韶关市2024年高中毕业班第二次模拟（数学试题理）

考生请注意：

1．答题前请将考场、试室号、座位号、考生号、姓名写在试卷密封线内，不得在试卷上作任何标记。

2．第一部分选择题每小题选出答案后，需将答案写在试卷指定的括号内，第二部分非选择题答案写在试卷题目指定的位置上。

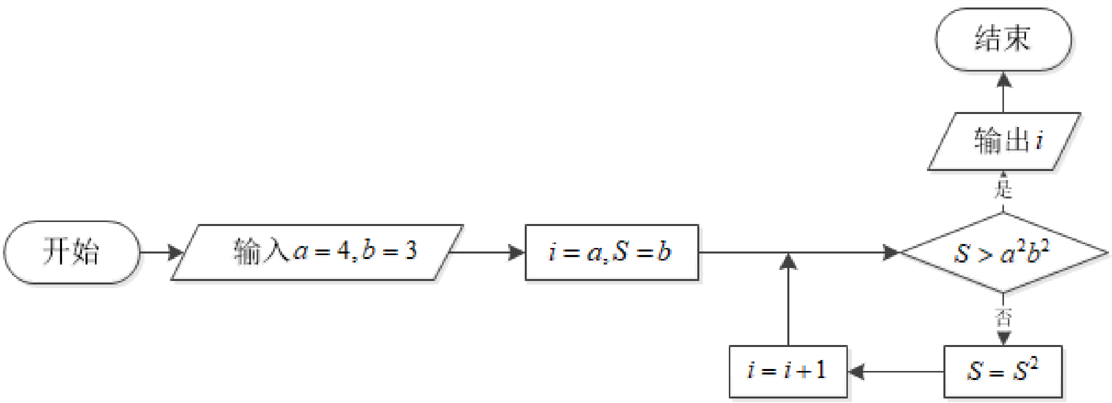
3．考生必须保证答题卡的整洁。考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．在等腰直角三角形 ABC 中，$\angle C=\dfrac{\pi}{2},CA=2\sqrt{2}$，$D$ 为 AB 的中点，将它沿 CD 翻折，使点 A 与点 B 间的距离为 $2\sqrt{3}$，此时四面体 $ABCD$ 的外接球的表面积为（　　）．

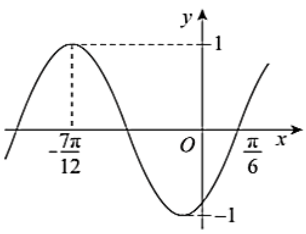
A．5π　　B．$\dfrac{20\sqrt{5}}{3}\pi$　　C．12π　　D．20π

2．如图所示的程序框图，若输入 $a=4$，$b=3$，则输出的结果是（　　）



A．6　　B．7　　C．5　　D．8

3．已知函数 $f(x)=A\cos(\omega x+\varphi)$（$A>0$，$\omega>0$，$|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}$），将函数 $f(x)$ 的图象向左平移 $\dfrac{3\pi}{4}$ 个单位长度，得到函数 $g(x)$ 的部分图象如图所示，则 $f(x)=\dfrac{1}{3}$ 是 $g\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{12}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 的（　　）



A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件

4．已知函数 $□(□)=\left(\frac{□}{e^{□}}\right)^2+\frac{□□}{e^{□}}-□$ 有三个不同的零点 $□_1,□_2,□_3$（其中 $□_1<□_2<□_3$），则 $\left(1-\frac{□_1}{e^{□_1}}\right)^2\left(1-\frac{□_2}{e^{□_2}}\right)\left(1-\frac{□_3}{e^{□_3}}\right)$

的值为(　　)

A．1　　B．-1　　C．□　　D．$-$□

5．设复数 z 满足 $\dfrac{z-\mathrm{i}}{\mathrm{i}}=z-2\mathrm{i}$(i 为虚数单位)，则 $z=$（　　）

A．$\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\mathrm{i}$　　B．$\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\mathrm{i}$　　C．$-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\mathrm{i}$　　D．$-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\mathrm{i}$

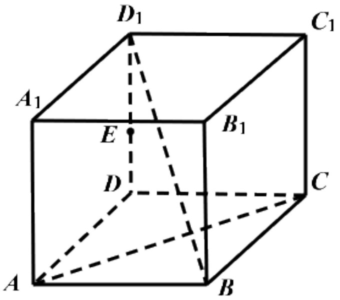
6．若直线 $y=-2x$ 的倾斜角为 α，则 $\sin 2\alpha$ 的值为（　）

A．$\frac{4}{5}$　　B．$-\frac{4}{5}$　　C．$\pm\frac{4}{5}$　　D．$-\frac{3}{5}$

7．设曲线 $y=a(x-1)-\ln x$ 在点 $(1,0)$ 处的切线方程为 $y=3x-3$，则 $a=$（　）

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

8．如图，点 E 是正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 的棱 DD_1 的中点，点 F，M 分别在线段 AC，BD_1（不包含端点）上运动，则（　　）



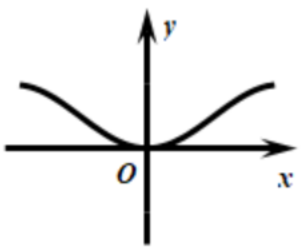
A．在点 F 的运动过程中，存在 $EF//BC_1$

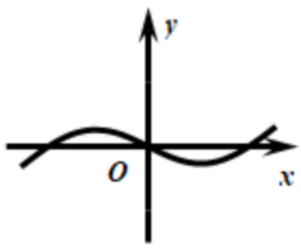
B．在点 M 的运动过程中，不存在 $B_1M\perp AE$

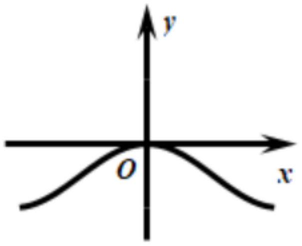
C．四面体 $EMAC$ 的体积为定值

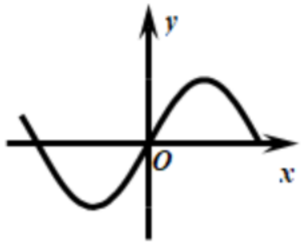
D．四面体 FA_1C_1B 的体积不为定值

9．函数 $f(x)=\left(\dfrac{2}{1+e^x}-1\right)\cos x$ 图象的大致形状是（　　）

A．

B．

C. 

D. 

10．设 F_1,F_2 分别是双线 $\dfrac{x^2}{a^2}-y^2=1(a>0)$ 的左、右焦点，O 为坐标原点，以 F_1F_2 为直径的圆与该双曲线的两条渐近线分别交于 A,B 两点（A,B 位于 y 轴右侧），且四边形 OAF_2B 为菱形，则该双曲线的渐近线方程为（　　）

A．$x\pm y=0$　　B．$\sqrt{3}x\pm y=0$　　C．$x\pm\sqrt{3}y=0$　　D．$3x\pm y=0$

11．设 a，b，c 分别是 ΔABC 中 $\angle A$，$\angle B$，$\angle C$ 所对边的边长，则直线 $\sin A\cdot x-ay-c=0$ 与 $bx+\sin B\cdot y+\sin C=0$ 的位置关系是（　　）

A．平行　　B．重合

C．垂直　　D．相交但不垂直

12．已知非零向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$，若 $|\vec{b}|=2|\vec{a}|$ 且 $|2\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{3}|\vec{b}|$，则向量 $\vec{b}$ 在向量 $\vec{a}$ 方向上的投影为（　　）

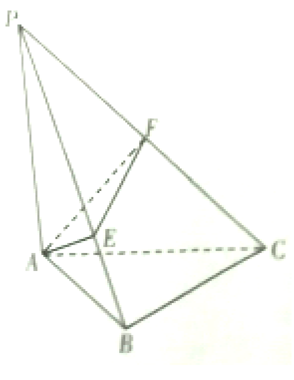
A．$\dfrac{\sqrt{3}}{2}|\vec{b}|$　　B．$\dfrac{1}{2}|\vec{b}|$　　C．$-\dfrac{\sqrt{3}}{2}|\vec{b}|$　　D．$-\dfrac{1}{2}|\vec{b}|$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13．若复数 Z 满足 $(1-2i)Z=-\dfrac{1}{2}(2+i)$，其中 i 为虚数单位，则 Z 的共轭复数在复平面内对应点的坐标为_____.

14．已知随机变量 $X\sim N\left(4,\sigma^2\right)$，且 $P\left(2<X\le 6\right)=0.8$，则 $P\left(X<2\right)=$______

15．《九章算术》中，将四个面都为直角三角形的四面体称为鳖臑，如图，在鳖臑 $P-ABC$ 中，$PA\perp$ 平面 ABC，$AB\perp BC$，且 $AP=AC=4$，过 A 点分别作 $AE\perp PB$ 于点 E，$AF\perp PC$ 于点 F，连接 EF，则三棱锥 $P-AEF$ 的体积的最大值为__________.



16．已知圆 $\boldsymbol{C}$：$x^2+y^2+8x+ay-5=0$ 经过抛物线 $\boldsymbol{E}$：$x^2=4y$ 的焦点，则抛物线 $\boldsymbol{E}$ 的准线与圆 $\boldsymbol{C}$ 相交所得弦长是__________.

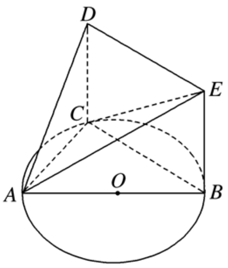
三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17．（12 分）在平面直角坐标系 **xoy** 中，曲线 **C** 的方程为 $x^2-2x+y^2=0$.以原点 **O** 为极点，**x** 轴的正半轴为极轴建立极坐标系，直线 **l** 的极坐标方程为 $\theta=\dfrac{\pi}{3}\left(\rho\in R\right)$.

（1）写出曲线 **C** 的极坐标方程，并求出直线 **l** 与曲线 **C** 的交点 **M**，**N** 的极坐标；

（2）设 **P** 是椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ 上的动点，求 $\triangle PMN$ 面积的最大值.

18．（12 分）如图，$\triangle ABC$ 内接于圆 **O**，**AB** 是圆 **O** 的直径，四边形 **DCBE** 为平行四边形，$DC\perp$平面 **ABC**，$AB=4$，$EB=2\sqrt{3}$.



（1）求证：$DE\perp$平面 **ACD**；

（2）设 $AC=x$，$V\left(x\right)$表示三棱锥 **B-ACE** 的体积，求函数$V\left(x\right)$的解析式及最大值.

19．（12 分）已知椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$，点 $A\left(1,0\right),B\left(0,1\right)$，点 P 满足 $\overrightarrow{OA}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OP}$（其中 O 为坐标原点），点 B,P 在椭圆 C 上.

（1）求椭圆 C 的标准方程；

（2）设椭圆的右焦点为 F，若不经过点 F 的直线 $l:y=kx+m$ $\left(k<0,m>0\right)$ 与椭圆 C 交于 M,N 两点.且与圆 $x^2+y^2=1$ 相切.$\triangle MNF$ 的周长是否为定值?若是，求出定值；若不是，请说明理由.

20．（12 分）某商场以分期付款方式销售某种商品，根据以往资料统计，顾客购买该商品选择分期付款的期数 X 的分布列为：

X	**2**	**3**	**4**
P	**0.4**	a	b

其中 $0<a<1$，$0<b<1$

（Ⅰ）求购买该商品的 3 位顾客中，恰有 2 位选择分 2 期付款的概率；

（Ⅱ）商场销售一件该商品，若顾客选择分 2 期付款，则商场获得利润 l00 元，若顾客选择分 3 期付款，则商场获得利润 150 元，若顾客选择分 4 期付款，则商场获得利润 200 元.商场销售两件该商品所获的利润记为 Y（单位：元）

（ⅰ）求 Y 的分布列；

（ⅱ）若 $P\left(Y\le 300\right)\ge 0.8$，求 Y 的数学期望 $E\left(Y\right)$ 的最大值.

21．(12 分) 已知函数 $f\left(x\right)=a\left(x-\ln x\right)+x^2-2x$.

（1）当 $a=-2e$（e 为自然对数的底数）时，求函数 $f\left(x\right)$ 的极值；

（2） $f'\left(x\right)$ 为 $y=f\left(x\right)$ 的导函数，当 $a>0$， $x_1>x_2>0$ 时，求证：

$$f\left(x_1\right)-f'\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)x_1<f\left(x_2\right)-f'\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)x_2 .$$

22．(10 分) 已知圆 ***O*** 经过椭圆 ***C***：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的两个焦点以及两个顶点，且点 $\left(b,\dfrac{1}{a}\right)$ 在椭圆 ***C*** 上.

(1) 求椭圆 ***C*** 的方程；

(2) 若直线 ***l*** 与圆 ***O*** 相切，与椭圆 ***C*** 交于 ***M***、***N*** 两点，且 $\left|MN\right|=\dfrac{4}{3}$，求直线 ***l*** 的倾斜角.

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、**D**

【解析】

如图，将四面体 $ABCD$ 放到直三棱柱中，求四面体的外接球的半径转化为求三棱柱外接球的半径，然后确定球心在上下底面外接圆圆心连线中点，这样根据几何关系，求外接球的半径.

【详解】

ΔABC 中，易知 $AB=4$， $CD=AD=BD=2$

翻折后 $AB=2\sqrt{3}$，

$$\therefore \cos\angle ADB=\frac{2^2+2^2-\left(2\sqrt{3}\right)^2}{2\times 2\times 2}=-\frac{1}{2} ,$$

$\therefore \angle ADB = 120^{\circ}$，

设ΔADB外接圆的半径为r，

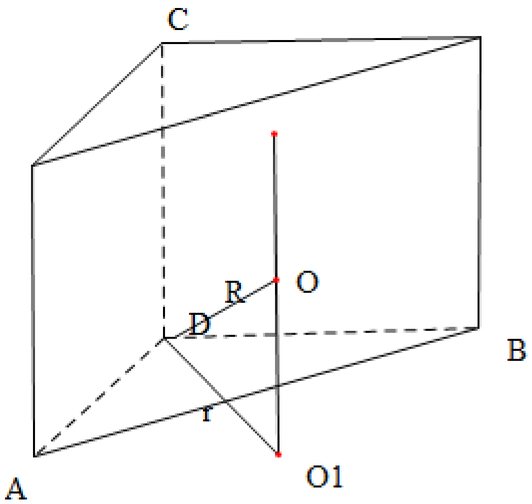
$\therefore \dfrac{2\sqrt{3}}{\sin 120^{\circ}}=2r=4$ ，$\therefore r=2$ ，

如图：易得$CD\perp$平面ABD，将四面体$ABCD$放到直三棱柱中，则球心在上下底面外接圆圆心连线中点，设几何体外接球的半径为R，

$R^2=r^2+1^2=2^2+1^2=5$ ，

$\therefore$ 四面体$ABCD$的外接球的表面积为$S=4\pi R^2=20\pi$.

故选：**D**



【点睛】

本题考查几何体的外接球的表面积，意在考查空间想象能力，和计算能力，属于中档题型，求几何体的外接球的半径时，一般可以用补形法，因正方体，长方体的外接球半径 容易求，可以将一些特殊的几何体补形为正方体或长方体，比如三条侧棱两两垂直的三棱锥，或是构造直角三角形法，确定球心的位置，构造关于外接球半径的方程求解.

2、**B**

【解析】

列举出循环的每一步，可得出输出结果.

【详解】

$i=4$，$S=3$，$S>a^2b^2$不成立，$S=3^2=9$，$i=4+1=5$；

$S>a^2b^2$不成立，$S=9^2=81$，$i=5+1=6$；

$S>a^2b^2$不成立，$S=81^2=6561$，$i=6+1=7$；

$S>a^2b^2$成立，输出i的值为7.

故选：B.

【点睛】

本题考查利用程序框图计算输出结果，一般要将算法的每一步列举出来，考查计算能力，属于基础题.

3、B

【解析】

先根据图象求出函数 $g(x)$ 的解析式,再由平移知识得到 $f(x)$ 的解析式,然后分别找出

$f(x)=\frac{1}{3}$ 和 $g\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 的等价条件,即可根据充分条件,必要条件的定义求出.

【详解】

设 $g(x)=A\sin\left(\omega x+\mu\right)$,根据图象可知,

$A=1,\frac{3}{4}T=\frac{\pi}{6}-\left(-\frac{7\pi}{12}\right)\Rightarrow T=\pi\Rightarrow\omega=2$,

再由 $g\left(-\frac{7\pi}{12}\right)=\sin\left[2\times\left(-\frac{7\pi}{12}\right)+\mu\right]=1$，取 $\mu=-\frac{\pi}{3}$,

$\therefore g(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$.

将函数 $g(x)$ 的图象向右平移 $\frac{3\pi}{4}$ 个单位长度,得到函数 $f(x)$ 的图象,

$\therefore f(x)=g\left(x-\frac{3\pi}{4}\right)=\sin\left[2\left(x-\frac{3\pi}{4}\right)-\frac{\pi}{3}\right]=\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$.

$f(x)=\frac{1}{3}\Leftrightarrow\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{3},g\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{12}\right)=\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}$,

令 $\theta=x-\frac{\pi}{6}$,则 $\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow\cos2\theta=1-2\sin^2\theta=\frac{1}{3}$,显然,$\cos2\theta=\frac{1}{3}\not\Rightarrow\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\therefore f(x)=\frac{1}{3}$ 是 $g\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 的必要不充分条件.

故选：B.

【点睛】

本题主要考查利用图象求正(余)弦型函数的解析式,三角函数的图形变换，二倍角公式的应用,充分条件,必要条件的定义的应用,意在考查学生的数学运算能力和逻辑推理能力,属于中档题.

4、A

【解析】

令$\frac{\square}{e^{\square}}=\square$，构造$\square(\square)=\frac{\square}{e^{\square}}$，要使函数$\square(\square)=\left(\frac{\square}{e^{\square}}\right)^2+\frac{\square\square}{e^{\square}}-\square$有三个不同的零点$\square_1,\square_2,\square_3$（其中$\square_1<\square_2<\square_3$），则方程$\square^2+\square\square-\square=0$需要有两个不同的根$\square_1,\square_2$，则$\square=\square^2+4\square>0$，解得$\square>0$或$\square<-4$，结合$\square(\square)=\frac{\square}{e^{\square}}$的图象，并分$\square>0$，$\square<-4$两个情况分类讨论，可求出$\left(1-\frac{\square_1}{e^{\square_1}}\right)^2\left(1-\frac{\square_2}{e^{\square_2}}\right)\left(1-\frac{\square_3}{e^{\square_3}}\right)$的值.

【详解】

令$\frac{\square}{e^{\square}}=\square$，构造$\square(\square)=\frac{\square}{e^{\square}}$，求导得$\square'(\square)=\frac{1-\square}{e^{\square}}$，当$\square<1$时，$\square'(\square)>0$；当$\square>1$时，$\square'(\square)<0$，

故$\square(\square)$在$(-\infty,1)$上单调递增，在$(1,+\infty)$上单调递减，且$\square<0$时，$\square(\square)<0$，$\square>0$时，$\square(\square)>0$，

$\square(\square)_{\max}=\square(1)=\frac{1}{e}$，可画出函数$\square(\square)$的图象（见下图），要使函数$\square(\square)=\left(\frac{\square}{e^{\square}}\right)^2+\frac{\square\square}{e^{\square}}-\square$有三个不同的零点$\square_1,\square_2,\square_3$（其中$\square_1<\square_2<\square_3$），则方程$\square^2+\square\square-\square=0$需要有两个不同的根$\square_1,\square_2$（其中$\square_1<\square_2$），则$\square=\square^2+4\square>0$，

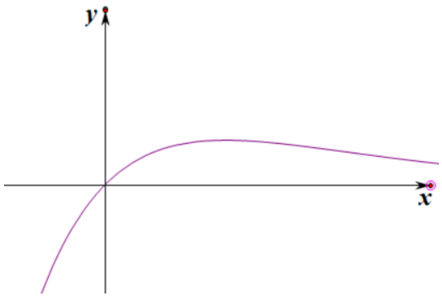
解得$\square>0$或$\square<-4$，且$\begin{cases}\square_1+\square_2=-\square\\ \square_1\cdot\square_2=-\square\end{cases}$，

若$\square>0$，即$\begin{cases}\square_1+\square_2=-\square<0\\ \square_1\cdot\square_2=-\square<0\end{cases}$，则$\square_1<0<\square_2<\frac{1}{e}$，则$\square_1<0<\square_2<1<\square_3$，且$\square(\square_2)=\square(\square_3)=\square_2$，

故$\left(1-\frac{\square_1}{e^{\square_1}}\right)^2\left(1-\frac{\square_2}{e^{\square_2}}\right)\left(1-\frac{\square_3}{e^{\square_3}}\right)=(1-\square_1)^2(1-\square_2)^2=[1-(\square_1+\square_2)+\square_1\square_2]^2=(1+\square-\square)^2=1$，

若$\square<-4$，即$\begin{cases}\square_1+\square_2=-\square>4\\ \square_1\cdot\square_2=-\square>4\end{cases}$，由于$\square(\square)_{\max}=\square(1)=\frac{1}{e}$，故$\square_1+\square_2<\frac{2}{e}<4$，故$\square<-4$不符合题意，舍去.

故选 A.



【点睛】

解决函数零点问题，常常利用数形结合、等价转化等数学思想.

5、**B**

【解析】

易得$z=\frac{2+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$，分子分母同乘以分母的共轭复数即可.

【详解】

由已知，$z-\mathrm{i}=z\mathrm{i}+2$，所以$z=\frac{2+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}=\frac{(2+\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}{2}=\frac{1+3\mathrm{i}}{2}=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\mathrm{i}$.

故选：**B.**

【点睛】

本题考查复数的乘法、除法运算，考查学生的基本计算能力，是一道容易题.

6、**B**

【解析】

根据题意可得：$\tan\alpha=-2$，所求式子利用二倍角的正弦函数公式化简，再利用同角三角函数间的基本关系弦化切后，将$\tan\alpha=-2$代入计算即可求出值.

【详解】

由于直线$y=-2x$的倾斜角为α，所以$\tan\alpha=-2$，

则$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=\frac{2\tan\alpha}{\tan^2\alpha+1}=\frac{-2\times 2}{(-2)^2+1}=-\frac{4}{5}$

故答案选 **B**

【点睛】

本题考查二倍角的正弦函数公式，同角三角函数间的基本关系，以及直线倾斜角与斜率之间的关系，熟练掌握公式是解本题的关键.

7、**D**

【解析】

利用导数的几何意义得直线的斜率，列出 ***a*** 的方程即可求解

【详解】

因为$y'=a-\frac{1}{x}$，且在点$(1,0)$处的切线的斜率为**3**，所以$a-1=3$，即$a=4$.

故选：**D**

【点睛】

本题考查导数的几何意义，考查运算求解能力，是基础题

8、**C**