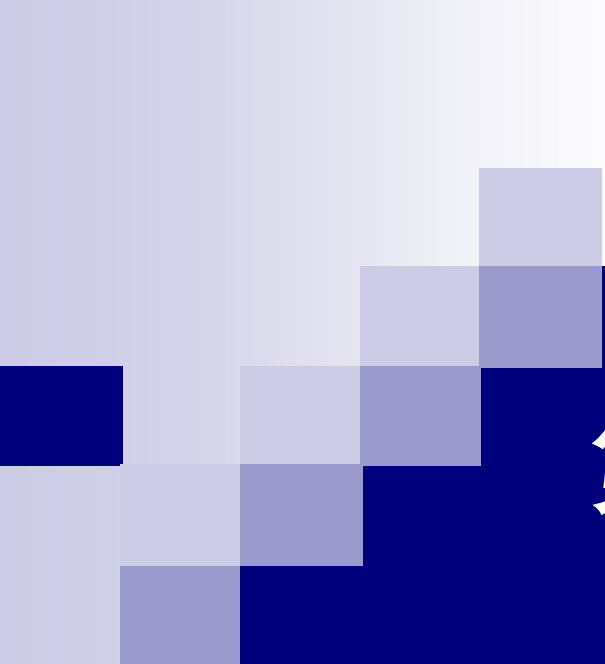




第一章 行列式



第一章 习题拓展

- 定义法
- 利用特殊行列式计算
- 用化三角形行列式计算
- 降阶法
- 数学归纳法
- 加边法

(一) 定义法

例 1 用行列式定义计算

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ n-1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & n \end{vmatrix};$$

解

要计算 D_n , 只需求出所有的非零项。 D_n 的非零项只有一项 , 即

$$\begin{aligned} D &= (-1)^t a_{1,n-1} a_{2,n-2} \cdots a_{n-1,1} a_{nn} \\ &= (-1)^t 1 \times 2 \times \cdots \times (n-1) \times n = (-1)^t n! \end{aligned}$$

其中 t 为排列 $(n-1)(n-2)\cdots 21n$ 的逆序数 , 故

$$t = 0 + 1 + 2 + \cdots + (n-3) + (n-2) + 0 = [(n-1)(n-2)]/2.$$

$$\text{所以 } D_n = (-1)^{(n-1)(n-2)/2} n! .$$

(二) 利用特殊行列式计算

例 2 计算

$$D_n = \begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \cdots & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{2}^2 & \cdots & \mathbf{2}^n \\ \mathbf{3} & \mathbf{3}^2 & \cdots & \mathbf{3}^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{n} & \mathbf{n}^2 & \cdots & \mathbf{n}^n \end{vmatrix}.$$

解

$$D_n = n! \begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \cdots & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{2}^2 & \cdots & \mathbf{2}^{n-1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{3}^2 & \cdots & \mathbf{3}^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{1} & \mathbf{n} & \mathbf{n}^2 & \cdots & \mathbf{n}^{n-1} \end{vmatrix}.$$

$$= n! \prod_{n \geq i > j \geq 1} (x_i - x_j)$$

$$= n!(2-1)(3-1)\cdots(n-1)$$

$$\bullet (3-2)(4-2)\cdots(n-2)\cdots[n-(n-1)]$$

$$= n!(n-1)!(n-2)!\cdots 2!1!.$$

评注

本题所给行列式各行（列）都是某元素的不同方幂，而其方幂次数或其排列与范德蒙德行列式不完全相同，需要利用行列式的性质（如提取公因子、调换各行（列）的次序等）将此行列式化成范德蒙德行列式.

(三) 用化三角形行列式计算

例 3 计算

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & x & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & x & a_3 & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & x \end{vmatrix}.$$

解 将第2,3,...n+1列都加到第一列，得

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} x + \sum_{i=1}^n a_i & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ x + \sum_{i=1}^n a_i & x & a_2 & \cdots & a_n \\ x + \sum_{i=1}^n a_i & a_2 & x & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x + \sum_{i=1}^n a_i & a_2 & a_3 & \cdots & x \end{vmatrix}$$

提取第一列的公因子，得

$$D_{n+1} = (x + \sum_{i=1}^n a_i) \begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n \\ \mathbf{1} & \mathbf{x} & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n \\ \mathbf{1} & \mathbf{a}_2 & \mathbf{x} & \cdots & \mathbf{a}_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{1} & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 & \cdots & \mathbf{x} \end{vmatrix}.$$

再做以下变换

$$c_2 + (-a_1)c_1, \quad c_3 + (-a_2)c_1, \quad \dots, \quad c_{n+1} + (-a_n)c_1$$

$$D_{n+1} = (x + \sum_{i=1}^n a_i) \begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & x - a_1 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & a_2 - a_1 & x - a_2 & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{1} & a_2 - a_1 & a_3 - a_2 & \cdots & x - a_n \end{vmatrix}$$

$$= (x + \sum_{i=1}^n a_i) \prod_{i=1}^n (x - a_i).$$

评注 本题利用行列式的性质，采用“化零”的方法，逐步将所给行列式化为三角形行列式．

化零时一般尽量选含有 1 的行（列）及含零较多的行（列）；若没有 1，则可适当选取便于化零的数，或利用行列式性质将某行（列）中的某数化为 1；若所给行列式中元素间具有某些特点，则应充分利用这些特点，应用行列式性质，以达到化为三角形行列式之目的．

(四) 降阶法

例4 计算

$$D_4 = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix}.$$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/618115031052006077>