D．150 种

2．某日，甲、乙、丙三个单位被系统随机预约到 A，B，C 三家医院接种疫苗，每家医院每日至多接待两个单位.已知 A 医院接种的是只需要打一针的腺病毒载体疫苗，B 医院接种的是需要打两针的灭活疫苗，C 医院接种的是需要打三针的重组蛋白疫苗，则甲单位不接种需要打三针的重组蛋白疫苗的概率为（　）

A．$\frac{1}{3}$　　B．$\frac{2}{3}$　　C．$\frac{2}{5}$　　D．$\frac{3}{5}$

3．将 3 张不同的电影票全部分给 10 个人，每人至多一张，则不同的分法种数是（　）

A．1260　　B．120　　C．240　　D．720

4．用数字 3，6，9 组成四位数，各数位上的数字允许重复，且数字 3 至多出现一次，则可以组成的四位数的个数为（　）

A．81　　B．48　　C．36　　D．24

5．从 4 名优秀学生中选拔参加池州一中数学、物理、化学三学科培优研讨会，要求每名学生至多被一学科选中，则每学科至少要选用一名学生的情况有（　）种

A．24　　B．36　　C．48　　D．60

6．将 5 个不同的小球放入 3 个不同的盒子，每个盒子至少 1 个球，至多 2 个球，则不同的放法种数有（　）

A．30 种　　B．90 种　　C．180 种　　D．270 种

7．哈六中高一学习雷锋志愿小组共有16人，其中一班、二班、三班、四班各4人，现在从中任选3人，要求这三人不能是同一个班级的学生，且在三班至多选1人，不同的选取法的种数为

A．484　　B．472　　C．252　　D．232

8．下列说法正确的是（　）

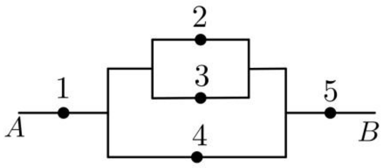
A．4 名同学选报跑步、跳高、跳远三个项目，每人报一项，共有 81 种报名方法

B．4 名同学选报跑步、跳高、跳远三个项目，每项限报一人，且每人至多报一项，共有 24 种报名方法

C．4 名同学争夺跑步、跳高、跳远三项冠军，共有 64 种可能的结果

D．从 0，2 中选一个数字，从 1，3，5 中选两个数字，组成无重复数字的三位数，其中奇数的个数为 12 个

9．如图，线路从A 到B之间有五个连接点，若连接点断开，可能导致线路不通，现发现AB之间线路不通，则下列判断正确的是（　）



A．至多三个断点的有19种　　B．至多三个断点的有22种

C．共有25种　　D．共有28种

10．某班有 5 名同学报名参加校运会的四个比赛项目，计算在下列情况下各有多少种不同的报名方法.

（1）每人恰好参加一项，每项人数不限；

（2）每项限报一人，每项都有人报名，且每人至多参加一项；

（3）每人限报一项，人人参加了项目，且每个项目均有人参加.

11．已知 8 件不同的产品中有 3 件次品，现对它们一一进行测试，直至找到所有次品．

（1）若在第 5 次测试时找到最后一件次品，则共有多少种不同的测试方法？

（2）若至多测试 5 次就能找到所有次品，则共有多少种不同的测试方法？

12．杭州亚运会启动志愿者招募工作，甲、乙等 6 人报名参加了 A、B、C 三个项目的志愿者工作，因工作需要，每个项目仅需 1 名志愿者，每人至多参加一个项目，若甲不能参加 A、B 项目，乙不能参加 B、C 项目，那么共有__________种不同的选拔志愿者的方案.（用数字作答）

13．某校在高二年级开设选修课，其中数学选修课开四个班.选课结束后，有四名同学要求改修数学，但每班至多可再接收 2 名同学，那么不同的分配方案有______（用数字作答）

14．某单位有 A、B、C、D 四个科室，为实现减负增效，每科室抽调 2 人，去参加再就业培训，培训后这 8 人中有 2 人返回原单位，但不回到原科室工作，且每科室至多安排 1 人，问共有_____种不同的安排方法？

易错点五：均匀分组与不均匀分组混淆致误（相同元素与不同元素分配问题）

解题模板

<u>不同元素分组分配问题</u>

技巧总结

分组问题与分配问题

Ⅰ：将 n 个不同元素按照某些条件分成 k 组，称为分组问题.

分组问题共分为3类：不平均分组、平均分组、部分平均分组.

将 n 个不同元素按照某些条件分配给 k 个不同的对象，称为分配问题.

分配问题共分为2类：定额分配、随机分配.

区别：分组问题是组与组之间只要元素个数相同，是不区分的. 而分配问题即使两组元素个数相同，但因对象不同，仍然是可区分的，对于分配问题必须先分组后分配.

Ⅱ：分组问题的常见形式及快速处理方法

①非均匀不编号分组： n 个不同元素分成 m 组，每组元素数目均不相等，且不考虑各组间的顺序，不管是否分完，其分法种数为：

$$N=C_n^{m_1}\cdot C_{n-m_1}^{m_2}\cdot C_{n-(m_1+m_2)}^{m_3}\cdots\cdots C_{n-(m_1+m_2+\cdots\cdots m_{m-1})}^{m_m}$$

如：6个不同的球分为3组，且每组数目不同，有多少种情况？

$C_6^1 \cdot C_5^2 \cdot C_3^3 = 6\times 10\times 1 = 60$

②均匀不编号分组：将n个不同元素分成不编号的m组，假定其中r组元素个数相等，不管是否分尽，其分法种数为$\dfrac{N}{A_r^r}$（N为非均匀不编号分组的分法种数）.如果再有k组均匀分组，应再除以A_k^k.**除的原因为：**如：123456 平均分成 3 组，可能是$[1,2]$、$[3,4]$、$[5,6]$也可能是$[1,2]$、$[5,6]$、$[3,4]$或者是$[5,6]$、$[3,4]$、$[1,2]$等，一共有A_3^3种不同的组别，但这些组都是一样的，所以除以A_3^3.

如：A、B、C、D两两一组，分两组，若直接用$C_4^2 \cdot C_2^2 = 6$种，但列举出来的分别为$\{[A、B],[C、D]\}$、$\{[A、C],[B、D]\}$、$\{[A、D],[B、C]\}$再往下列举就已经重复了.

如：$\{[B、C],[A、D]\}$、$\{[B、D],[A、C]\}$、$\{[C、D],[A、B]\}$.

如：6个不同的球分为3组，且每组数目相同，有多少种情况？

$N = C_6^2 \cdot C_4^2 \cdot C_2^2 = 90$，种数$= \dfrac{N}{A_3^3} = \dfrac{90}{6} = 15$.

③非均匀编号分组：将n个不同元素分成m组，各组元素数目均不相等，且考虑各组间的顺序，其分法种数为$N \cdot A_m^m$（N为非均匀不编号分组的分法种数）

④均匀编号分组：将n个不同元素分成m组，各组元素数目均相等，且考虑各组间的顺序，其分法种数为$\dfrac{N \cdot A_m^m}{A_r^r}$（$N$为非均匀不编号分组的分法种数）.

易错提醒：均匀分组和部分均匀分组在计数过程中易出现重复现象，注意计算公式的应用.重复的次数是均匀分组的阶乘数，即若有 m 组元素个数相等，则分组时应除以$m!$.

举一反三

例、将 6 本不同的书分给甲、乙、丙、丁 4 个人，每人至少一本的不同分法共有______种.（用

数字作答）

变式 1：12 名同学分别到三个不同的路口进行车流量的调查，若每个路口 4 人，则不同的分配方案共有

(　　　)种。

A. $C_{12}^4C_8^4C_4^4$　　B. $3C_{12}^4C_8^4C_4^4$　　C. $C_{12}^4C_8^4A_3^3$　　D. $\frac{C_{12}^4C_8^4C_4^4}{A_3^3}$

变式 2：将 2 名教师，4 名学生分成 2 个小组，分别安排到甲、乙两地参加社会实践活动，每个小组由 1 名教师和 2 名学生组成，不同的安排方案共有 (　　　)

A.12 种　　B.10 种　　C.9 种　　D.8 种

变式 3：某校安排 5 个班到 4 个工厂进行社会实践，每个班去一个工厂，每个工厂至少安排一个班，不同的安排方法共有________种。(用数字作答）

易错题通关

1. 第 19 届亚运会将于 2023 年 9 月 23 日在杭州开幕，因工作需要，还需招募少量志愿者. 甲、乙等 4 人报名参加了“莲花”、“泳镜”、“玉琮”三个场馆的各一个项目的志愿者工作，每个项目仅需 1 名志愿者，每人至多参加一个项目．若甲不能参加“莲花”场馆的项目，则不同的选择方案共有（　）

A．6 种　　B．12 种　　C．18 种　　D．24 种

2．从 2 个不同的红球、2 个不同的黄球、2 个不同的蓝球共六个球中任取 2 个，放入红、黄、蓝色的三个袋子中，每个袋子至多放入一个球，且球色与袋色不同，那么不同的放法有（　）

A．42 种　　B．36 种　　C．72 种　　D．46 种

3．阳春三月，草长莺飞，三个家庭的 3 位妈妈和 1 位爸爸带着 3 位女宝宝和 2 位男宝宝共 9 人踏春.在沿行一条小溪时，为了安全起见，他们排队前进，宝宝不排最前面也不排最后面，为了方便照顾孩子，每两位大人之间至多排 2 位宝宝，由于男宝宝喜欢打闹，由这位爸爸照看且排在 2 位男宝宝之间.则不同的排法种数为（　）

A．216　　B．288

C．432　　D．512

4．甲、乙、丙 3 位志愿者安排在周一至周五的 5 天中参加某项志愿者活动，要求每人参加

一天且每天至多安排一人，并要求甲安排在另外两位前面.不同的安排方法共有（　）

A．20 种　B．30 种　C．50 种　D．60 种

5．杭州亚运会启动志愿者招募工作，甲、乙等 6 人报名参加了A、B、C三个项目的志愿者工作，因工作需要，每个项目仅需 1 名志愿者，每人至多参加一个项目，若甲不能参加A、B项目，乙不能参加B、C项目，那么共有（　）种不同的选拔志愿者的方案.

A．36　B．40　C．48　D．52

6．现有甲、乙、丙 3 位同学在周一至周五参加某项公益劳动，要求每人参加一天且每天至多安排一人，并要求甲同学安排在另外两位前面，则不同的安排总数为（　）

A．10　B．20　C．40　D．60

7．甲、乙、丙 3 位志愿者安排在周一至周五的 5 天中参加某项志愿者活动，要求每人参加一天且每天至多安排一人，并要求甲安排在另外两位前面，不同的安排方法共有（ ）

A．20 种　B．30 种　C．40 种　D．60 种

8．甲、乙、丙 3 位教师安排在周一至周五中的 3 天值班，要求每人值班 1 天且每天至多安排 1 人，则恰好甲安排在另外两位教师前面值班的概率是

A．$\frac{1}{3}$　B．$\frac{2}{3}$　C．$\frac{3}{4}$　D．$\frac{3}{5}$

9．从 2 个不同的红球，2 个不同的黄球，2 个不同的蓝球共 6 个球中任取 2 个，放入红、黄、蓝色的三个袋子中，每个袋子至多放入 1 个球，且球色与袋色不同，则不同的放法有_____种.

10．将 2 枚白棋和 2 枚黑棋放入一个4×4的棋盘中，使得棋盘的每个方格内至多放入一枚棋子，且相同颜色的棋子既不在同一行，也不在同一列，如果我们只区分颜色而不区分同种颜色的棋子，则不同放法的种数为_________.

11．现有红、黄、白三种颜色的小球（形状、大小完全相同）5 个，每种颜色至多 2 个小球，若将这 5 个小球排成一排，要求中间位置不放白球，且同种颜色的小球不相邻，则共有___种排法.

12．把座位编号为 1，2，3，4，5 的五张电影票全部分给甲、乙、丙、丁四个人，每人至少一张，至多两张，且分得的两张票必须是连号，那么不同的分法种数为__________(用数字作答).

13．全运会启动志愿者招募工作，甲、乙等 6 人报名参加A、B、C三个项目的志愿者工作.因工作需要，每个项目仅需 1 名志愿者，每人至多参加 1 个项目，若甲不能参加A、B项目，

乙不能参加B、C项目，那么共有多少种不同的选拔志愿者的方案？

14．某电影院一排有 10 个座位，现有 4 名观众就座.

（1）若 4 名观众必须相邻，则不同的坐法有多少种？

（2）若 4 名观众中恰有两人相邻，则不同的坐法有多少种？

（3）若 4 名观众两两不相邻，且要求每人左右两边至多只有 2 个空位，则不同的坐法有多少种？

15．将四个编号为 1,2,3,4 的小球放入四个编号为 1,2,3,4 的盒子中.

(1)有多少种放法?

(2)若每盒至多一球,则有多少种放法?

(3)若恰好有一个空盒,则有多少种放法?

(4)若每个盒内放一个球,并且恰好有一个球的编号与盒子的编号相同,则有多少种放法?

易错点六：由于重复计数致错（可重复与限制问题）

解题模板

<u>可重复问题</u>

总原则：可重复问题方幂处理(乘法原理)

Ⅰ：解决排列组合综合问题的一般过程

（1）认真审题，确定要做什么事；

（2）确定怎样做才能完成这件事，即采取分步还是分类或是分步与分类同时进行，弄清楚分多少类及多少步；

（3）确定每一步或每一类是排列（有序）问题还是组合（无序）问题，元素总数是多少及取出多少个元素；

（4）解决排列组合综合性问题，往往类与步交叉，因此必须掌握一些常用的解题策略.

Ⅱ：数字排列问题的解题原则、常用方法及注意事项

解题原则：排列问题的本质是“元素”占“位子”问题，有限制条件的排列问题的限制条件主要表现在某元素不排在某个位子上，或某个位子不排某些元素，解决该类排列问题的方法主要是按“优先”原则，即优先排特殊元素或优先满足特殊位子，若一个位子安排的元素影响到另一个位子的元素个数时，应分类讨论.

Ⅲ：定位、定元的排列问题，一般都是对某个或某些元素加以限制，被限制的元素通常称为

特殊元素，被限制的位置称为特殊位置．这一类问题通常以三种途径考虑：

（1）以元素为主考虑，这时，一般先解决特殊元素的排法问题，即先满足特殊元素，再安排其他元素；

（2）以位置为主考虑，这时，一般先解决特殊位置的排法问题，即先满足特殊位置，再考虑其他位置；

（3）用间接法解题，先不考虑限制条件，计算出排列总数，再减去不符合要求的排列数．

易错提醒：解排列组合的应用题，要注意：由于排列组合问题的答案一般数目较大，不易直接验证，因此在检查结果时，应着重检查所设计的解决问题的方案是否完备，有无重复或遗漏，也可采用多种不同的方法求解，看看是否相同．在对排列组合问题分类时，分类标准应统一，否则易出现遗漏或重复．

举一反三

例、从 1，3，5，7，9 这五个数中，每次取出两个不同的数分别记为 a，b，共可得到 $\lg a-\lg b$ 的不同值的个数是（　　）

A．9　　　　B．10　　　　C．18　　　　D．20

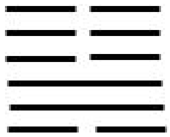
变式 1.有 3 个兴趣小组，甲、乙两位同学各自参加其中一个小组，每位同学参加各个小组的可能性相同，则这两位同学参加同一个兴趣小组的概率为　(　　　)

A. $\frac{1}{3}$　　　　B. $\frac{1}{2}$　　　　C. $\frac{2}{3}$　　　　D. $\frac{3}{4}$

变式 2.4 位同学各自在周六、周日两天中任选一天参加公益活动,则周六、周日都有同学参加公益活动的概率为　(　　　)

A. $\frac{1}{8}$　　　　B. $\frac{3}{8}$　　　　C. $\frac{5}{8}$　　　　D. $\frac{7}{8}$

变式 3.我国古代典籍《周易》用“卦”描述万物的变化，每一“重卦”由从下到上排列的 6 个爻组成，爻分为阳爻“ ”和阴爻“ ”，下图就是一重卦，在所有重卦中随机取一重卦，则该重卦恰有 3 个阳爻的概率是　(　　　)



A. $\frac{5}{16}$　　B. $\frac{11}{32}$　　C. $\frac{21}{32}$　　D. $\frac{11}{16}$

易错题通关

1．2023 年 6 月 25 日 19 时，随着最后一场比赛终场哨声响起，历时 17 天的．2023 年凉山州首届“火洛杯”禁毒防艾男子篮球联赛决赛冠军争夺赛在凉山民族体育馆内圆满闭幕，为进一步展现凉山男儿的精神风貌主办方设置一场扣篮表演，分别由西昌市、冕宁县、布拖县、昭觉县 4 个代表队每队各派 1 名球员参加扣篮表演，则西昌代表队队员扣篮表演不在第一位且不在最后一位的概率为（　）

A．$\frac{1}{2}$　　B．$\frac{1}{3}$　　C．$\frac{1}{4}$　　D．$\frac{1}{6}$

2．“缤纷艺术节”是西大附中的一个特色，学生们可以尽情地发挥自己的才能，某班的五个节目（甲、乙、丙、丁、戊）进入了初试环节，现对这五个节目的出场顺序进行排序，其中甲不能第一个出场，乙不能第三个出场，则一共有（　）种不同的出场顺序.

A．72　　B．78　　C．96　　D．120

3．将甲、乙、丙、丁四名志愿者随机分配到 A，B，C，D 四个社区做环保宣传，每个志愿者只能去其中一个社区且每个社区只能安排一名志愿者，则甲不被分到 A 社区的概率是（　）

A．$\frac{7}{8}$　　B．$\frac{3}{5}$　　C．$\frac{3}{4}$　　D．$\frac{2}{3}$

4．某班准备利用班会的时间举行一场小型的文娱活动，准备表演 3 个歌唱类节目和 2 个语言类节目，现要排出一个节目单，若前 2 个节目中必须要有语言类节目，则不同的排法有_种.

5．某医院选派甲、乙等 4 名医生到 3 个乡镇义诊，每个乡镇至少有一人，每名医生只能去一个乡镇，且甲、乙不在同一个乡镇，则不同的选派方法有______种.

6．首个全国生态主场日活动于 2023.8.15 在浙江湖州举行，推动能耗双控转向碳排放双控．有 A，B，C，D，E，F 共 6 项议程在该天举行，每个议程有半天会期．现在有甲、乙、丙三个会议厅可以利用，每个会议厅每半天只能容纳一个议程．若要求 A，B 两议程不能同时在上午举行，而 C 议程只能在下午举行，则不同的安排方案一共有______种.（用数字作答）

7．填空：

（1）甲、乙、丙 3 名同学选修兴趣课程，从 5 门课程中，甲选修 2 门，乙选修 4 门，丙选修 3 门，则不同的选修方案共有______种.

（2）H 城市某段时间内发放的汽车牌照号码由 2 个英文字母后接 4 个数字组成，其中 4 个数字互不相同，这样的牌照号码共有______种.

（3）4 名教师分配到 3 所学校任教，每所学校至少 1 名教师，则不同的分配方案共有______种.

（4）五人并排站成一排，甲、乙必须相邻且甲在乙的左边，则不同的站法共有______种.

（5）要排出某班一天中语文、数学、政治、英语、体育和艺术 6 门课各一节的课程表，要求数学课排在前 3 节，英语课不排在第 6 节，则不同的排法共有______种.

8．某公司为员工制订了一项旅游计划，从 7 个旅游城市中选择 5 个进行游览，如果 M，N 为必选城市，并且在游览过程中必须按先 M 后 N 的次序，则不同的游览线路有多少种？

9．用 $0,1,2,3,4,5,6$ 可以组成多少个无重复数字的五位数？其中能被 5 整除的五位数有多少个？

10．某单位安排 7 位工作人员在 10 月 1 日至 10 月 7 日值班，每人值班一天，其中甲、乙二人都不安排在 10 月 1 日和 2 日，共有多少种不同的安排方法？

专题 15 排列组合

易错点一：相邻与不相邻问题处理方法不当致误（相邻问题）

解题模板

<u>相邻问题</u>

技巧总结

相邻问题

1、思路：对于相邻问题，一般采用“捆绑法”解决，即将相邻的元素看做是一个整体，在于其他元素放在一起考虑.如果设计到顺序，则还应考虑相邻元素的顺序问题，再与其他元素放在一起进行计算.

2、解题步骤：

第一步：把相邻元素看作一个整体（捆绑法），求出排列种数

第二步：求出其余元素的排列种数

第三步：求出总的排列种数

易错提醒：排列组合实际问题主要有相邻问题和不相邻问题。(1）相邻问题捆绑法（把相邻的若干个特殊元素“捆绑”为一个大元素，然后再与其余“普通元素”全排列，最后再“松绑”，将特殊元素在这些位置上全排列）；

（2）不相邻（相间）问题插空法（某些元素不能相邻或某些元素要在某特殊位置时可采用插空法，即先安排好没有限制条件的元素，然后再把有限制条件的元素按要求插入排好的元素之间）；

举一反三

例、现有 8 个人排成一排照相，其中甲、乙、丙 3 人不能相邻的排法有（　　）

A．$A_6^3 \cdot A_5^5$种　　B．$\left(A_8^8 - A_6^6 \cdot A_3^3\right)$种

C．$A_5^3 \cdot A_3^3$种　　D．$\left(A_8^8 - A_6^4\right)$种

易错分析：本题易出现的错误是把"甲、乙、丙 3 人不能相邻"理解为"甲、乙、丙 3 人互不相邻"的情况，使结果中遗漏甲、乙、丙 3 人中有两人相邻的情况．

正解：在 8 个人全排列的方法数中减去甲、乙、丙全相邻的方法数，就得到甲、乙、丙 3 人不相邻的方法数，即 $A_8^8 - A_6^6 \cdot A_3^3$，故选 B．

易错警示：处理相邻问题的基本方法是"捆绑法"，即把相邻的若干个特殊元素"捆绑"为一个元素，然后与其余元素全排列，最后"松绑"，将特殊元素在这些位置上全排列．处理不相邻问题的基本方法是"插空法"，即先安排好没有限制条件的元素，然后把有限制条件的元素

变式 1：加工某种产品需要 5 道工序，分别为 A，B，C，D，E，其中工序 A，B 必须相邻，工序 C，D 不能相邻，那么有（　　）种加工方法．

A．24　　B．32　　C．48　　D．64

解：工序 A，B 必须相邻，可看作一个整体，工序 C，D 不能相邻，所以先对 AB，E 工序进行排序，有 $A_2^2 = 2$ 种方法，AB 内部排序，有 $A_2^2 = 2$ 种方法，排好之后有三个空可以把工序 C，D 插入，共 $A_3^2 = 6$ 种情况，所以一共有 $2 \times 2 \times 6 = 24$ 种可能性故选：A

变式 2：中国航天工业迅速发展，取得了辉煌的成就，使我国跻身世界航天大国的行列. 中国的目标是到 2030 年成为主要的太空大国.它通过访问月球，发射火星探测器以及建造自己的空间站，扩大了太空计划.在航天员进行的一项太空实验中，要先后实施 6 个程序，其中程序 A 只能出现在第一步或最后一步，程序 B 和 C 实施时必须相邻，请问实验顺序的编排方法共有（　　）

A．24 种　　B．48 种　　C．96 种　　D．144 种

解：首先将程序 B 和 C 捆绑在一起，再和除程序 A 之外的 3 个程序进行全排列，最后将程序 A 排在第一步或最后一步，根据分步计数原理可得 $A_2^2 A_4^4 A_2^1 = 2 \times 24 \times 2 = 96$种.故选：C

变式 3：为推动党史学习教育各项工作扎实开展，营造"学党史、悟思想、办实事、开新局"的浓厚氛围，某校党委计划将中心组学习、专题报告会、党员活动日、主题班会、主题团日

这五种活动分 5 个阶段安排，以推动党史学习教育工作的进行，若主题班会、主题团日这两个阶段相邻，且中心组学习必须安排在前两阶段并与党员活动日不相邻，则不同的安排方案共有（　　）

A．10 种　　B．12 种　　C．16 种　　D．24 种

解：如果中心组学习在第一阶段，主题班会、主题团日在第二、三阶段，则其它活动有 2 种方法；主题班会、主题团日在第三、四阶段，则其它活动有 1 种方法；主题班会、主题团日在第四、五阶段，则其它活动有 1 种方法，则此时共有 $A_2^2(2+1+1)=8$种方法；

如果中心组学习在第二阶段，则第一阶段只有 1 种方法，后面的三个阶段有 $A_2^2=2$ 种方法.

综合得不同的安排方案共有 10 种.故选:A

易错题通关

1．2023 年杭州亚运会期间，甲、乙、丙 3 名运动员与 5 名志愿者站成一排拍照留念，若甲与乙相邻、丙不排在两端，则不同的排法种数有（　）

A．1120　　B．7200　　C．8640　　D．14400

【答案】B

【分析】相邻问题用捆绑法看成一个整体，丙不排在两端可先排好其他人后再排丙.

【详解】甲与乙相邻有 A_2^2 种不同的排法，将甲与乙看作是一个整体，与除丙外的 5 人排好，

有 A_6^6 种不同的排法，

再将丙排入隔开的不在两端的 5 个空中，有 C_5^1 种不同的排法，

所以共有 $\mathrm{A}_2^2\mathrm{A}_6^6\mathrm{C}_5^1=7200$ 种不同的排法.

故选：B.

2．六名同学暑期相约去都江堰采风观景，结束后六名同学排成一排照相留念，若甲与乙相邻，丙与丁不相邻，则不同的排法共有（　）

A．48 种　　B．72 种　　C．120 种　　D．144 种

【答案】D

【分析】甲和乙相邻利用捆绑法，丙和丁不相邻用插空法，即先捆甲和乙，再与丙和丁外的两人共“3 人”排列，再插空排丙和丁.

【详解】甲和乙相邻，捆绑在一起有 A_2^2 种，再与丙和丁外的两人排列有 A_3^3 种，

再排丙和丁有A_4^2种，故共有$A_2^2A_3^3A_4^2=144$种排法.

故选：D.

3．把二项式$\left(\sqrt{x}+\frac{1}{x}\right)^8$的所有展开项重新排列，记有理项都相邻的概率为$p$，有理项两两不相邻的概率为$q$，则$\frac{p}{q}=$（　）

A．5　　B．$\frac{1}{5}$　　C．4　　D．$\frac{1}{4}$

【答案】A

【分析】根据二项式的展开公式可得有5项有理项，4项无理项，从而可得p、q的值，再代入求解即可得答案.

【详解】解：$T_{r+1}=C_8^r\cdot\left(\sqrt{x}\right)^{8-r}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^r=C_8^r\cdot x^{4-\frac{3r}{2}}$，其中$0\le r\le 8$，$r\in\mathbf{N}$，

当$r=0,2,4,6,8$时为有理项，故有5项有理项，4项无理项，

故$p=\frac{A_5^5\cdot A_5^5}{A_9^9}$，$q=\frac{A_4^4\cdot A_5^5}{A_9^9}$，故$\frac{p}{q}=\frac{A_5^5\cdot A_5^5}{A_4^4\cdot A_5^5}=5$.

故选:A.

4．A，B，C，D，E，F六人站成一排，满足A，B相邻，C，D不相邻的不同站法的种数为（　）

A．48　　B．96　　C．144　　D．288

【答案】C

【分析】根据相邻捆绑法和不相邻问题插空法即可由排列数计算求解.

【详解】由于A，B相邻，所以先将A,B看作一个整体捆绑起来与E,F进行全排列，

然后将C，D插入到已排好队的两两之间以及首尾的空隙中即可，

故共有$A_3^3A_2^2A_4^2=144$，

故选：C

5．2023年5月21日，中国羽毛球队在2023年苏迪曼杯世界羽毛球混合团体锦标赛决赛中以总比分$3:0$战胜韩国队，实现苏迪曼杯三连冠．甲、乙、丙、丁、戊五名球迷赛后在现场合影留念，其中甲、乙均不能站左端，且甲、丙必须相邻，则不同的站法共有（　）

A．18种　　B．24种　　C．30种　　D．36种

【答案】C

【分析】分别计算丙站在左端时和丙不站在左端时的情况，即可得到答案.

【详解】当丙站在左端时，甲、丙必须相邻，其余人全排列，有 $A_3^3=6$ 种站法；

当丙不站在左端时，从丁、戊两人选一人站左边，再将甲、丙捆绑，与余下的两人全排，

有 $A_2^1A_2^2A_3^3=24$ 种站法，

所以一共有 $6+24=30$ 种不同的站法.

故选：C

6．为配合垃圾分类在学校的全面展开，某学校举办了一次垃圾分类知识比赛活动.高一、高二、高三年级分别有 1 名、2 名、3 名同学获一等奖.若将上述获一等奖的 6 名同学排成一排合影，要求同年级同学排在一起，则不同的排法共有（　）

A．18 种　　B．36 种　　C．72 种　　D．144 种

【答案】C

【分析】根据相邻问题捆绑法即可由全排列求解.

【详解】由题意可得 $A_1^1A_2^2A_3^3A_3^3=72$，

故选:C

7．甲、乙两个家庭周末到附近景区游玩，其中甲家庭有 2 个大人和 2 个小孩，乙家庭有 2 个大人和 3 个小孩，他们 9 人在景区门口站成一排照相，要求每个家庭的成员要站在一起，且同一家庭的大人不能相邻，则所有不同站法的种数为（　）

A．144　　B．864　　C．1728　　D．2880

【答案】C

【分析】利用捆绑以及插空法求得正确答案.

【详解】甲家庭的站法有 $A_2^2A_3^2=12$ 种，乙家庭的站法有 $A_3^3A_4^2=72$ 种，

最后将两个家庭的整体全排列，有 $A_2^2=2$ 种站法，

则所有不同站法的种数为 $12\times72\times2=1728$.

故选：C

8．某驾校 6 名学员站成一排拍照留念，要求学员 A 和 B 不相邻，则不同的排法共有（　）

A．120 种　　B．240 种　　C．360 种　　D．480 种

【答案】D

【分析】正难则反，首先我们可以求出 6 名学员随机站成一排的全排列数即A_6^6，然后求学员 A 和 B 相邻的排列数，两数相减即可.

【详解】一方面：若要求学员 A 和 B 相邻，则可以将学员 A 和 B 捆绑作为一个“元素”，此时一共有5个元素，

但注意到学员 A 和 B 可以互换位置，所以学员 A 和 B 相邻一共有

$A_2^2 \cdot A_5^5 = 2\times1\times5\times4\times3\times2\times1 = 240$ 种排法.

另一方面：6 名学员随机站成一排的全排列数为 $A_6^6 = 6\times5\times4\times3\times2\times1 = 720$ 种排法.

结合以上两方面：学员 A 和 B 不相邻的不同的排法共有 $A_6^6 - A_2^2 \cdot A_5^5 = 720-240 = 480$ 种排法.

故选：D.

9．某高铁动车检修基地库房内有 $A \sim E$ 共 5 条并行的停车轨道线，每条轨道线只能停一列车，现有动车 $01,02$ 、高铁 $01,02,03$ 共五列车入库检修，若已知两列动车安排在相邻轨道，则动车 01 停放在 A 道的概率为（　　）

A．$\frac{1}{4}$　　B．$\frac{1}{5}$　　C．$\frac{1}{8}$　　D．$\frac{1}{10}$

【答案】C

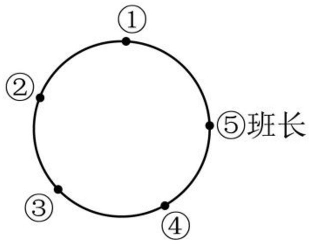
【分析】根据条件概型以及排列数的计算求得正确答案.

【详解】记 $M=$“两动车相邻”， $N=$“动车 01 停在 A 道”，

则 $P\left(N|M\right)=\frac{n\left(MN\right)}{n\left(M\right)}=\frac{A_3^3}{A_2^2A_4^4}=\frac{1}{8}$.

故选：C

10．班长邀请 A,B,C,D 四位同学参加圆桌会议．如图，班长坐在⑤号座位，四位同学随机坐在①②③④四个座位，则 A,B 两位同学座位相邻的概率是（　　）



A．$\frac{1}{2}$　　B．$\frac{1}{3}$

C．$\frac{1}{4}$　　D．$\frac{2}{3}$

【答案】A

【分析】先计算出 A,B,C,D 四位同学参加圆桌会议的情况数，再计算出 A,B 两位同学座位相邻的情况，从而计算出概率.

【详解】A,B,C,D 四位同学参加圆桌会议，共有 $\mathrm{A}_4^4=24$ 种情况，

其中 A,B 两位同学可坐在①②，②③，③④三个位置，并可进行互换位置，有 $3\mathrm{A}_2^2=6$ 种情况，

C,D 两位同学坐在其余两个位置，且可互换，有 $\mathrm{A}_2^2=2$ 种情况，

故 A,B 两位同学座位相邻的情况有 $6\times2=12$ 种情况，

所以 A,B 两位同学座位相邻的概率为 $\frac{12}{24}=\frac{1}{2}$.

故选：A

11．将 3 名男生，2 名女生排成一排，要求男生甲必须站在中间，2 名女生必须相邻的排法种数有（　）

A．4 种　　B．8 种　　C．12 种　　D．48 种

【答案】B

【分析】根据分步乘法原理结合排列数求解即可.

【详解】先让甲站好中间位置，再让 2 名女生相邻有两种选法，最后再排剩余的 2 名男生，根据分步乘法原理得，有 $2\times\mathrm{A}_2^2\times\mathrm{A}_2^2=8$ 种不同的排法.

故选：B

12．5 名同学排成一排，其中甲、乙、丙三人必须排在一起的不同排法有（　）

A．70 种　　B．72 种　　C．36 种　　D．12 种

【答案】C

【分析】相邻问题用捆绑法即可得解.

【详解】甲、乙、丙先排好后视为一个整体与其他 2 个同学进行排列，

则共有 $\mathrm{A}_3^3\mathrm{A}_3^3=36$ 种排法.

故选：C

13．现有 2 名男生和 3 名女生，在下列不同条件下进行排列，则（　）

A．排成前后两排，前排 3 人后排 2 人的排法共有 120 种

B．全体排成一排，女生必须站在一起的排法共有 36 种

C．全体排成一排，男生互不相邻的排法共有 72 种

D．全体排成一排，甲不站排头，乙不站排尾的排法共有 72 种

【答案】ABC

【分析】根据题意，利用排列数公式，以及捆绑法、插空法，以及分类讨论，结合分类计数原理，逐项判定，即可求解.

【详解】由题意知，现有 2 名男生和 3 名女生，

对于 A 中，排成前后两排，前排 3 人后排 2 人，则有 $A_5^3A_2^2=120$ 种排法，所以 A 正确；

对于 B 中，全体排成一排，女生必须站在一起，则有 $A_3^3A_3^3=36$ 种排法，所以 B 正确；

对于 C 中，全体排成一排，男生互不相邻，则有 $A_3^3A_4^2=72$ 种排法，所以 C 正确；

对于 D 中，全体排成一排，甲不站排头，乙不站排尾

可分为两类：（1）当甲站在中间的三个位置中的一个位置时，有 $A_3^1=3$ 种排法，

此时乙有 $A_3^1=3$ 种排法，共有 $A_3^1A_3^1A_3^3=54$ 种排法；

（2）当甲站在排尾时，甲只有一种排法，此时乙有 $A_4^1=4$ 种排法，

共有 $A_4^1A_3^3=24$ 种排法，综上可得，共有 $54+24=78$ 种不同的排法，所以 D 错误.

故选：ABC.

14．甲、乙、丙、丁、戊五人并排站成一排，下列说法正确的是（　）

A．若甲、乙、丙按从左到右的顺序排列，则不同的排法有 12 种

B．若甲、乙不相邻，则不同的排法有 72 种

C．若甲不能在最左端，且乙不能在最右端，则不同的排法共有 72 种

D．如果甲、乙必须相邻且乙在甲的右边，则不同的排法有 24 种

【答案】BD

【分析】A 选项，定序问题采用倍缩法进行求解；B 选项，采用插空法进行求解；C 选项，分两种情况，若最左端排乙，最左端不排乙，分别求出两种情况下的排法，相加即可；D 选项，使用捆绑法进行求解；

【详解】对于 A，甲乙丙按从左到右的顺序排列的排列有 $\dfrac{A_5^5}{A_3^3}=20$ 种情况，故 A 错误；

对于 B，先安排丙，丁，戊三人，有 $A_3^3=6$ 种情况，再将甲乙两人插空，则有 $A_4^2=12$ 种情况，

故甲乙不相邻的排法种数为$6\times12=72$种情况，故 B 正确；

对于 C，若最左端排乙，此时其余四人可进行全排列，故有$A_4^4=24$种；若最左端不排乙，则最左端只能从丙，丁，戊选出 1 人，又乙不能在最右端，则有$A_3^1A_3^1A_3^3=54$种情况，则共有$24+54=78$种站法，故 C 错误；

对于 D，将甲与乙捆绑，看做一个整体且固定顺序，再与其他三人站成一排，故有$A_4^4=24$种，故 D 正确；

故选：BD

15．甲乙丙等 5 人的身高互不相同，站成一排进行列队训练，则（　　）

A．甲乙不相邻的不同排法有 48 种

B．甲乙中间恰排一个人的不同排法有 36 种

C．甲乙不排在两端的不同排法有 36 种

D．甲乙丙三人从左到右由高到矮的不同排法有 20 种

【答案】BCD

【分析】根据排列和组合的定义、结合捆绑法逐一判断即可.

【详解】A：甲乙不相邻的不同排法有$A_3^3A_4^2=72$种，所以本选项不正确；

B：甲乙中间恰排一个人的不同排法有$C_3^1A_2^2A_3^3=36$种，所以本选项正确；

C：甲乙不排在两端的不同排法有$A_3^2A_3^3=36$种，所以本选项正确；

D：甲乙丙三人从左到右由高到矮的不同排法有$\dfrac{A_5^5}{A_3^3}=20$种，所以本选项正确.

故选：BCD

16．某学校举行校园歌手大赛，共有 4 名男生，3 名女生参加，组委会对他们的出场顺序进行安排，则下列说法正确的是（　　）

A．若 3 个女生不相邻，则有 144 种不同的出场顺序

B．若女生甲在女生乙的前面，则有 2520 种不同的出场顺序

C．若 4 位男生相邻，则有 576 种不同的出场顺序

D．若学生的节目顺序已确定，再增加两个教师节目，共有 72 种不同的出场顺序

【答案】BCD

【分析】选项 A 采用“插空法”，　先排 4 名男生，形成 5 个空档，将 3 名女生插入其中，

由此可得；选项 B 由女生甲在女生乙的前面与女生甲在女生乙的后面各占一半，结合 4 男 3 女的全排列求解即可；选项 C 先将 4 位男生捆绑作为一个整体进行全排列，然后 3 位女生和这个整体全排列可得；选项 D 采用“插空法”，分两次插入老师节目即可.

【详解】若 3 个女生不相邻，则有 $A_4^4A_5^3=1440$ 种不同的出场顺序，A 错误；

若女生甲在女生乙的前面，则有 $\frac{1}{2}A_7^7=2520$ 种不同的出场顺序，B 正确；

若 4 位男生相邻，则有 $A_4^4A_4^4=576$ 种不同的出场顺序，C 正确；

若学生的节目顺序确定，再增加两个教师节目，可分为两步，第一步，原 7 个学生节目形成 8 个空，插入 1 个教师节目，有 8 种情况；

第二步，原 7 个学生节目和刚插入的 1 个教师节目形成 9 个空，再插入 1 个教师节目，有 9 种情况，

所以这两位教师共有 $8\times9=72$ 种不同的出场顺序，D 正确.

故选：BCD.

17．某校高二年级安排甲、乙、丙三名同学到 A，B，C，D，E 五个社区进行暑期社会实践活动，每名同学只能选择一个社区进行实践活动，且多名同学可以选择同一个社区进行实践活动，则下列说法正确的有（　　）

A．如果社区 A 必须有同学选择，则不同的安排方法有 61 种

B．如果同学甲必须选择社区 A，则不同的安排方法有 50 种

C．如果三名同学选择的社区各不相同，则不同的安排方法共有 60 种

D．如果甲、乙两名同学必须在同一个社区，则不同的安排方法共有 20 种

【答案】AC

【分析】对于 A，根据社区 A 必须有同学选择，由甲、乙、丙三名同学都有 5 种选择减去有 4 种选择求解；对于 B，根据同学甲必须选择社区 A，有乙丙都有 5 种选择求解；对于 C，根据三名同学选择的社区各不相同求解；对于 D，由甲、乙两名同学必须在同一个社区，捆绑再选择求解；

【详解】对于 A，如果社区 A 必须有同学选择，则不同的安排方法有 $5^3-4^3=61$（种），故 A 正确；

对于 B，如果同学甲必须选择社区 A，则不同的安排方法有 $5^2=25$（种），故 B 错误；

对于 C，如果三名同学选择的社区各不相同，则不同的安排方法共有 $5\times4\times3=60$（种），故 C 正确；

对于 D，甲、乙两名同学必须在同一个社区，第一步，将甲、乙视作一个整体，第二步，两个整体挑选社区，则不同的安排方法共有 $5^2=25$（种），故 D 错误.

故选：AC.

18．在树人中学举行的演讲比赛中，有 3 名男生，2 名女生获得一等奖.现将获得一等奖的学生排成一排合影，则（　）

A．3 名男生排在一起，有 6 种不同排法　B．2 名女生排在一起，有 48 种不同排法

C．3 名男生均不相邻，有 12 种不同排法 D．女生不站在两端，有 108 种不同排法

【答案】BC

【分析】利用捆绑法可判断 A、B；利用插空法可判断 C；利用分步计数法可判断 D.

【详解】解：由题意得：

对于选项 A：3 名男生排在一起，先让 3 个男生全排后再作为一个整体和 2 个女生做一个全排，共有 $A_3^3\cdot A_3^3=36$ 种，A 错误；

对于选项 B：2 名女生排在一起，先让 2 个女生全排后再作为一个整体和 3 个男生做一个全排，共有 $A_2^2\cdot A_4^4=48$ 种，B 正确；

对于选项 C：3 名男生均不相邻，先让 3 个男生全排后，中间留出两个空位让女生进行插空，共有 $A_2^2\cdot A_3^3=12$ 种，C 正确；

对于选项 D：女生不站在两端，先从三个男生种选出两个进行全排后放在两端，共有 $C_3^2\cdot A_2^2=6$ 种，然后将剩下的 3 人进行全排后放中间，共有 $C_3^2\cdot A_2^2\cdot A_3^3=36$ 种，D 错误.

故选：BC

19．甲，乙，丙，丁，戊五人并排站成一排，下列说法正确的是（　）

A．如果甲，乙必须相邻且乙在甲的右边，那么不同的排法有 24 种

B．最左端只能排甲或乙，最右端不能排甲，则不同的排法共有 42 种

C．甲乙不相邻的排法种数为 72 种

D．甲乙丙按从左到右的顺序排列的排法有 40 种

【答案】ABC

【分析】A 选项，使用捆绑法进行求解；B 选项，分两种情况，最左端排甲和最左端排乙，分别求出两种情况下的排法，相加即可；C 选项，采用插空法进行求解；D 选项，定序问题采用倍缩法进行求解.

【详解】A 选项，将甲与乙捆绑，看做一个整体，与其他三人站成一排，故有 $A_4^4=24$ 种，A 正确；

B 选项，若最左端排甲，此时其余四人可进行全排列，故有 $A_4^4=24$ 种，

若最左端排乙，则最右端只能从丙，丁，戊选出 1 人，其余三人与三个位置进行全排列，故有 $C_3^1A_3^3=18$ 种选择，

综上：最左端只能排甲或乙，最右端不能排甲，则不同的排法共有 $24+18=42$ 种，B 正确；

C 选项，先安排丙，丁，戊三人，有 $A_3^3=6$ 种情况，再将甲乙两人插空，则有 $A_4^2=12$ 种情况，故甲乙不相邻的排法种数为 $6\times12=72$ 种情况，C 正确；

D 选项，甲乙丙按从左到右的顺序排列的排列有 $\frac{A_5^5}{A_3^3}=20$ 种情况，D 错误.

故选：ABC

20．(多选)把 5 件不同产品 A，B，C，D，E 摆成一排，则（　　）

A．A 与 B 相邻有 48 种摆法

B．A 与 C 相邻有 48 种摆法

C．A，B 相邻又 A，C 相邻，有 12 种摆法

D．A 与 B 相邻，且 A 与 C 不相邻有 24 种摆法

【答案】ABC

【分析】逐个分析每个选项正确与否即可

【详解】对于 A 选项：产品 A 与 B 相邻，把 A,B 作为一个元素有 $A_4^4=4\times3\times2\times1=24$种方法，而 A，B 可交换位置，所以有 $2A_4^4=48$ 种摆法.故 A 选项符合题意.

对于 B 选项：同 A 选项一样分析可知产品 A 与 C 相邻也有 48 种摆法. 故 B 选项符合题意.

对于 C 选项:当 A,B 相邻又满足 A,C 相邻，

首先将产品 A,B,C 捆绑起来作为一个元素并把产品 A 放在产品 B 与 C 之间，

注意到产品 B 与 C 可互换位置，所以首先排列 A,B,C 有 $A_2^2=2\times1=2$ 种摆法，

把 A,B,C 组成的整体作为一个元素和剩下的两个元素 D,E 进行排列，又有 $A_3^3=3\times2\times1=6$ 种摆法，

所以 A，B 相邻又 A，C 相邻，有 $A_2^2\cdot A_3^3=2\times6=12$ 种摆法.故 C 选项符合题意.

对于 D 选项：由 A 选项可知 A 与 B 相邻有 48 种摆法，

由 C 选项可知 A，B 相邻又 A，C 相邻有 12 种摆法，

因此 A 与 B 相邻，且 A 与 C 不相邻有 $48-12=36$ 种摆法.故 D 选项不符合题意.

故选：ABC.

21．甲、乙、丙、丁四名同学和一名老师站成一排合影留念．要求老师必须站在正中间，且甲同学不与老师相邻，则不同的站法种数为（　）

A．$\mathrm{A}_5^5-\mathrm{A}_4^4$　　B．$\mathrm{A}_4^4-\mathrm{C}_2^1\mathrm{A}_3^3$　　C．$\mathrm{C}_1^1\mathrm{C}_2^1\mathrm{A}_3^3$　　D．$\dfrac{1}{2}\mathrm{A}_4^4$

【答案】BCD

【分析】根据排列组合，结合相邻问题，即可求解.

【详解】(方法 1：间接法)：四名同学全排再去掉甲与老师相邻的情况为 $\mathrm{A}_4^4-\mathrm{C}_2^1\mathrm{A}_3^3$.

（方法 2：直接法)：特殊元素优先安排，先让老师站在正中间，甲同学从两端中任选一个位置，有 $N_1=\mathrm{C}_1^1\cdot\mathrm{C}_2^1=2$ 种站法，其余三名学生任意排列有 $N_2=\mathrm{A}_3^3=6$ 种排法，则不同站法共有 $N=N_1\times N_2=2\times6=12$（种).

或者，四名同学全排时，甲同学与老师相邻与甲同学与老师不相邻各占 $\frac{1}{2}$，故有 $\frac{1}{2}\mathrm{A}_4^4$.

故选:BCD.

易错点二：“捆绑法”中忽略了“内部排列”或“整体列”（不相邻问题）

解题模板

<u>不相邻问题</u>

技巧总结

1.思路：对于不相邻问题一般采用“插空法”解决，即先将无要求的元素进行全排列，然后将要求不相邻的元素插入到已排列的元素之间，最后进行计算即可

2.解题步骤：

①先考虑不受限制的元素的排列种数

②再将不相邻的元素插入到已排列元素的空当种（插空法)，求出排列种数

③求出总的排列种数

易错提醒：处理相邻问题的基本方法是“捆绑法”，即把相邻的若干个特殊元素“捆绑”为一个元素，然后与其余元素全排列，最后“松绑”，将特殊元素在这些位置上全排列．处理不相邻问题的基本方法是“插空法”，即先安排好没有限制条件的元素，然后把有限制条件的元素按要求插入到排好的元素之间．但应该注意插入的元素之间如果也有顺序，应先进行排列．

举一反三

例、有 3 名男生，4 名女生，在下列不同条件下，求不同的排列方法的总数．

（1）全体排成一行，其中男、女生各站在一起；

（2）全体排成一行，其中男生必须排在一起．

错解：（1）男、女生各站在一起，先把男女生各看成一个整体，分别全排列，所以共有 $A_3^3 \times A_4^4 = 144$ 种排法；

（2）将男生看成一个整体，与女生进行全排列即可，所以共有 $A_5^5 = 120$ 种排法．

错因分析：解决此类问题时将“在一起”的进行“捆绑”，与其他元素进行排列即可．错解中（1）忽略了将男女生所看成的两个整体进行排列，即忽略了“整体排列”；（2）忽略了将男生进行排列，即忽略了“内部排列”．

正解：（1）男、女生各站在一起，先把男女生各看成一个整体，分别全排列，最后两个整体全排列①，所以共有 $A_3^3 \times A_4^4 \times A_2^2 = 288$ 种排法；

（2）将男生看成一个整体，先进行内部排列，再与女生进行全排列即可②，所以共有 $A_3^3 \times A_5^5 = 720$ 种排法．

变式 1：为推动党史学习教育各项工作扎实开展，营造“学党史、悟思想、办实事、开新局”的浓厚氛围，某校党委计划将中心组学习、专题报告会、党员活动日、主题班会、主题团日这五种活动分 5 个阶段安排，以推动党史学习教育工作的进行，若主题班会、主题团日这两个阶段相邻，且中心组学习必须安排在前两阶段并与党员活动日不相邻，则不同的安排方案共有（　　）

A．10 种　　　　B．12 种　　　　C．16 种　　　　D．24 种

解：如果中心组学习在第一阶段，主题班会、主题团日在第二、三阶段，则其它活动有 2 种方法；主题班会、主题团日在第三、四阶段，则其它活动有 1 种方法；主题班会、主题团日在第四、五阶段，则其它活动有 1 种方法，则此时共有 $A_2^2(2+1+1)=8$种方法；

如果中心组学习在第二阶段，则第一阶段只有 1 种方法，后面的三个阶段有 $A_2^2=2$ 种方法.

综合得不同的安排方案共有 10 种.故选:A

变式 2：甲，乙、丙、丁、戊共 5 人随机地排成一行，则甲、乙相邻，丙、丁不相邻的概率为（　　）

A．$\frac{1}{5}$　　B．$\frac{1}{4}$　　C．$\frac{1}{3}$　　D．$\frac{5}{12}$

解：甲，乙、丙、丁、戊共 5 人随机地排成一行有 $A_5^5=120$ 种方法，

甲、乙相邻，丙、丁不相邻的排法为先将甲、乙捆绑在一起，再与戊进行排列，然后丙、丁从 3 个空中选 2 个空插入，则共有 $A_2^2A_2^2A_3^2=2\times2\times3\times2=24$ 种方法，

所以甲、乙相邻，丙、丁不相邻的概率为 $\frac{24}{120}=\frac{1}{5}$，故选：A

变式 3：某地元旦汇演有 2 男 3 女共 5 名主持人站成一排，则舞台站位时男女间隔的不同排法共有（　　）

A．12 种　　B．24 种　　C．72 种　　D．120 种

解：先排列 2 名男生共有 A_2^2 种排法，再将 3 名女生插入到 3 名男生所形成的空隙中，共有 A_3^3 种排法，

所以舞台站位时男女间隔的不同排法共有 $A_2^2A_3^3=12$ 种排法，故选：A.

易错题通关

1．4 名男生和 3 名女生排队（排成一排）照相，下列说法正确的是（　　）

A．若女生必须站在一起，那么一共有 $\mathrm{A}_3^3\mathrm{A}_5^5$ 种排法

B．若女生互不相邻，那么一共有 $\mathrm{A}_3^3\mathrm{A}_4^4$ 种排法

C．若甲不站最中间，那么一共有 $\mathrm{C}_6^1\mathrm{A}_6^6$ 种排法

D．若甲不站最左边，乙不站最右边，那么一共有 $\mathrm{A}_7^7-2\mathrm{A}_6^6$ 种排法

【答案】AC

【分析】分别利用捆绑法、插空法、优先安排特殊元素法、间接法依次求解.

【详解】选项 A ,利用捆绑法，将 3 名女生看成一个整体，其排列方式有 A_3^3 种，加上 4 名男

生一共有 5 个个体，则有 A_5^5 种排列方式，则由乘法原理可知一共有 $A_3^3A_5^5$ 种排法，故 A 正确；

选项 B ,利用插空法，4 名男生排成一排形成 5 个空，其排列方式有 A_4^4 种，再将 3 名女生插入空中，有 A_5^3 种排列方式，则由乘法原理可知一共有 $A_4^4A_5^3$ 种排法，故 B 不正确；

选项 C ,利用优先安排特殊元素法，甲不站最中间,甲先从除中间之外的 6 个位置选一个，其选择方式有 C_6^1 种，再将剩余的 6 人全排列，有 A_6^6 种排列方式，则由乘法原理可知一共有 $C_6^1A_6^6$ 种排法，故 C 正确；

选项 D ,利用间接法，3 人站成一排共有 A_7^7 种排法，若甲站最左边有 A_6^6 种排法，乙站最右边有 A_6^6 种排法，甲站最左边且乙站最右边有 A_5^5 种排法，所以甲不站最左边，乙不站最右边，那么一共有 $A_7^7-2A_6^6+A_5^5$ 种排法，故 D 不正确；

故选：AC.

2．某校文艺汇演共 6 个节目，其中歌唱类节目 3 个，舞蹈类节目 2 个，语言类节目 1 个，则下列说法正确的是（　　）

A．若以歌唱类节目开场，则有 360 种不同的出场顺序

B．若舞蹈类节目相邻，则有 120 种出场顺序

C．若舞蹈类节目不相邻，则有 240 种不同的出场顺序

D．从中挑选 2 个不同类型的节目参加市艺术节，则有 11 种不同的选法

【答案】AD

【分析】根据全排列、捆绑法、插空法，结合分步与分类计数原理依次分析选项，即可判断.

【详解】A：从 3 个歌唱节目选 1 个作为开场，有 $C_3^1=3$ 种方法，后面的 5 个节目全排列，

所以符合题意的方法共有 $3A_5^5=360$ 种，故 A 正确；

B：将 2 个舞蹈节目捆绑在一起，有 $A_2^2=2$ 种方法，再与其余 4 个节目全排列，

所以符合题意的方法共有 $2A_5^5=240$，故 B 错误；

C：除了 2 个舞蹈节目以外的 4 个节目全排列，有 $A_4^4=24$ 种，再由 4 个节目组成的 5 个空插入 2 个舞蹈节目，

所以符合题意的方法有 $24A_5^2=480$ 种，故 C 错误；

D：符合题意的情况可能是 1 个歌唱 1 个舞蹈、1 个歌唱 1 个语言、1 个舞蹈 1 个语言，

所以不同的选法共$C_3^1C_2^1+C_3^1C_1^1+C_2^1C_1^1=11$种，故 D 正确.

故选：AD.

3．现将8把椅子排成一排，4位同学随机就座，则下列说法中正确的是（　）

A．4个空位全都相邻的坐法有120种

B．4个空位中只有3个相邻的坐法有240种

C．4个空位均不相邻的坐法有120种

D．4个空位中至多有2个相邻的坐法有900种

【答案】AC

【分析】对于 A，用捆绑法即可；对于 B，先用捆绑法再用插空法即可；对于 C，用插空法即可；对于 D，用插空法的同时注意分类即可.

【详解】对于 A，将四个空位当成一个整体，全部的坐法：$A_5^5=120$种，故 A 对；

对于 B，先排 4 个学生A_4^4，然后将三个相邻的空位当成一个整体，

和另一个空位插入 5 个学生中有A_5^2种方法，

所以一共有$A_4^4A_5^2=480$种，故 B 错；

对于 C，先排 4 个学生A_4^4，4 个空位是一样的，

然后将 4 个空位插入 4 个学生形成的5个空位中有C_5^4种，

所以一共有$A_4^4C_5^4=120$，故 C 对；

对于 D，至多有 2 个相邻即都不相邻或者有两个相邻，由 C 可知都不相邻的有 120 种，

空位两个两个相邻的有：$A_4^4C_5^2=240$，

空位只有两个相邻的有$A_4^4C_5^1C_4^2=720$，

所以一共有$120+240+720=1080$种，故 D 错；

故选：AC.

4．有甲、乙、丙、丁、戊五位同学，下列说法正确的是（　）.

A．若五位同学排队要求甲、乙必须相邻且丙、丁不能相邻，则不同的排法有 12 种

B．若五位同学排队最左端只能排甲或乙，最右端不能排甲，则不同的排法共有 42 种

C．若甲、乙、丙三位同学按从左到右的顺序排队，则不同的排法有 20 种

D．若甲、乙、丙、丁四位同学被分配到三个社区参加志愿活动，每个社区至少一位同学，则不同的分配方案有 36 种

【答案】BCD

【分析】根据相关的计数原理逐项分析.

【详解】对于 A，将甲乙捆绑有 A_2^2 种方法，若戊在丙丁之间有 A_2^2 排法，丙丁戊排好之后用插空法插入甲乙，有 A_4^1 种方法；

若丙丁相邻，戊在左右两边有 $A_2^2 \bullet A_2^1$ 种排法，但甲乙必须插在丙丁之间，一共有 $A_2^2 \bullet A_2^1 \bullet A_2^2$ 种排法，

所以总的排法有 $A_2^2 \bullet A_2^2 \bullet A_4^1 + A_2^2 \bullet A_2^1 \bullet A_2^2 = 24$ ，故 A 错误；

对于 B，若甲在最左端，有 $A_4^4 = 24$ 种排法，若乙在最左端，先排甲有 $A_3^1 = 3$ 种排法，再排剩下的 3 人有 $A_3^3 = 6$ ，所以总共有 $24 + 3 \times 6 = 42$ 种排法，正确；

对于 C，先将甲乙丙按照从左至右排好，采用插空法，先插丁有 A_4^1 种，再插戊有 A_5^1 种，总共有 $A_4^1 \bullet A_5^1 = 20$ 种，正确；

对于 D，先分组，将甲乙丙丁分成 3 组有 C_4^2 种分法，再将分好的 3 组安排在 3 个社区有 A_3^3 种方法，共有 $C_4^2 \bullet A_3^3 = 36$ 种方法，正确；

故选：BCD.

5．现将 9 把椅子排成一排，5 位同学随机就座，则下列说法中正确的是（　）

A．4 个空位全都相邻的坐法有 720 种

B．4 个空位中只有 3 个相邻的坐法有 1800 种

C．4 个空位均不相邻的坐法有 1800 种

D．4 个空位中至多有 2 个相邻的坐法有 9000 种

【答案】AC

【分析】对于 A，用捆绑法即可;对于 B，先用捆绑法再用插空法即可；对于 C，用插空法即可；对于 D，用插空法的同时注意分类即可.

【详解】对于 A,将四个空位当成一个整体，全部的坐法：$A_6^6 = 720$，故 A 对；

对于 B，先排 5 个学生 A_5^5，然后将三个相邻的空位当成一个整体，和另一个空位插入 5 个