经典三类球:外接球、内切球、棱切球

1【考点预测】

考点一:正方体、长方体外接球

1. 正方体的外接球的球心为其体对角线的中点,半径为体对角线长的一半.

2. 长方体的外接球的球心为其体对角线的中点,半径为体对角线长的一半.

3. 补成长方体

(1) 若三棱锥的三条侧棱两两互相垂直,则可将其放入某个长方体内,如图1所示.

(2) 若三棱锥的四个面均是直角三角形,则此时可构造长方体,如图2所示.

(3) 正四面体 $P-ABC$ 可以补形为正方体且正方体的棱长 $a=\dfrac{PA}{\sqrt{2}}$,如图3所示.

(4) 若三棱锥的对棱两两相等,则可将其放入某个长方体内,如图4所示

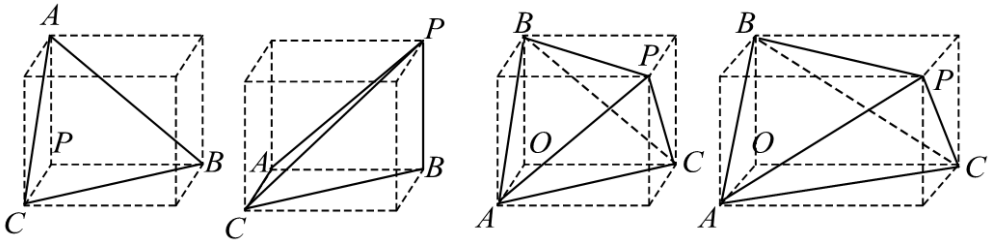
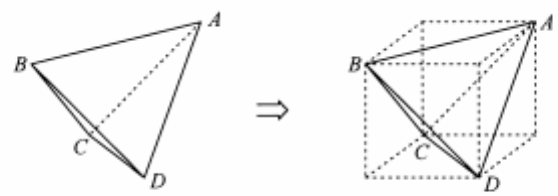


图1　　图2　　图3　　图4

考点二:正四面体外接球

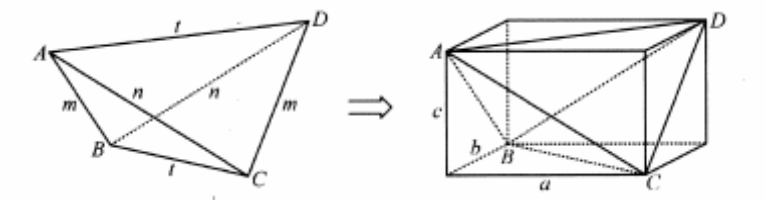
如图,设正四面体 $ABCD$ 的的棱长为 a,将其放入正方体中,则正方体的棱长为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}a$,显然正四面体和正方体有相同的外接球. 正方体外接球半径为 $R=\dfrac{\sqrt{2}}{2}a\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\sqrt{6}}{4}a$,即正四面体外接球半径为 $R=\dfrac{\sqrt{6}}{4}a$.



考点三:对棱相等的三棱锥外接球

四面体 $ABCD$ 中,$AB=CD=m$,$AC=BD=n$,$AD=BC=t$,这种四面体叫做对棱相等四面体,可以通过构造长方体来解决这类问题.

如图,设长方体的长、宽、高分别为 a,b,c,则 $\begin{cases}b^2+c^2=m^2\\a^2+c^2=n^2\\a^2+b^2=t^2\end{cases}$,三式相加可得 $a^2+b^2+c^2=\dfrac{m^2+n^2+t^2}{2}$,而显然四面体和长方体有相同的外接球,设外接球半径为 R,则 $a^2+b^2+c^2=4R^2$,所以 $R=\sqrt{\dfrac{m^2+n^2+t^2}{8}}$.



考点四：直棱柱外接球

如图1，图2，图3，直三棱柱内接于球(同时直棱柱也内接于圆柱，棱柱的上下底面可以是任意三角形)

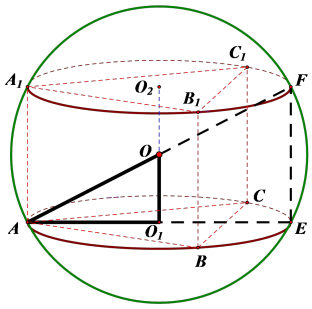


图1

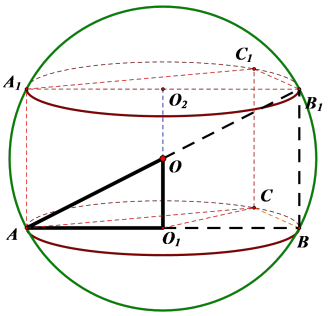


图2

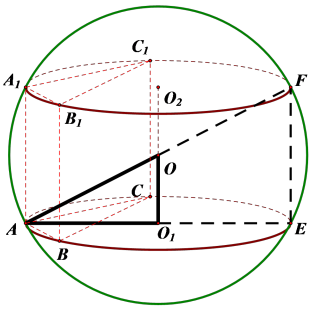


图3

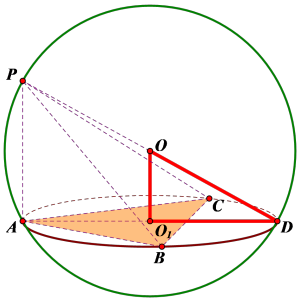
第一步：确定球心 O 的位置，O_1 是 ΔABC 的外心，则 $OO_1\perp$ 平面 ABC；

第二步：算出小圆 O_1 的半径 $AO_1=r$，$OO_1=\frac{1}{2}AA_1=\frac{1}{2}h(AA_1=h$ 也是圆柱的高)；

第三步：勾股定理：$OA^2=O_1A^2+O_1O^2\Rightarrow R^2=\left(\frac{h}{2}\right)^2+r^2\Rightarrow R=\sqrt{r^2+\left(\frac{h}{2}\right)^2}$，解出 R

考点五：直棱锥外接球

如图，$PA\perp$ 平面 ABC，求外接球半径.



解题步骤：

第一步：将 ΔABC 画在小圆面上，A 为小圆直径的一个端点，作小圆的直径 AD，连接 PD，则 PD 必过球心 O；

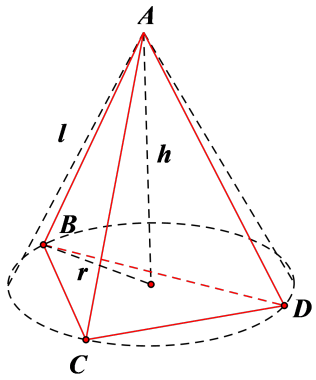
第二步：O_1 为 ΔABC 的外心，所以 $OO_1\perp$ 平面 ABC，算出小圆 O_1 的半径 $O_1D=r$(三角形的外接圆直径算法：利用正弦定理，得 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2r$)，$OO_1=\frac{1}{2}PA$；

第三步：利用勾股定理求三棱锥的外接球半径：① $(2R)^2=PA^2+(2r)^2\Leftrightarrow 2R=\sqrt{PA^2+(2r)^2}$；

② $R^2=r^2+OO_1^2\Leftrightarrow R=\sqrt{r^2+OO_1^2}$.

考点六：正棱锥外接球

正棱锥外接球半径：$R=\dfrac{r^2+h^2}{2h}$.



考点七：垂面模型

如图1所示为四面体 $P-ABC$，已知平面 $PAB\perp$ 平面 ABC，其外接球问题的步骤如下：

(1) 找出 $\triangle PAB$ 和 $\triangle ABC$ 的外接圆圆心，分别记为 O_1 和 O_2.

(2) 分别过 O_1 和 O_2 作平面 PAB 和平面 ABC 的垂线，其交点为球心，记为 O.

(3) 过 O_1 作 AB 的垂线，垂足记为 D，连接 O_2D，则 $O_2D\perp AB$.

(4) 在四棱锥 $A-DO_1OO_2$ 中，AD 垂直于平面 DO_1OO_2，如图2所示，底面四边形 DO_1OO_2 的四个顶点共圆且 OD 为该圆的直径.

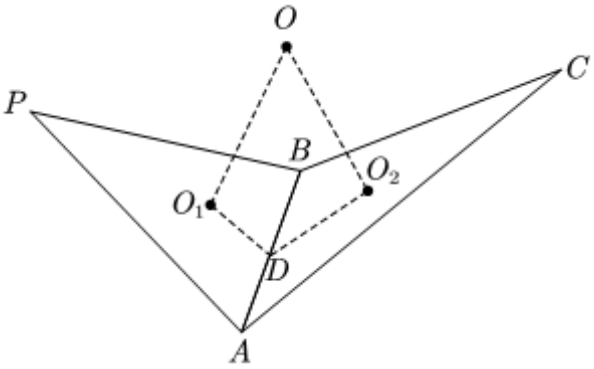


图1

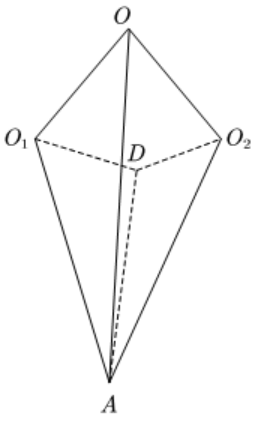


图2

考点八：锥体内切球

方法：等体积法，即 $R=\dfrac{3V_{体积}}{S_{表面积}}$

考点九：棱切球

方法：找切点，找球心，构造直角三角形

【典型例题】

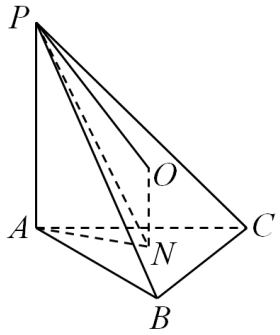
例 1 (2023春·天津宁河·高一校考期末) 在三棱锥 $P-ABC$ 中，$AP=2,AB=\sqrt{3},PA\perp$ 面 ABC，且在

$\triangle ABC$中，$C=60°$，则该三棱锥外接球的表面积为（　　）

A. $\frac{20\pi}{3}$　　B. 8π　　C. 10π　　D. 12π

【答案】B

【解析】根据题意得出图形如右图：



O为球心，N为底面$\triangle ABC$截面圆的圆心，$ON\perp$面ABC，

$\because$在三棱锥$P-ABC$中，$AP=2$，$AB=\sqrt{3}$，$PA\perp$面ABC，且在$\triangle ABC$中，$C=60°$

$\therefore$根据正弦定理得出：$\frac{\sqrt{3}}{\sin 60°}=2r$，解得$r=1$，

$\because PA\perp$面ABC，$\therefore PA\parallel ON$，

$\because PA=2$，$AN=1$，$ON=d$，

$\therefore OA=OP=R$，

$\therefore$根据等腰三角形得出：$1^2+d^2=(2-d)^2+1^2$，

解得$d=1$，$\therefore R=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$

$\therefore$三棱锥的外接球的表面积为$4\pi R^2=8\pi$.

故选：B.

例 2 (2023·辽宁沈阳·高一东北育才学校校考阶段练习) 在正三棱锥$S-ABC$中，外接球的表面积为36π，M，N分别是SC，BC的中点，且$MN\perp AM$，则此三棱锥侧棱$SA=$（　　）

A. 1　　B. 2　　C. $\sqrt{3}$　　D. $2\sqrt{3}$

【答案】D

【解析】取AC的中点E，连结BE、SE，

$\because$三棱锥$S-ABC$正棱锥，$\therefore SA=SC$，$BA=BC$.

又$\because E$为AC的中点，$\therefore SE\perp AC$且$BE\perp AC$

$\because SE$、BE是平面SBE内的相交直线，

$\therefore AC\perp$平面SBE，又SB在平面SBE内

可得$SB\perp AC$

又$\because MN$是$\triangle SBC$的中位线，

$\therefore MN\parallel SB$，可得$MN\perp AC$

又∵$MN\perp AM$，又AM，AC是平面SAC内的相交直线，

∴$MN\perp$平面SAC，结合$MN/\!/SB$，可得$SB\perp$平面SAC

又∵三棱锥$S-ABC$是正三棱锥，

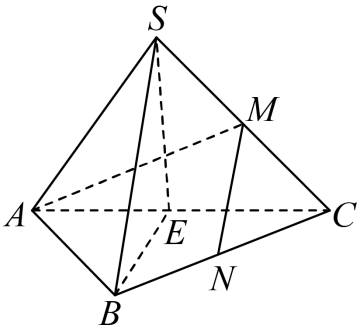
∴$\angle ASB=\angle BSC=\angle ASC=90^\circ$，

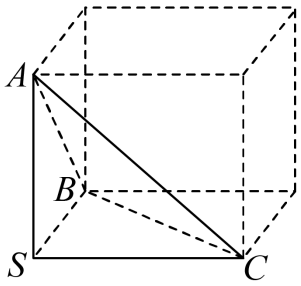
因此将此三棱锥补成正方体，则它们有相同的外接球，

设球的半径为R，可得$4\pi R^2=36\pi$，解得$R=3$，

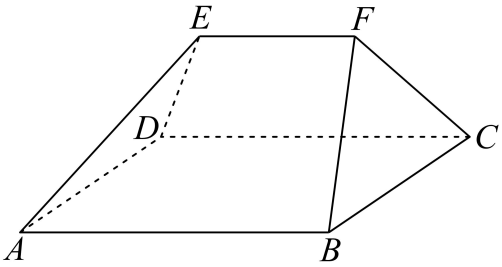
∴$\sqrt{SA^2+SA^2+SA^2}=2R=6$，解之得$SA=2\sqrt{3}$

故选：D





例 3 (2023春·河南南阳·高一校联考期末)《九章算术》是我国古代著名的数学著作，书中记载有几何体“刍甍”．现有一个刍甍如图所示，底面$ABCD$为正方形，$EF/\!/$平面$ABCD$，四边形$ABFE$，$CDEF$为两个全等的等腰梯形，$EF=\frac{1}{2}AB=2$，$AE=2\sqrt{3}$则该刍甍的外接球的体积为（　　）



A. $\frac{64\sqrt{2}\pi}{3}$　　B. 3π　　C. $\frac{64\sqrt{3}\pi}{3}$　　D. $64\sqrt{2}\pi$

【答案】A

【解析】取AD，BC中点N，M，正方形$ABCD$中心O，EF中点O_2，连接EN，MN，FM，OO_2，如图，

依题意，$OO_2\perp$ 平面 $ABCD$，$EF\parallel AB\parallel MN$，点 O 是 MN 的中点，$MN=AB=4$，

等腰 $\triangle AED$ 中，$AD\perp EN$，$EN=\sqrt{AE^2-AN^2}=2\sqrt{2}$，同理 $FM=2\sqrt{2}$，

因此，等腰梯形 $EFMN$ 的高 $OO_2=\sqrt{EN^2-\left(\dfrac{MN-EF}{2}\right)^2}=\sqrt{7}$，由几何体的结构特征知，

刍甍的外接球球心 O_1 在直线 OO_2 上，连 O_1E，O_1A，OA，正方形 $ABCD$ 外接圆半径 $OA=2\sqrt{2}$，

则有 $\begin{cases}O_1A^2=OA^2+OO_1^2\\O_1E^2=O_2E^2+O_2O_1^2\end{cases}$，而 $O_1A=O_1E$，$O_2E=\dfrac{1}{2}EF=1$，

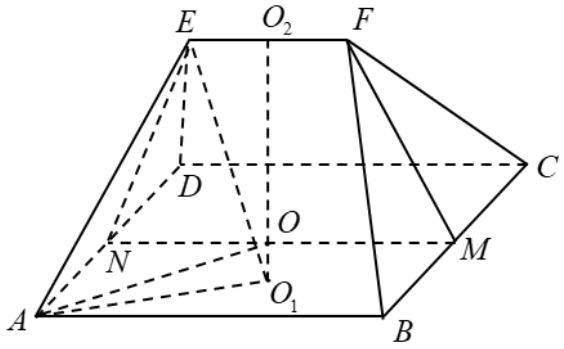
当点 O_1 在线段 O_2O 的延长线（含点 O）时，视 OO_1 为非负数，若点 O_1 在线段 O_2O（不含点 O）上，视 OO_1 为负数，

即有 $O_2O_1=O_2O+OO_1=\sqrt{7}+OO_1$，即 $(2\sqrt{2})^2+OO_1^2=1+(\sqrt{7}+OO_1)^2$，解得 $OO_1=0$，

因此刍甍的外接球球心为 O，半径为 $OA=2\sqrt{2}$，

所以刍甍的外接球的体积为 $\dfrac{4\pi}{3}\times(2\sqrt{2})^3=\dfrac{64\sqrt{2}\pi}{3}$.

故选：A.



例 4 (2023·高一课时练习) 已知圆台的上下底面半径分别为 1 和 2，侧面积为 $3\sqrt{5}\pi$，则该圆台的外接球半径为（　　）

A. $\dfrac{\sqrt{105}}{5}$　　B. $\dfrac{\sqrt{65}}{4}$　　C. $\dfrac{\sqrt{185}}{4}$　　D. $\dfrac{\sqrt{105}}{4}$

【答案】B

【解析】设圆台的高和母线分别为 h,l，球心到圆台上底面的距离为 x，

根据圆台的侧面积公式可得 $\pi(1+2)l=3\sqrt{5}\pi\Rightarrow l=\sqrt{5}$，

因此圆台的高 $h=\sqrt{l^2-(2-1)^2}=2$，

当球心在圆台内部时，则 $1^2+x^2=2^2+(h-x)^2$，解得 $x=\dfrac{7}{4}$，故此时外接球半径为 $\sqrt{1+x^2}=\sqrt{\dfrac{65}{16}}=\dfrac{\sqrt{65}}{4}$，

当球心在圆台外部时，则 $1^2+x^2=2^2+(x-h)^2$，$x>h$，解得 $x=\dfrac{7}{4}$ 不符合要求，舍去，

故球半径为 $\dfrac{\sqrt{65}}{4}$

故选：B

例 5 (2023·高一课时练习) 已知圆锥的底面半径为 2，高为 $4\sqrt{2}$，则该圆锥的内切球表面积为（　　）

A. 4π　　B. $4\sqrt{2}\pi$　　C. $8\sqrt{2}\pi$　　D. 8π

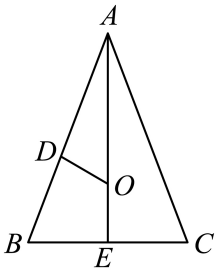
【答案】D

【解析】如图，圆锥与内切球的轴截面图，点 O 为球心，内切球的半径为 r，D,E 为切点，设 $OD=OE=r$，即 $BE=BD=2$

由条件可知，$AB=\sqrt{(4\sqrt{2})^2+2^2}=6$，

$\triangle ADO$ 中，$AO^2=AD^2+DO^2$，即 $(4\sqrt{2}-r)^2=(6-2)^2+r^2$，解得：$r=\sqrt{2}$，

所以圆锥内切球的表面积 $S=4\pi r^2=8\pi$.



故选：D

例 6 (2023·高一课时练习) 一个正四棱柱的每个顶点都在球 O 的球面上，且该四棱柱的底面面积为 3，高为 $\sqrt{10}$，则球 O 的体积为（　　）

A. 16π　　B. $\frac{32\pi}{3}$　　C. 10π　　D. $\frac{28\pi}{3}$

【答案】B

【解析】设该正四棱柱的底面边长为 a，高为 h，则 $a^2=3$,$h=\sqrt{10}$，解得 $a=\sqrt{3}$，

所以该正四棱柱的体对角线为球 O 的直径，

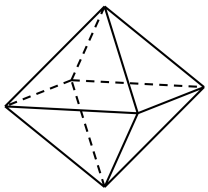
设球 O 的半径为 R，

所以，$2R=\sqrt{a^2+a^2+h^2}=\sqrt{3+3+10}=4$，即 $R=2$，

所以，球 O 的体积为 $\frac{4\pi}{3}\times 2^3=\frac{32\pi}{3}$.

故选：B

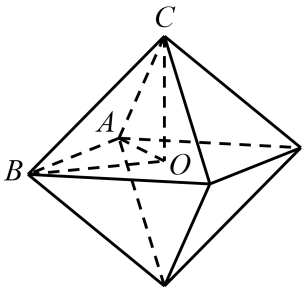
例 7 (2023·高一课时练习) 正八面体是每个面都是正三角形的八面体．如图所示，若此正八面体的棱长为 2，则它的内切球的表面积为（　　）



A. $\frac{4\sqrt{2}}{3}\pi$　　B. $\frac{8\sqrt{3}}{27}\pi$　　C. $\frac{8}{3}\pi$　　D. $\frac{16}{3}\pi$

【答案】C

【解析】以内切球的球心为顶点、正八面体的八个面为底面，可将正八面体分为 8 个全等的正三棱锥，设内切球的半径为 r，则 $8V_{三棱锥}=V_{正八面体}=2V_{正四棱锥}$，



且正四棱锥的高为图中 CO，易得 $CO=\sqrt{2}$，即：

$8\times\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times2\times2\times\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot r=2\times\frac{1}{3}\times(2\times2)\times\sqrt{2}$

解得：$r=\frac{\sqrt{6}}{3}$，所以，内切球的表面积为 $\frac{8\pi}{3}$.

故选：C.

例 8 (2023·高一课时练习) 已知 A，B，C 三点均在球 O 的表面上，$AB=BC=CA=2$，且球心 O 到平面 ABC 的距离等于球半径的 $\frac{1}{3}$，则下列结论正确的为（　　）

A. 球 O 的外切正方体的棱长为 $\sqrt{6}$　　B. 球 O 的表面积为 8π

C. 球 O 的内接正方体的棱长为 $\sqrt{3}$　　D. 球 O 的半径为 $\frac{3}{2}$

【答案】A

【解析】设球 O 的半径为 R，$\triangle ABC$ 的外接圆半径为 r，则 $r=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，

因为球心 O 到平面 ABC 的距离等于球 O 半径的 $\frac{1}{3}$，

所以 $R^2-\frac{1}{9}R^2=\frac{4}{3}$，得 $R^2=\frac{3}{2}$，即 $R=\frac{\sqrt{6}}{2}$，故 D 错误；

球 O 的外切正方体的棱长 b 满足 $b=2R=\sqrt{6}$，故 A 正确；

所以球 O 的表面积 $S=4\pi R^2=4\pi\times\frac{3}{2}=6\pi$，故 B 错误；

球 O 的内接正方体的棱长 a 满足 $\sqrt{3}a=2R=\sqrt{6}$，即 $a=\sqrt{2}$，故 C 错误.

故选：A.

例 9 (2023·河南开封·开封高中校考模拟预测) 已知某棱长为 $2\sqrt{2}$ 的正四面体的各条棱都与同一球面相切，则该球与此正四面体的体积之比为（　　）

A. $\frac{\pi}{2}$　　B. $\frac{\pi}{3}$　　C. $\frac{\sqrt{3}\pi}{3}$　　D. $\frac{\sqrt{2}\pi}{2}$

【答案】A

【解析】如图，正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，棱长为 2，

所以，四面体 A_1BDC_1 是棱长为 $2\sqrt{2}$ 的正四面体，

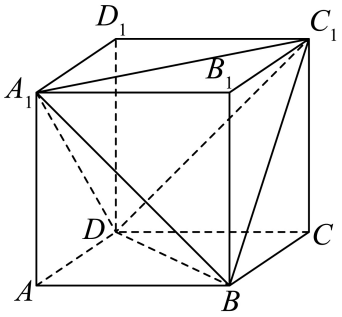
当正四面体的各条棱都与同一球面相切时，该球为正方体的内切球，半径为 1，

所以，该球的体积为 $\frac{4\pi}{3}$，

因为正四面体的体积为 $8-4\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times2\times2\times2=8-\frac{16}{3}=\frac{8}{3}$，

所以，该球与此正四面体的体积之比为 $\frac{\frac{4\pi}{3}}{\frac{8}{3}}=\frac{\pi}{2}$.

故选：A



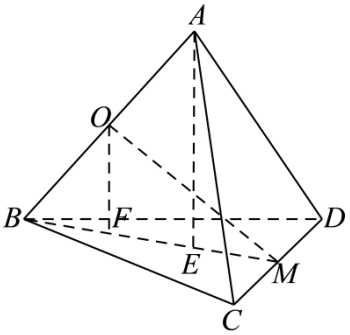
例 10 (2023·高一课时练习) 正四面体 $ABCD$ 的棱长为 a，O 是棱 AB 的中点，以 O 为球心的球面与平面 BCD 的交线和 CD 相切，则球 O 的体积是（　　）

A. $\frac{1}{6}\pi a^3$　　B. $\frac{\sqrt{2}}{6}\pi a^3$　　C. $\frac{\sqrt{3}}{6}\pi a^3$　　D. $\frac{\sqrt{2}}{3}\pi a^3$

【答案】D

【解析】设点 A 在平面 BCD 内的射影为点 E，则 E 为 $\triangle BCD$ 的中心，

取 CD 的中点 M，连接 BM，则 $E\in BM$，取线段 BE 的中点 F，连接 OF，



因为 O、F 分别为 AB、BE 的中点，则 $OF\parallel AE$ 且 $OF=\frac{1}{2}AE$，

因为 $AE\perp$ 平面 BCD，则 $OF\perp$ 平面 BCD，因为 $BE\subset$ 平面 BCD，则 $AE\perp BE$，

正$\triangle BCD$的外接圆半径为$BE=\dfrac{a}{2\sin\frac{\pi}{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}a$，$\therefore AE=\sqrt{AB^2-BE^2}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}a$，

所以，$OF=\dfrac{1}{2}AE=\dfrac{\sqrt{6}}{6}a$，

易知球O被平面BCD所截的截面圆圆心为点F，且$BF=EF=EM$，故$FM=BE=\dfrac{\sqrt{3}}{3}a$，

因为$\triangle BCD$为等边三角形，M为CD的中点，则$BM\perp CD$，

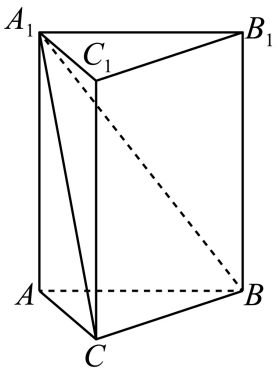
因为以O为球心的球面与平面BCD的交线和CD相切，则切点为点M，

则球O的半径为$OM=\sqrt{OF^2+FM^2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}a$，

因此，球O的体积是$V=\dfrac{4}{3}\pi\times\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}a\right)^3=\dfrac{\sqrt{2}}{3}\pi a^3$.

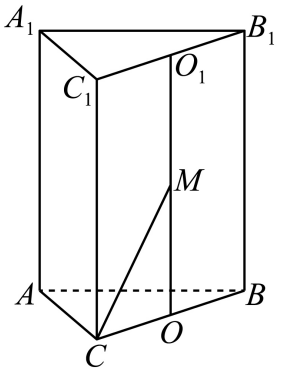
故选：D.

例 11 (2023·高一课时练习) 已知直三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$的底面为直角三角形，如图所示，$\angle BAC=90°$，$AB=1$，$AC=2$，$AA_1=3$，则四面体$A-A_1BC$的体积为 _____，四棱锥$A_1-BCC_1B_1$的外接球的表面积为 _____.



【答案】 1 14π

【解析】



由题意可得$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}\times|AB|\cdot|AC|=\dfrac{1}{2}\times2\times1=1$，且$h=AA_1$，则$V_{A-A_1BC}=\dfrac{1}{3}S_{\triangle ABC}\cdot h=\dfrac{1}{3}\times1\times3=1$

因为$\triangle ABC$外接圆的圆心即为BC中点，设为O，

$\triangle A_1B_1C_1$外接圆的圆心即为B_1C_1中点，设为O_1，

则OO_1的中点到六个顶点的距离相等，

则OO_1的中点M为外接球的球心，即$|CM|$为半径，

$|OC|=\frac{1}{2}|BC|=\frac{1}{2}\sqrt{|AC|^2+|AB|^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}$，$|OM|=\frac{1}{2}|AA_1|=\frac{3}{2}$

所以$|CM|=\sqrt{|OC|^2+|OM|^2}=\sqrt{\frac{5}{4}+\frac{9}{4}}=\frac{\sqrt{14}}{2}$，

即外接球的表面积为$4\pi R^2=4\pi\times\frac{14}{4}=14\pi$

故答案为:1，14π

2【过关测试】

一、单选题

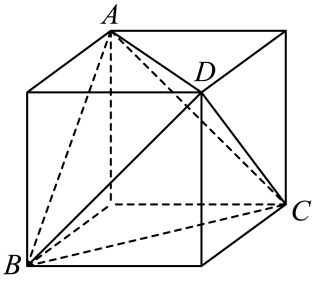
题目 1 (2023·高一课时练习) 若正四面体的表面积为$8\sqrt{3}$，则其外接球的体积为（　　）

A. $4\sqrt{3}\pi$　　B. 12π　　C. $8\sqrt{6}\pi$　　D. $32\sqrt{3}\pi$

【答案】A

【解析】设正四面体的棱长为a，由题意可知：$4\times\frac{\sqrt{3}}{4}a^2=8\sqrt{3}$，解得：$a=2\sqrt{2}$，

所以正四面体的棱长为$2\sqrt{2}$，



将正四面体补成一个正方体，则正方体的棱长为2，正方体的体对角线长为$2\sqrt{3}$，

因为正四面体的外接球的直径为正方体的体对角线长，所以外接球半径$R=\sqrt{3}$，

则外接球的体积为$V=\frac{4}{3}\pi R^3=4\sqrt{3}\pi$，

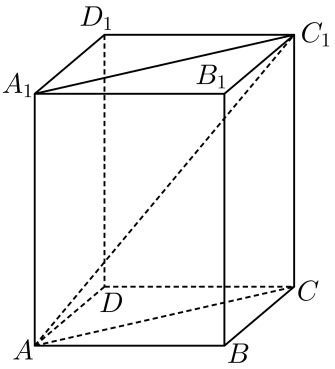
故选：A.

题目 2 (2023·陕西渭南·高一统考期末) 在直三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，$AB=BC=2$，$AA_1=2\sqrt{2}$，$\angle ABC=\frac{\pi}{2}$，则此三棱柱外接球的表面积为（　　）

A. 4π　　B. 8π　　C. 16π　　D. 24π

【答案】C

【解析】



因为 $AB=BC=2$，$\angle ABC=\dfrac{\pi}{2}$，所以 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形，

将直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 补全为如图长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$，

则长方体的外接球即直三棱柱的外接球，

因为 $AB=BC=2$，$AA_1=2\sqrt{2}$，所以外接球直径 $2R=AC_1=\sqrt{2^2+2^2+(2\sqrt{2})^2}=4$，

所以外接球半径 $R=2$，表面积 $S=4\pi R^2=16\pi$.

故选：C.

题目 3 (2023 春·河北衡水·高一校考阶段练习) 在正四棱锥 $P-ABCD$ 中，$AB=4$，$PA=2\sqrt{6}$，则平面 PAB 截四棱锥 $P-ABCD$ 外接球的截面面积是（　　）

A. $\dfrac{6\sqrt{5}\pi}{5}$　　B. $\dfrac{36\pi}{5}$　　C. 12π　　D. 36π

【答案】B

【解析】如图，作 $PO'\perp$ 平面 $ABCD$，垂足为 O'，则 O' 是正方形 $ABCD$ 外接圆的圆心，从而正四棱锥 $P-ABCD$ 外接球的球心 O 在 PO' 上，

取棱 AB 的中点 E，连接 $O'D$，$O'E$，OD，PE，作 $OH\perp PE$，垂足为 H.

由题中数据可得 $O'D=2\sqrt{2}$，$O'E=2$，$PE=2\sqrt{5}$，$O'P=4$，

设四棱锥 $P-ABCD$ 外接球的半径为 R，

则 $R^2=O'D^2+O'O^2=OP^2=(O'P-O'O)^2$，

即 $R^2=8+O'O^2=(4-O'O)^2$，

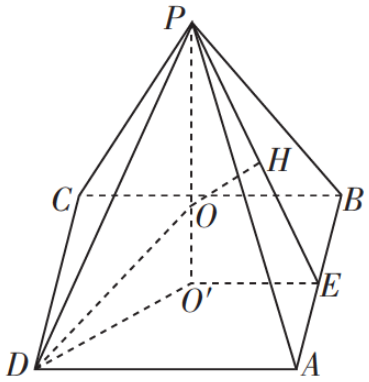
解得 $R=3$.

由题意易证 $\triangle OPH\backsim\triangle EPO'$，

则 $\dfrac{PH}{O'P}=\dfrac{OP}{PE}$，

故 $PH=\dfrac{6\sqrt{5}}{5}$.

故所求截面圆的面积是 $\pi\cdot PH^2=\dfrac{36\pi}{5}$.



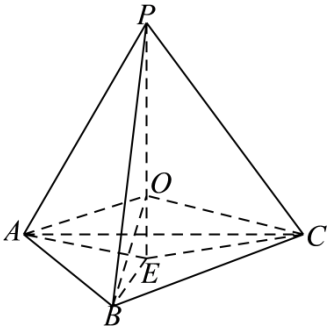
故选：B

题目 4 (2023春·山西太原·高一校考阶段练习) 在三棱锥 $P-ABC$ 中，$PA=PB=PC=\sqrt{3}$，侧棱 PA 与底面 ABC 所成的角为 $60°$，则该三棱锥外接球的体积为（　　）

A. π　　B. $\frac{\pi}{3}$　　C. 4π　　D. $\frac{4\pi}{3}$

【答案】D

【解析】设点 P 在平面 ABC 内的射影点为 E，如下图所示：



由线面角的定义可知，直线 PA 与底面 ABC 所成的角为 $\angle PAE=60°$，

所以，$PE=\sqrt{3}\sin 60°=\frac{3}{2}$，$AE=\sqrt{3}\cos 60°=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

因为 $PE\perp$ 平面 ABC，BE、$CE\subset$ 平面 ABC，$\therefore PE\perp BE$，$PE\perp CE$，

$\therefore BE=\sqrt{PB^2-PE^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{PC^2-PE^2}=CE$，

所以，$\triangle ABC$ 的外接圆圆心为点 E，且其外接圆半径为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$，

所以，三棱锥 $P-ABC$ 的外接球球心 O 在直线 PE 上，设球 O 的半径为 r，

由几何关系可得 $OE^2+AE^2=OA^2$，即 $\left|\frac{3}{2}-r\right|^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=r^2$，解得 $r=1$，

因此，三棱锥 $P-ABC$ 外接球的体积为 $V=\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{4}{3}\pi$.

故选：D.

题目 5 (2023春·河南鹤壁·高一河南省浚县第一中学校考阶段练习) 已知三棱锥 $P-ABC$ 的四个顶点均在同一个球面上，底面 ABC 满足 $BA=BC=\sqrt{6}$，$\angle ABC=\frac{\pi}{2}$，若该三棱锥体积的最大值为 3，则其外接球的体积为（　　）

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：https://d.book118.com/618075045101006072