

烟台市重点中学 2024 年高三数学第一学期期末质量跟踪监视模拟试题

注意事项

1. 考生要认真填写考场号和座位序号。
2. 试题所有答案必须填涂或书写在答题卡上，在试卷上作答无效。第一部分必须用 2B 铅笔作答；第二部分必须用黑色字迹的签字笔作答。
3. 考试结束后，考生须将试卷和答题卡放在桌面上，待监考员收回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 为得到函数 $y = \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ 的图像，只需将函数 $y = \sin 2x$ 的图像 ()

- A. 向右平移 $\frac{5\pi}{6}$ 个长度单位 B. 向右平移 $\frac{5\pi}{12}$ 个长度单位
C. 向左平移 $\frac{5\pi}{6}$ 个长度单位 D. 向左平移 $\frac{5\pi}{12}$ 个长度单位

2. 已知 $x, y \in R$ ，则“ $x < y$ ”是“ $\frac{x}{y} < 1$ ”的 ()

- A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件
C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件

3. 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的焦点分别为 F_1, F_2 ，其中焦点 F_2 与抛物线 $y^2 = 2px$ 的焦点重合，且椭圆与抛物线的两个交点连线正好过点 F_2 ，则椭圆的离心率为 ()

- A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B. $\sqrt{2} - 1$ C. $3 - 2\sqrt{2}$ D. $\sqrt{3} - 1$

4. 已知 S_n 是等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，若 $S_{2018} < S_{2020} < S_{2019}$ ，设 $b_n = a_n a_{n+1} a_{n+2}$ ，则数列 $\left\{\frac{1}{b_n}\right\}$ 的前 n 项和 T_n 取最大值时 n 的值为 ()

- A. 2020 B. 2019 C. 2018 D. 2017

5. 设椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的右顶点为 A ，右焦点为 F ， B, C 为椭圆上关于原点对称的两点，直线 BF 交直线 AC 于 M ，且 M 为 AC 的中点，则椭圆 E 的离心率是 ()

- A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{1}{4}$

6. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的实轴长为 2，离心率为 2， F_1, F_2 分别为双曲线 C 的左、右焦点，点 P

在双曲线 C 上运动, 若 $\triangle F_1PF_2$ 为锐角三角形, 则 $|PF_1| + |PF_2|$ 的取值范围是 ()

- A. $(2\sqrt{7}, 8)$ B. $(2\sqrt{5}, 7)$ C. $(2\sqrt{5}, 8)$ D. $(2\sqrt{7}, 7)$

7. 宁波古圣王阳明的《传习录》专门讲过易经八卦图, 下图是易经八卦图 (含乾、坤、巽、震、坎、离、艮、兑八卦), 每一卦由三根线组成 (“—”表示一根阳线, “——”表示一根阴线). 从八卦中任取两卦, 这两卦的六根线中恰有四根阴线的概率为 ()



- A. $\frac{5}{14}$ B. $\frac{3}{14}$ C. $\frac{3}{28}$ D. $\frac{5}{28}$

8. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - y^2 = 1$ 的一条渐近线方程是 $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$, 则双曲线的离心率为 ()

- A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ B. $\frac{\sqrt{6}}{3}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

9. 在 $\triangle ABC$ 中, “ $\cos A < \cos B$ ”是“ $\sin A > \sin B$ ”的 ()

- A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件
C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件

10. 设抛物线 $y^2 = 4x$ 上一点 P 到 y 轴的距离为 d_1 , 到直线 $l: 3x + 4y + 12 = 0$ 的距离为 d_2 , 则 $d_1 + d_2$ 的最小值为 ()

- A. 2 B. $\frac{15}{3}$ C. $\frac{16}{3}$ D. 3

11. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 若 $c - a \cos B = (2a - b) \cos A$, 则 $\triangle ABC$ 的形状为 ()

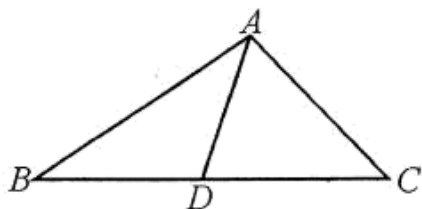
- A. 直角三角形 B. 等腰非等边三角形
C. 等腰或直角三角形 D. 钝角三角形

12. 已知函数 $f(x) = 2 \cos x \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + m$ ($m \in \mathbf{R}$) 的部分图象如图所示. 则 $x_0 =$ ()

(1) 若 $f(x) \leq 0$ 恒成立, 求 a 的取值范围;

(2) 设函数 $f(x)$ 的极值点为 x_0 , 当 a 变化时, 点 $(x_0, f(x_0))$ 构成曲线 M , 证明 过原点的任意直线 $y = kx$ 与曲线 M 有且仅有一个公共点.

21. (12 分) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 点 D 在 BC 上, $\angle CAD = \frac{\pi}{4}$, $AC = \frac{7}{2}$, $\cos \angle ADB = -\frac{\sqrt{2}}{10}$.



(1) 求 $\sin C$ 的值;

(2) 若 $BD = 5$, 求 AB 的长.

22. (10 分) 设数列 $\{a_n\}$ 是公差不为零的等差数列, 其前 n 项和为 S_n , $a_1 = 1$, 若 a_1, a_2, a_5 成等比数列.

(1) 求 a_n 及 S_n ;

(2) 设 $b_n = \frac{1}{a_{n+1}^2 - 1}$ ($n \in N^*$), 设数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n , 证明: $T_n < \frac{1}{4}$.

参考答案

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1、D

【解析】

$y = \cos(2x + \frac{\pi}{3}) = \sin(2x + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}) = \sin(2x + \frac{5\pi}{6}) = \sin 2(x + \frac{5\pi}{12})$, 所以要的函数 $y = \cos(2x + \frac{\pi}{3})$ 的图象, 只需将函数 $y = \sin 2x$ 的图象向左平移 $\frac{5\pi}{12}$ 个长度单位得到, 故选 D

2、D

【解析】

$x < y$, 不能得到 $\frac{x}{y} < 1$, $\frac{x}{y} < 1$ 成立也不能推出 $x < y$, 即可得到答案.

【详解】

因为 $x, y \in R$,

当 $x < y$ 时, 不妨取 $x = -1, y = -\frac{1}{2}$, $\frac{x}{y} = 2 > 1$,

故 $x < y$ 时, $\frac{x}{y} < 1$ 不成立,

当 $\frac{x}{y} < 1$ 时, 不妨取 $x = 2, y = -1$, 则 $x < y$ 不成立,

综上所述, “ $x < y$ ”是“ $\frac{x}{y} < 1$ ”的既不充分也不必要条件,

故选: **D**

【点睛】

本题主要考查了充分条件, 必要条件的判定, 属于容易题.

3、**B**

【解析】

根据题意可得易知 $c = \frac{p}{2}$, 且 $\begin{cases} a^2 - b^2 = \frac{p^2}{4} \\ p^2 b^2 + 4p^2 a^2 = 4a^2 b^2 \end{cases}$, 解方程可得 $\begin{cases} a^2 = \frac{2\sqrt{2}+3}{4} p^2 \\ b^2 = \frac{\sqrt{2}+1}{2} p^2 \end{cases}$, 再利用 $e^2 = \frac{c^2}{a^2}$ 即可求解.

【详解】

易知 $c = \frac{p}{2}$, 且 $\begin{cases} a^2 - b^2 = \frac{p^2}{4} \\ p^2 b^2 + 4p^2 a^2 = 4a^2 b^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = \frac{2\sqrt{2}+3}{4} p^2 \\ b^2 = \frac{\sqrt{2}+1}{2} p^2 \end{cases}$

故有 $e^2 = \frac{c^2}{a^2} = 3 - 2\sqrt{2}$, 则 $e = \sqrt{3 - 2\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1$

故选: **B**

【点睛】

本题考查了椭圆的几何性质、抛物线的几何性质, 考查了学生的计算能力, 属于中档题

4、**B**

【解析】

根据题意计算 $a_{2019} > 0$, $a_{2020} < 0$, $a_{2019} + a_{2020} > 0$, 计算 $\frac{1}{b_{2018}} < 0$, $\frac{1}{b_{2019}} > 0$, $\frac{1}{b_{2018}} + \frac{1}{b_{2019}} > 0$, 得到答案.

【详解】

S_n 是等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 若 $S_{2018} < S_{2020} < S_{2019}$,

故 $a_{2019} > 0$, $a_{2020} < 0$, $a_{2019} + a_{2020} > 0$, $b_n = a_n a_{n+1} a_{n+2}$, 故 $\frac{1}{b_n} = \frac{1}{a_n a_{n+1} a_{n+2}}$,

当 $n \leq 2017$ 时, $\frac{1}{b_n} > 0$, $\frac{1}{b_{2018}} = \frac{1}{a_{2018} a_{2019} a_{2020}} < 0$, $\frac{1}{b_{2019}} = \frac{1}{a_{2019} a_{2020} a_{2021}} > 0$,

$$\frac{1}{b_{2018}} + \frac{1}{b_{2019}} = \frac{1}{a_{2018} a_{2019} a_{2020}} + \frac{1}{a_{2019} a_{2020} a_{2021}} = \frac{a_{2019} + a_{2020}}{a_{2018} a_{2019} a_{2020} a_{2021}} > 0,$$

当 $n \geq 2020$ 时, $\frac{1}{b_n} < 0$, 故前 2019 项和最大.

故选: B.

【点睛】

本题考查了数列和的最值问题, 意在考查学生对于数列公式方法的综合应用.

5、C

【解析】

连接 OM , OM 为 $\triangle ABC$ 的中位线, 从而 $\triangle OFM : \triangle AFB$, 且 $\frac{|OF|}{|FA|} = \frac{1}{2}$, 进而 $\frac{c}{a-c} = \frac{1}{2}$, 由此能求出椭圆的离心率.

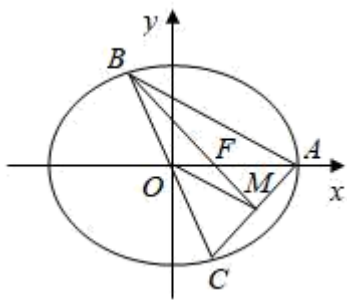
【详解】

如图, 连接 OM ,

Q 椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的右顶点为 A , 右焦点为 F ,

B 、 C 为椭圆上关于原点对称的两点, 不妨设 B 在第二象限,

直线 BF 交直线 AC 于 M , 且 M 为 AC 的中点



$\therefore OM$ 为 $\triangle ABC$ 的中位线,

$\therefore \triangle OFM : \triangle AFB$, 且 $\frac{|OF|}{|FA|} = \frac{1}{2}$,

$$\therefore \frac{c}{a-c} = \frac{1}{2},$$

解得椭圆 E 的离心率 $e = \frac{c}{a} = \frac{1}{3}$.

故选: C

【点睛】

本题考查了椭圆的几何性质, 考查了运算求解能力, 属于基础题.

6、A

【解析】

由已知先确定出双曲线方程为 $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$, 再分别找到 $\triangle F_1PF_2$ 为直角三角形的两种情况, 最后再结合

$|PF_1| - |PF_2| = 2$ 即可解决.

【详解】

由已知可得 $2a = 2$, $\frac{c}{a} = 2$, 所以 $a = 1, c = 2, b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{3}$, 从而双曲线方程为

$x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$, 不妨设点 P 在双曲线 C 右支上运动, 则 $|PF_1| - |PF_2| = 2$, 当 $|PF_1| \perp |PF_2|$ 时,

此时 $|PF_1|^2 + |PF_2|^2 = 16 = (|PF_1| - |PF_2|)^2 + 2|PF_1||PF_2|$, 所以 $|PF_1||PF_2| = 6$,

$(|PF_1| + |PF_2|)^2 = |PF_1|^2 + |PF_2|^2 + 2|PF_1||PF_2| = 28$, 所以 $|PF_1| + |PF_2| = 2\sqrt{7}$;

当 $|PF_2| \perp x$ 轴时, $|PF_1|^2 = |PF_2|^2 + 16$, 所以 $|PF_1| + |PF_2| = \frac{16}{2} = 8$, 又 $\triangle F_1PF_2$ 为锐角三

角形, 所以 $|PF_1| + |PF_2| \in (2\sqrt{7}, 8)$.

故选: A.

【点睛】

本题考查双曲线的性质及其应用，本题的关键是找到 $\triangle F_1PF_2$ 为锐角三角形的临界情况，即 $\triangle F_1PF_2$ 为直角三角形，是一道中档题.

7、B

【解析】

根据古典概型的概率求法，先得到从八卦中任取两卦基本事件的总数，再找出这两卦的六根线中恰有四根阴线的基本事件数，代入公式求解.

【详解】

从八卦中任取两卦基本事件的总数 $n = C_8^2 = 28$ 种，

这两卦的六根线中恰有四根阴线的基本事件数有 6 种，

分别是（巽，坤），（兑，坤），（离，坤），（震，艮），（震，坎），（坎，艮），

所以这两卦的六根线中恰有四根阴线的概率是 $p = \frac{6}{28} = \frac{3}{14}$.

故选：B

【点睛】

本题主要考查古典概型的概率，还考查了运算求解的能力，属于基础题.

8、D

【解析】

双曲线的渐近线方程是 $y = \pm \frac{1}{a}x$ ，所以 $\frac{1}{a} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ，即 $a = \sqrt{3}, b = 1$ ， $c^2 = a^2 + b^2 = 4$ ，即 $c = 2$ ， $e = \frac{c}{a} = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{3}$ ，

故选 D.

9、C

【解析】

由余弦函数的单调性找出 $\cos A < \cos B$ 的等价条件为 $A > B$ ，再利用大角对大边，结合正弦定理可判断出“ $\cos A < \cos B$ ”是“ $\sin A > \sin B$ ”的充分必要条件.

【详解】

Q 余弦函数 $y = \cos x$ 在区间 $(0, \pi)$ 上单调递减，且 $0 < A < \pi$ ， $0 < B < \pi$ ，

由 $\cos A < \cos B$ ，可得 $A > B$ ， $\therefore a > b$ ，由正弦定理可得 $\sin A > \sin B$ 。

因此，“ $\cos A < \cos B$ ”是“ $\sin A > \sin B$ ”的充分必要条件.

故选：C.

【点睛】

本题考查充分必要条件的判定，同时也考查了余弦函数的单调性、大角对大边以及正弦定理的应用，考查推理能力，属于中等题.

10、A

【解析】

分析：题设的直线与抛物线是相离的， $d_1 + d_2$ 可以化成 $d_1 + 1 + d_2 - 1$ ，其中 $d_1 + 1$ 是点 P 到准线的距离，也就是 P 到焦点的距离，这样我们从几何意义得到 $d_1 + 1 + d_2$ 的最小值，从而得到 $d_1 + d_2$ 的最小值.

详解：由 $\begin{cases} y^2 = 4x \\ 3x + 4y + 12 = 0 \end{cases}$ ①得到 $3y^2 + 16y + 48 = 0$ ， $\Delta = 256 - 12 \times 48 < 0$ ，故①无解，

所以直线 $3x + 4y + 12 = 0$ 与抛物线是相离的.

由 $d_1 + d_2 = d_1 + 1 + d_2 - 1$ ，

而 $d_1 + 1$ 为 P 到准线 $x = -1$ 的距离，故 $d_1 + 1$ 为 P 到焦点 $F(1, 0)$ 的距离，

从而 $d_1 + 1 + d_2$ 的最小值为 F 到直线 $3x + 4y + 12 = 0$ 的距离 $\frac{|1 \times 3 + 0 \times 4 + 12|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 3$ ，

故 $d_1 + d_2$ 的最小值为 2，故选 A.

点睛：抛物线中与线段的长度相关的最值问题，可利用抛物线的几何性质把动线段的长度转化为到准线或焦点的距离来求解.

11、C

【解析】

利用正弦定理将边化角，再由 $\sin(A + B) = \sin C$ ，化简可得 $\sin B \cos A = \sin A \cos A$ ，最后分类讨论可得；

【详解】

解：因为 $c - a \cos B = (2a - b) \cos A$

所以 $\sin C - \sin A \cos B = (2 \sin A - \sin B) \cos A$

所以 $\sin C - \sin A \cos B = 2 \sin A \cos A - \sin B \cos A$

所以 $\sin(A + B) - \sin A \cos B = 2 \sin A \cos A - \sin B \cos A$

所以 $\sin A \cos B + \sin B \cos A - \sin A \cos B = 2 \sin A \cos A - \sin B \cos A$

所以 $\sin B \cos A = \sin A \cos A$

当 $\cos A = 0$ 时 $A = \frac{\pi}{2}$ ， $\triangle ABC$ 为直角三角形；

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/618073120007006051>