2023-2024 学年广西桂林市高三下学期开学考试数学

模拟试题

注意事项：

1.答题前，务必将自己的姓名、班级、准考证号填写在答题卡规定的位置上.

2.答选择题时，必须使用 2B 铅笔将答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦擦干净后，再选涂其它答案标号.

3.答非选择题时，必须使用 0.5 毫米黑色签字笔，将答案书写在答题卡规定的位置上.

4.所有题目必须在答题卡上作答，在试题卷上答题无效.

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1．一个样本容量为 10 的样本数据，它们组成一个公差为 2 的等差数列$\{a_n\}$，若a_1，a_3，a_7成等比数列，则此样本的平均数和中位数分别是（　）

A．12，13　　B．13，13　　C．13，12　　D．12，14

2．如果椭圆$\frac{x^2}{k+8}+\frac{y^2}{9}=1(k>-8)$的离心率为$e=\frac{1}{2}$，则$k=$（　）

A．4　　B．4或$-\frac{5}{4}$　　C．$-\frac{4}{5}$　　D．4或$-\frac{4}{5}$

3．已知等差数列$\{a_n\}$，若$4a_3=5a_5$，则$a_{13}=$（　）

A．-2　　B．0　　C．2　　D．4

4．设m,n是两条不同的直线，α,β是两个不同的平面，则下列说法正确的是（　）

A．若$m\perp n,n\,//\,\alpha$，则$m\perp\alpha$

B．若$m\,//\,\beta,\beta\perp\alpha$，则$m\perp\alpha$

C．若$m\perp n,n\perp\beta,\beta\perp\alpha$，则$m\perp\alpha$

D．若$m\perp\beta,n\perp\beta,n\perp\alpha$，则$m\perp\alpha$

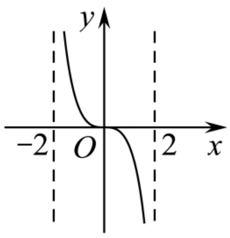
5．用 2 个 0，2 个 1 和 1 个 2 组成一个五位数，则这样的五位数有（　）

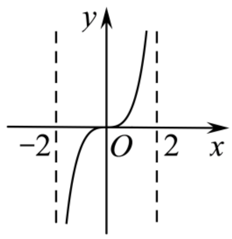
A．8 个　　B．12 个　　C．18 个　　D．24 个

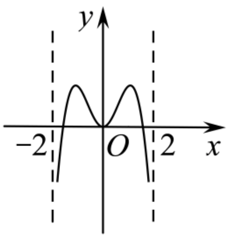
6．已知$\frac{\pi}{6}<\alpha<\pi$，$0<\beta<\pi$，$\sin\left(\frac{2\pi}{3}-\alpha\right)=\cos\beta$．若$\tan\alpha=3^{k}$，$\tan\beta=3^{-k}$，则$k=$（　）

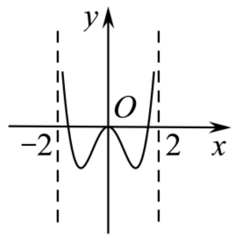
A．$-\frac{1}{2}$　　B．$\frac{1}{2}$　　C．$-\frac{3}{2}$　　D．$\frac{3}{2}$

7．我国著名数学家华罗庚先生曾说：“数缺形时少直观，形缺数时难入微，数形结合百般好，隔离分家万事休.”在数学学习和研究中，常用函数的图象来研究函数性质，也常用函数解析式来琢磨函数的图象特征，函数$f\left(x\right)=x^{2}\log_{4}\frac{2+x}{2-x}$的大致图象是（　）

A．

B．

C．

D．

8．设双曲线$E:\frac{x^{2}}{a^{2}}-\frac{y^{2}}{b^{2}}=1(a>0,b>0)$的焦距为$2c$，离心率为$e$，且$a,c,a+c$成等比数列，$A$是$E$的一个顶点，$F$是与$A$不在$y$轴同侧的焦点，$B$是$E$的虚轴的一个端点，$PQ$为$E$的任意一条不过原点且斜率为$k\left(k\neq0\right)$的弦，$M$为$PQ$中点，$O$为坐标原点，则下列判断错误的是（　）

A．E的一条渐近线的斜率为$\sqrt{e}$

B．$AB\perp BF$

C．$k_{OM}\cdot k_{PQ}=e$（k_{OM},k_{PQ}分别为直线OM,PQ的斜率）

D．若$OP\perp OQ$，则$\frac{1}{|OP|^{2}}+\frac{1}{|OQ|^{2}}=e$恒成立

二、多项选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分.

9．关于函数$f\left(x\right)=\sqrt{3}\sin2x-2\cos^{2}x+1$有下述四个结论，其中结论正确的是（　）

A．$f\left(x\right)$的最小正周期为2π

B．$f\left(x\right)$的图象关于直线$x=\frac{5\pi}{6}$对称

C．$f\left(x\right)$的图象关于点$\left(\frac{7}{12}\pi,0\right)$对称

D．$f\left(x\right)$在$\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$上单调递增

10．已知z_1，z_2为复数，i是虚数单位，下列说法正确的是（　）

A．若$z_1=1+2\mathrm{i}$，则z_1的虚部为$2\mathrm{i}$

B．若$z_1=1+2\mathrm{i}$，z_2满足$\left|z_2-z_1\right|=\sqrt{5}$，则$\left|z_2\right|$的最大值为$2\sqrt{5}$

C．若$\left|z_1+z_2\right|=\left|z_1-z_2\right|$，则$z_1z_2=0$

D．若$z_1=\left(1+2\mathrm{i}\right)\left(a+3\mathrm{i}\right)\left(a\in\mathrm{R}\right)$，且$z_1=\bar{z}_1$，则$a=-\frac{3}{2}$

11．已知$f\left(x\right)$为定义在**R**上的偶函数且$f\left(x\right)$不是常函数，$F\left(x\right)=f\left(1-x\right)-1,g\left(x\right)=f\left(x+1\right)-1$，若$g\left(x\right)$是奇函数，则（　）

A．$y=f\left(x\right)$的图象关于$\left(1,1\right)$对称　　B．$f\left(x\right)=f\left(x+4\right)$

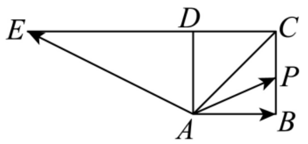
C．$F\left(x\right)$是奇函数　　D．$F\left(x\right)$与$g\left(x\right)$关于原点对称

三、填空题：本题共3小题，每小题5分，共15分.

12．已知集合$A=\{1,2,3,4,5\}$，$B=\{x\,|\,x=2t+1,t\in A\}$，则$A\cap B=$____________.

13．已知$\triangle ABC$的三边长分别为3，4，5，且A，B，C均在球O的球面上，球心O到平面ABC的距离为$\frac{\sqrt{3}}{2}$，则球O的表面积等于______.

14．如图，四边形$ABCD$是边长为1的正方形，延长CD至E，使得$DE=2CD$．动点P从点A出发，沿正方形的边按逆时针方向运动一周回到A点，$\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AE}$．则$\lambda-\mu$的取值范围为_____.



四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15．已知函数 $f\left(x\right)=3\ln x-x^2+x$.

(1)求 $f\left(x\right)$ 的单调区间；

(2)若过点 $\left(2,1\right)$ 作直线与函数 $g\left(x\right)=f\left(x\right)-3\ln x+\frac{1}{2}x^3$ 的图象相切，判断切线的条数.

16．随着寒冷冬季的到来，羽绒服进入了销售旺季，某调查机构随机调查了 400 人，询问他们选购羽绒服时更关注保暖性能还是更关注款式设计，得到以下的 2×2 列联表：

	更关注保暖性能	更关注款式设计	合计
女性	160	80	240
男性	120	40	160
合计	280	120	400

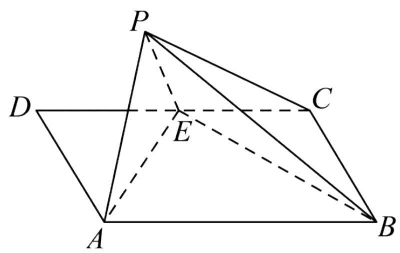
(1)是否有 95% 的把握认为男性和女性在选购羽线服时的关注点有差异？

(2)若从这 400 人中按男女比例用分层抽样的方法抽取 5 人进行采访，再从这 5 人中任选 2 人赠送羽线服，记 X 为抽取的 2 人中女生的人数，求 X 的分布列和数学期望.

附：$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{\left(a+b\right)\left(c+d\right)\left(a+c\right)\left(b+d\right)}$.

$P\left(K^2\geq k_0\right)$	0.10	0.05	0.010
k_0	2.706	3.841	6.635

17．如图，在矩形 $ABCD$ 中，$AB=4$，$BC=2$，E 为 CD 的中点，将 $\triangle ADE$ 沿 AE 折起，使点 D 到点 P 处，平面 $PAE\perp$ 平面 $ABCE$.



(1)证明：平面 $PAB\perp$ 平面 PBE；

(2)求二面角 $C-PA-B$ 的余弦值.

18．设抛物线 C：$x^2=2py$（$p>0$）的焦点为 F，抛物线 C 上一点 A 的横坐标为 $x_1\left(x_1>0\right)$，过点 A 作抛物线 C 的切线 l_1，与 x 轴交于点 D，与 y 轴交于点 E，与直线 l：$y=\frac{p}{2}$ 交于点 M. 当 $|FD|=2$ 时，$\angle AFD=60°$.

(1)求抛物线 C 的方程；

(2)若 B 为 y 轴左侧抛物线 C 上一点，过 B 作抛物线 C 的切线 l_2，与直线 l_1 交于点 P，与直线 l 交于点 N，求 $\triangle PMN$ 面积的最小值，并求取到最小值时 x_1 的值.

19．已知数列 $\{a_n\}$ 是正项等比数列，$\{b_n\}$ 是等差数列，且 $a_1=2b_1=2$，$a_2=b_4$，$a_5=4a_3$，

(1)求数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式；

(2) $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，T_{4n} 表示数列 $\left\{(-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]}\cdot b_n^2\right\}$ 的前 $4n$ 项和，集合 $A=\left\{n\left|\lambda\le\frac{T_{4n}\cdot b_{n+2}}{a_{n+2}},n\in\mathbf{N}^*\right.\right\}$ 共有 4 个元素，求 λ 范围；

(3) $c_n=\begin{cases}\dfrac{4\sqrt{b_{n+1}}-\sqrt{b_n}}{a_{n+2}\cdot\sqrt{b_n^2+2b_n}},n=2k-1,k\in\mathbf{N}^*\\ a_n\cdot b_n,n=2k,k\in\mathbf{N}^*\end{cases}$，数列 $\{c_n\}$ 的前 $2n$ 项和为 S_{2n}，求证：$S_{2n}<\frac{25}{18}+\left(\frac{2n}{3}-\frac{2}{9}\right)4^{n+1}$.

1．B

【分析】首先根据a_1，a_3，a_7成等比数列求出数列的首项，然后即可求出样本的平均数和中位数.

【详解】解：依题意$a_3{}^2=a_1a_7\Rightarrow\left(a_1+4\right)^2=a_1\left(a_1+6\times2\right)$，解得$a_1=4$，

故$\left\{a_n\right\}$是首项$a_1=4$，公差$d=2$的等差数列，

所以此样本的平均数为$\frac{S_{10}}{10}=13$，中位数为$\frac{a_5+a_6}{2}=13$.

故选：B.

本题主要考查了等比中项的性质，中位数，平均数，属于基础题.

2．B

【分析】分焦点在 x 轴和在 y 轴两种情况，分别得到 a,b 的表达式，进而求得 c 的表达式，然后根据离心率得到关于 k 的方程，求解即可.

【详解】解：因为椭圆$\frac{x^2}{k+8}+\frac{y^2}{9}=1(k>-8)$的离心率为$e=\frac{1}{2}$，

当$k+8>9$时，椭圆焦点在x轴上，可得：

$a=\sqrt{k+8},b=3,\therefore c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{k-1},\therefore e=\frac{\sqrt{k-1}}{\sqrt{k+8}}=\frac{1}{2}$，解得$k=4$，

当$0<k+8<9$时，椭圆焦点在y轴上，可得：

$a=3,b=\sqrt{k+8},\therefore c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{1-k},\therefore e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{1-k}}{3}=\frac{1}{2}$，解得$k=-\frac{5}{4}$.

$\therefore k=4$或$k=-\frac{5}{4}$.

故选：B.

3．B

【分析】设出等差数列$\left\{a_n\right\}$的公差，结合已知利用公差表示a_3即可得解.

【详解】设等差数列$\left\{a_n\right\}$的公差为d，由$4a_3=5a_5$，得$4a_3=5(a_3+2d)$，整理得$a_3=-10d$，

所以$a_{13}=a_3+10d=0$.

故选：B

4．D

【分析】根据空间中点线面的位置关系，即可结合选项逐一求解.

【详解】对于 A，若$m \perp n$，$n // \alpha$，则$m \subset \alpha$或者$m // \alpha$或者m, α相交，故 A 错误，

对于 B，若$m // \beta$，$\beta \perp \alpha$，则$m \subset \alpha$或者$m // \alpha$或者m, α相交，故 B 错误，

对于 C，若$m \perp n$，$n \perp \beta$，$\beta \perp \alpha$，则$m \subset \alpha$或者$m // \alpha$或者m, α相交，故 C 错误，

对于 D，若$m \perp \beta$，$n \perp \beta$，则$n // m$，又$n \perp \alpha$，所以$m \perp \alpha$，故 D 正确，

故选：D.

5．C

【分析】分首位为 2、1 计算出每种情况的结果数，再相加即可.

【详解】当首位为 2 时，这样的五位数有$\dfrac{A_4^4}{A_2^2 A_2^2} = 6$个；

当首位为 1 时，这样的五位数有$\dfrac{A_4^4}{A_2^2} = 12$个.

综上，这样的五位数共有$6 + 12 = 18$个.

故选：C.

6．B

【分析】根据题意分析可得$\alpha - \beta = \dfrac{\pi}{6}$，利用两角和差公式结合指数幂运算求解.

【详解】由题意可得$\cos\beta = \sin\left[\dfrac{\pi}{2} + \left(\dfrac{\pi}{6} - \alpha\right)\right] = \cos\left(\dfrac{\pi}{6} - \alpha\right) = \cos\left(\alpha - \dfrac{\pi}{6}\right)$，

因为$\dfrac{\pi}{6} < \alpha < \pi$，$0 < \beta < \pi$，则$0 < \alpha - \dfrac{\pi}{6} < \dfrac{5\pi}{6}$，

可得$\beta = \alpha - \dfrac{\pi}{6}$，即$\alpha - \beta = \dfrac{\pi}{6}$，

则$\tan\dfrac{\pi}{6} = \tan(\alpha - \beta) = \dfrac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta} = \dfrac{3^k - 3^{-k}}{1 + 3^k \cdot 3^{-k}} = \dfrac{3^k - 3^{-k}}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

令$t = 3^k > 0$，

则$\dfrac{t - \frac{1}{t}}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$，整理得$\sqrt{3}t^2 - 2t - \sqrt{3} = 0$，解得$t = \sqrt{3}$或$t = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$（舍去），

即$3^k = \sqrt{3}$，解得$k = \dfrac{1}{2}$.

故选：B.

7．B

【分析】先求函数$f(x)$的定义域，判断$f(x)$是奇函数，故排除CD；再根据$f(1)$的值，排除A，从而B正确.

【详解】由$\frac{2+x}{2-x}>0$，得$(x+2)(x-2)<0$，解得$-2<x<2$，

∴函数$f(x)$的定义域为$(-2,2)$，

∵$f(-x)=(-x)^2\log_4\frac{2-x}{2+x}=-x^2\log_4\frac{2+x}{2-x}=-f(x)$，

∴函数$f(x)$是奇函数，图象关于原点对称，故排除CD；

∵$f(1)=\log_4\frac{2+1}{2-1}=\log_4 3>\log_4 1=0$，故排除A，从而B正确.

故选：B.

8．D

【分析】A选项，由等比中项的性质得到离心率，进而得到$\frac{b}{a}=\sqrt{e}$，A正确；B选项，求出BF和AB的斜率，得到$k_{BF}\cdot k_{AB}=-\frac{b^2}{ac}=-1$，得到$AB\perp BF$；C选项，利用点差法得到$k_{OM}\cdot k_{PQ}=e$；D选项，设直线$OP:y=kx$，与双曲线方程联立，求出$|OP|^2$，再求出$|OQ|^2$，计算出$\frac{1}{|OP|^2}+\frac{1}{|OQ|^2}$，判断出结论.

【详解】A选项，因为$a,c,a+c$成等比数列，所以$c^2=ac+a^2$，所以$b^2=ac$且$e^2-e-1=0$，

解得$e=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$（负根舍），所以$\left(\frac{b}{a}\right)^2=\frac{ac}{a^2}=\frac{c}{a}=e$，所以$\frac{b}{a}=\sqrt{e}$，即$E$的一条渐近线的斜率为$\sqrt{e}$，故A正确；

B选项，不妨设F为左焦点，B为虚轴的上端点，则A为右顶点，

则BF的斜率$k_{BF}=\frac{b}{c},AB$的斜率$k_{AB}=-\frac{b}{a}$，所以$k_{BF}\cdot k_{AB}=-\frac{b^2}{ac}=-1$，

所以$AB\perp BF$，故B正确；

C选项，设$P(x_1,y_1),Q(x_2,y_2),M(x_0,y_0)$，则$\begin{cases}\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}=1,\\ \frac{x_2^2}{a^2}-\frac{y_2^2}{b^2}=1,\end{cases}$，

作差后整理得$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\cdot\frac{y_2+y_1}{x_2+x_1}=\frac{b^2}{a^2}$，即$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\cdot\frac{y_0}{x_0}=\frac{b^2}{a^2}$，

所以 $k_{PQ}\cdot k_{OM}=\frac{b^2}{a^2}=\frac{c^2-a^2}{a^2}=\frac{ac}{a^2}=\frac{c}{a}=e$，故 C 正确；

D 选项，设直线 $OP:y=kx$，则直线 $OQ:y=-\frac{1}{k}x$，将 $y=kx$ 代入双曲线方程

$b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$，得 $x^2=\frac{a^2b^2}{b^2-a^2k^2}$，则 $y^2=\frac{a^2b^2k^2}{b^2-a^2k^2}$，

$\therefore |OP|^2=x^2+y^2=\frac{a^2b^2\left(k^2+1\right)}{b^2-a^2k^2}$，

将 k 换成 $-\frac{1}{k}$ 得 $|OQ|^2=\frac{a^2b^2\left(k^2+1\right)}{b^2k^2-a^2}$，

则 $\frac{1}{|OP|^2}+\frac{1}{|OQ|^2}=\frac{\left(b^2-a^2\right)\left(k^2+1\right)}{a^2b^2\left(k^2+1\right)}=\frac{b^2-a^2}{a^2b^2}=\frac{c^2-2a^2}{a^2b^2}=\frac{e^2-2}{b^2}$ 与 b 的值有关，故 D 错误.

故选：D.

方法点睛：直线与圆锥曲线相交涉及中点弦问题，常用点差法，该法计算量小，模式化强，易于掌握，若相交弦涉及 $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{MB}$ 的定比分点问题时，也可以用点差法的升级版—定比点差法，解法快捷.

9．BCD

【分析】根据三角恒等变换可得 $f\left(x\right)=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$，即可代入验证求解对称轴以及对称中心，利用整体法即可判断 D，根据周期公式即可求解 A.

【详解】$f\left(x\right)=\sqrt{3}\sin 2x-2\cos^2 x+1=\sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$，

对于 A，$f\left(x\right)$ 的最小正周期为 π，故 A 错误，

对于 B，$f\left(\frac{5\pi}{6}\right)=2\sin\left(2\times\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{6}\right)=2\sin\frac{3\pi}{2}=-2$，故 $f\left(x\right)$ 的图象关于直线 $x=\frac{5\pi}{6}$ 对称，B 正确，

对于 C，$f\left(\frac{7\pi}{12}\right)=2\sin\left(2\times\frac{7\pi}{12}-\frac{\pi}{6}\right)=2\sin\pi=0$，故 $f\left(x\right)$ 的图象关于点 $\left(\frac{7}{12}\pi,0\right)$ 对称，C 正确，